高等代数

宋光艾 刘玉凤 姚光同 陈卫星 编著

清华大学出版社

高等代数

宋光艾 刘玉凤 姚光同 陈卫星 编著

清华大学出版社
北 京

内容简介

本书按照由浅入深的原则，分 10 章讲授高等代数的基本内容，其中前 5 章（行列式、线性方程组、矩阵、矩阵的特征值和特征向量、二次型）涵盖了非数学专业所开设的线性代数课程的主要内容，后 5 章（多项式理论、线性空间、线性变换、若尔当标准形、欧氏空间）安排了理论性较强的内容，可供数学专业的学生或希望深入学习代数知识的学生使用.

图书在版编目（CIP）数据

高等代数 / 宋光艾等编著. --北京：清华大学出版社，2012.3

ISBN 978-7-302-28127-6

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①宋… Ⅲ. ①高等代数—高等学校—教材 Ⅳ. ①O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 032213 号

责任编辑：刘 颖 赵从棉
封面设计：常雪影
责任校对：刘玉霞
责任印制：杨 艳

出版发行：清华大学出版社
网 址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地 址：北京清华大学学研大厦 A 座 **邮 编**：100084
社 总 机：010-62770175 **邮 购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京鑫海金澳胶印有限公司
经 销：全国新华书店
开 本：185mm×230mm **印 张**：12 **字 数**：261 千字
版 次：2012 年 3 月第 1 版 **印 次**：2012 年 3 月第 1 次印刷
印 数：1～3000
定 价：24.00 元

产品编号：038899-01

前言

“高等代数”是一门重要的数学基础课，就其内容来讲是由线性代数和多项式基础组成. 自恢复高考制度以来，涌现了一大批经典的“高等代数”教材，多年来各院校大多以这些经典的教材为主来讲授“高等代数”课程. 随着我国经济的飞速发展以及国民对高等教育的需求，高等教育的格局发生了巨大的变化，高等教育从过去的精英教育向大众化教育转变，以就业为导向的教育教学模式在普通本科院校中逐步展开，找到一本适合普通本科院校特点的教材实属不易，为此就催生了这本教材.

本书覆盖了“高等代数”教学大纲规定的基本内容，在教材的处理上基本上遵循由易到难的原则，同时考虑到绝大多数的学生将来不会从事数学方面的专职工作，为了增强线性代数的实用性，我们适当增加了代数计算方面的内容，把矩阵的特征值与特征向量作为矩阵乘法特例单独介绍。这样处理的好处是本书的前5章覆盖了非数学专业对线性代数的基本要求；后5章安排的是理论性较强的内容，介绍多项式、线性空间、线性变换的基本理论和欧氏空间的一般理论，考虑到不同对象的要求，我们也介绍了若尔当标准形的理论推导. 本书可用于普通本科院校数学系“高等代数”教材，也可用于讲授非数学专业的“线性代数”(前5章)之用.

本书的1～3章由宋光艾编写，4～6章由姚光同编写，7～8章由刘玉凤编写，9～10章由陈卫星编写，全书由宋光艾、刘玉凤统稿. 尽管我们认真努力，力争把本教材编写成既通俗易懂，又不失一般性的教材，但由于水平所限，纰漏之处在所难免，恳请各位同行及读者批评指正. 本书的出版得到了清华大学出版社的大力支持，在此一并表示感谢.

编　者

2011年10月

目录

第1章　行列式 ………… 1

1.1　引言 ………… 1
1.2　排列及其性质 ………… 3
1.3　行列式的定义 ………… 4
1.4　行列式的性质 ………… 7
1.5　行列式按一行(列)展开 ………… 11
1.6　克拉默法则 ………… 15
习题1 ………… 17

第2章　线性方程组 ………… 21

2.1　消元法 ………… 21
2.2　n维向量空间 ………… 26
2.3　向量组的线性相关性 ………… 28
2.4　矩阵的秩 ………… 34
2.5　线性方程组解的结构 ………… 38
习题2 ………… 43

第3章　矩阵 ………… 47

3.1　矩阵的运算 ………… 47
3.2　可逆矩阵 ………… 50
3.3　初等矩阵 ………… 53
3.4　矩阵的分块 ………… 57
习题3 ………… 60

第4章　矩阵的特征值和特征向量 ………… 64

4.1　矩阵的特征值和特征向量 ………… 64

4.2 相似矩阵和矩阵对角化的条件 …… 69
4.3 向量的内积和正交化 …… 72
4.4 实对称矩阵的对角化 …… 75
4.5 特征值和特征向量的应用 …… 78
习题 4 …… 84

第 5 章 二次型 …… 86

5.1 二次型 …… 86
5.2 二次型的标准形 …… 89
5.3 二次型的规范形 …… 93
5.4 正定二次型 …… 96
习题 5 …… 99

第 6 章 多项式理论 …… 102

6.1 一元多项式的定义 …… 102
6.2 多项式整除的概念 …… 103
6.3 最大公因式 …… 105
6.4 因式分解定理 …… 107
6.5 重因式 …… 108
6.6 多项式函数 …… 110
6.7 复系数与实系数多项式的分解 …… 111
6.8 有理系数多项式 …… 113
习题 6 …… 115

第 7 章 线性空间 …… 117

7.1 线性空间的定义与简单性质 …… 117
7.2 维数、基与坐标 …… 118
7.3 基变换与坐标变换 …… 120
7.4 线性子空间 …… 122
7.5 子空间的交与和 …… 124
7.6 线性空间的同构 …… 126
习题 7 …… 128

第 8 章 线性变换 …… 130

8.1 线性变换的定义 …… 130

8.2 线性变换的运算 …… 132
8.3 线性变换和矩阵 …… 134
8.4 特征值与特征向量 …… 139
8.5 对角矩阵 …… 143
8.6 不变子空间 …… 145
习题 8 …… 148

第 9 章 若尔当标准形 …… 151

9.1 λ-矩阵的定义和简单性质 …… 151
9.2 矩阵的等价与标准形式 …… 152
9.3 标准形的唯一性 …… 155
9.4 复矩阵的初等因子 …… 159
9.5 复矩阵的若尔当标准形 …… 161
习题 9 …… 165

第 10 章 欧氏空间 …… 168

10.1 欧氏空间的定义及基本性质 …… 168
10.2 标准正交基 …… 172
10.3 正交变换 …… 177
10.4 对称变换 …… 179
习题 10 …… 181

第1章

行　列　式

行列式是整个高等代数的基础，本章的主要内容是引进行列式的定义，研究行列式的性质，利用行列式的性质计算行列式的值，重点是行列式的计算.

1.1　引言

由线性方程组的知识易知：线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

当 $D=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，其解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \end{cases}$$

如果记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \neq 0, \tag{1.1}$$

则线性方程组的解就可表示为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D}, \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D}, \end{cases}$$

其中，

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22}-a_{12}b_2, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

有了以上规定，由线性方程组的系数就可以直接写出它的解，这为解二元一次方程组带来了极大的方便，为此，称式(1.1)为二阶行列式.

类似地，对于线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$$

如果令

$$\begin{aligned} D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{23}a_{12} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

则当 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ 时，线性方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D}, \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D}, \\ x_3 = \dfrac{D_3}{D}, \end{cases}$$

其中

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

并称式(1.2)为三阶行列式.

例 1.1 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2- x_3= 2, \\ -x_1+ x_2+2x_3= 1, \\ 2x_1+ x_2+ x_3= 0. \end{cases}$$

解 因为

$$\begin{aligned} D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= 1\times 1\times 1+(-1)\times 1\times(-1)+2\times 2\times 2-(-1)\times 1\times 2 \\ &\quad -2\times 1\times 1-1\times(-1)\times 2 \\ &= 12 \neq 0, \end{aligned}$$

$$D_1=\begin{vmatrix}2&2&-1\\1&1&2\\0&1&1\end{vmatrix}=-5,\quad D_2=\begin{vmatrix}1&2&-1\\-1&1&2\\2&0&1\end{vmatrix}=13,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&2&2\\-1&1&1\\2&1&0\end{vmatrix}=-3,$$

故得此方程组的解为

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{-5}{12},\\[2mm] x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{13}{12},\\[2mm] x_3=\dfrac{D_3}{D}=\dfrac{-3}{12}.\end{cases}$$

由以上可以看出，二、三阶行列式为解线性方程组提供了很大的方便，我们希望推广到一般情形，为此，我们先做一些必要的准备.

1.2 排列及其性质

在本节中，主要介绍排列的定义及其性质，为给出行列式的一般定义做必要的准备.

定义 1.1 由前 n 个自然数排成的一个 n 元有序数组 $j_1j_2\cdots j_n$ 称为一个 n 级的排列.

如 12345 是一个 5 级排列，4312 是一个 4 级排列. 由 n 个自然数构成的 n 级排列共有 $n!$ 个，除了排列 $12\cdots(n-1)n$ 是按自然数的顺序排成的（称为自然序排列），其他的排列或多或少地打破这种顺序，为了加以区别，我们给出下面的定义.

定义 1.2 在一个 n 级排列中，如果一个较大的数排在一个较小的数前面，则称这两个数构成一个逆序. 排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中所有逆序的总和称为该排列的逆序数，记为 $N(j_1j_2\cdots j_n)$，并称逆序数为偶数的排列为偶排列，逆序数为奇数的排列为奇排列.

如在排列 4312 中，3 比 2 大，3 排在 2 的前面，3 与 2 构成逆序. 而 $N(4312)=5$，故 4312 是一个奇排列. $N(4132)=4$，即 4132 为偶排列.

定义 1.3 把一个排列中某两个数的位置对调，其余位置上的数不变的变换称为对换.

如排列 4132 可以由 4312 对换 1 与 3 的位置得到.

定理 1.1 对换改变排列的奇偶性.

证 我们将分两步证明该定理，首先证明对换相邻两个位置上的数时，结论成立；其次证明一般情况.

(1) 由 $j_1\cdots j_kj_{k+1}\cdots j_n$ 对换 j_k 与 j_{k+1} 得到排列 $j_1\cdots j_{k+1}j_k\cdots j_n$，由于数 j_k,j_{k+1} 在两个排列中与其余的 $n-2$ 个数构成的序关系是一样的，不同的是 j_kj_{k+1} 与 $j_{k+1}j_k$ 的序关系，这两对数的序关系恰好相反，因此，$N(j_1\cdots j_kj_{k+1}\cdots j_n)=N(j_1\cdots j_{k+1}j_k\cdots j_n)\pm1$. 从而得对换相邻

位置的两个数,改变排列的奇偶性.

(2) 一般情形下,在排列 $j_1\cdots j_k\cdots j_{k+s}\cdots j_n$ 中,对换 j_k,j_{k+s} 得到排列 $j_1\cdots j_{k+s}\cdots j_k\cdots j_n$. 这个排列还可以通过以下方式得到:在排列 $j_1\cdots j_k\cdots j_{k+s}\cdots j_n$ 中,对 j_k 连续向右做相邻位置的对换,当做到第 s 次对换时排列就变成 $j_1\cdots j_{k-1}j_{k+1}\cdots j_{k+s}j_k\cdots j_n$, j_{k+s} 再向左连续做相邻位置的对换,当做到第 $s-1$ 次时,就变成我们要的排列 $j_1\cdots j_{k+s}\cdots j_k\cdots j_n$,在这个过程中,共做了 $2s-1$ 次相邻位置的对换,而每次对换都改变排列的奇偶性,总的效果是改变排列的奇偶性.

推论 在所有的 $n(n\geqslant 2)$ 级排列中,奇排列的个数与偶排列的个数相等,均为 $\frac{n!}{2}$.

证 设在 n 级排列中,奇排列的个数为 q 个,偶排列的个数为 p 个,在所有的 q 个不同的奇排列中,做相同位置的两个数的对换,由定理 1.1 知,得到 q 个互不相同的偶排列,而所有偶排列的个数共有 p 个,故 $q\leqslant p$. 同理可证 $p\leqslant q$.

定理 1.2 任意一个排列都可以经过一系列的对换与自然序排列互变,而且所做对换次数的奇偶性与该排列的奇偶性相同.

证明 用数学归纳法

(1) 当 $n=1$ 时,结论显然.

(2) 假定对于 $n-1$ 结论正确,则对于 n,若排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中,$j_n=n$,由归纳假设 $j_1j_2\cdots j_{n-1}$ 经过一系列的对换变成排列 $12\cdots(n-1)n$;若排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中,$j_n\neq n$,做 n 与 j_n 的对换,就变成上述情形,由归纳假设知,任意一个 n 级排列都可以通过一系列的对换变成自然序排列,而做反向的对换就把自然序排列变成排列 $j_1j_2\cdots j_n$. 由于自然序排列是偶排列,因此,所做对换的次数的奇偶性与排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的奇偶性相同.

1.3 行列式的定义

在给出行列式的一般定义之前,我们先回忆以下三阶行列式的定义:

$$\begin{aligned} D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{23}a_{12}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{23}a_{32}a_{11}-a_{33}a_{21}a_{12} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

由三阶行列式的定义,我们不难发现以下规律:

(1) 三阶行列式有 $3!=6$ 项,它们恰好是所有的取自既不同行又不同列的三个元素的乘积.

(2) 每一项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 的符号为 $(-1)^{N(j_1j_2j_3)}$.

因此,三阶行列式还可以表示为:$D=\sum\limits_{j_1j_2j_3}(-1)^{N(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$,推广到一般情况就

得到行列式的一般定义.

定义 1.4 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于所有的取自既不同行又不同列的 n 个元素乘积的代数和，而每一项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的符号为：当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时为正号，是奇排列时为负号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

例 1.2 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ g & 0 & 0 & h \end{vmatrix}.$$

解 在该行列式的展开式中，共有 $4!=24$ 项，但非零项只有：$acfh,adeh,bdeg,bcfg$. 这四项都是行按自然顺序排列，它们的列排列分别是：1234，1324，4321，4231，而 $N(1234)=0$，$N(1324)=1$，$N(4321)=6$，$N(4231)=5$，故

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{N(1234)}acfh + (-1)^{N(1324)}adeh + (-1)^{N(4321)}bdeg + (-1)^{N(4231)}bcfg \\ &= acfh - adeh + bdeg - bcfg. \end{aligned}$$

例 1.3 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 既然行列式是取自既不同行又不同列的 n 个元素乘积的代数和，我们考察它的非零项. 首先，它的每一非零项中所含的最后一行的元素只能是 a_{nn}，含有 a_{nn} 的非零项中，含有第 $n-1$ 行的元素只能是 $a_{n-1,n-1}$，以此类推，不难知道，该行列式的非零项只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，故 $D=(-1)^{N(123\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，称该行列式 D 为 n 阶上三角形行列式.

在行列式的定义中，每一项中元素的排列是行按自然序排列，而我们知道数的乘法是满足交换律的，如果行列式中的项不是以上述次序出现，比如：若 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 是行列式中的一项，那么该项的符号能否直接确定呢？为确定 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 的符号，按定义，首先把该

项按行是自然序重排，设为 $a_{1l_1}a_{2l_2}\cdots a_{nl_n}$，这个过程实际上是用一系列对换把行的排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 转化成自然序排列 $12\cdots n$，同时把列的排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 变成 $l_1l_2\cdots l_n$. 因为交换 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 中两个元素的位置伴随的是在做了行排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的一个对换的同时，还做了列排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的一个对换，于是，行排列与列排列同时改变一次奇偶性，由此得，新的行排列的逆序数与新的列排列的逆序数之和的奇偶性与 $N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)$ 的奇偶性相同。如此下去，不难知道：$N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)$ 的奇偶性与 $N(12\cdots n)+N(l_1l_2\cdots l_n)$ 的奇偶性相同，而项 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 在行列式中的符号是 $(-1)^{N(l_1l_2\cdots l_n)}$. 由此，我们有 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 在行列式展开式中的符号为 $(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)}$，于是，行列式的定义可以补充为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

$$= \sum(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

$$= \sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}. \tag{1.3}$$

由式(1.3)得

性质1 行列式行、列互换，其值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 令

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

其中 $a_{ij}=b_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，由行列式的定义

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)}b_{1i_1}b_{2i_2}\cdots i_{ni_n}$$

$$= \sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$$

$$
=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.
$$

把行列式的行列互换得到的新的行列式，称为原行列式的转置行列式. 由性质 1 和例 1.3，立即得到

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.
$$

并称该行列式为下三角行列式；上三角行列式、下三角行列式统称为三角形行列式。

1.4 行列式的性质

利用行列式的定义只能计算一些特殊的行列式的值，对于阶数比较高的、一般的行列式很难用定义计算，为了便于计算行列式的值，下面讨论行列式的一些性质. 由性质 1，行列式与其转置行列式相等，因此，行列式的行具有的性质，转置后就是列具有的性质. 反之亦然. 故行列式的行与列的地位是对称的，具有相同的性质. 以下以行的性质为主来讨论.

性质 2 交换行列式两行(列)的位置，行列式变号.

证 交换行列式

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

的第 s,t 行，并令

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{t1} & b_{t2} & \cdots & b_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},
$$

其中 $a_{ij}=b_{ij}, i\neq s,t, a_{tj}=b_{sj}, i\in\{1,2,\cdots,n\}/\{s,t\}, j\in\{1,2,\cdots,n\}$. 由行列式的定义

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{t1} & b_{t2} & \cdots & b_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n} (-1)^{N(j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)} b_{1j_1}\cdots b_{sj_s}\cdots b_{tj_t}\cdots b_{nj_n}$$

$$= \sum_{j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n} (-1)^{N(j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{sj_t}\cdots a_{tj_s}\cdots a_{nj_n}$$

$$= -\sum_{j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n} (-1)^{N(j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{sj_t}\cdots a_{tj_s}\cdots a_{nj_n}$$

$$= -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论 若行列式某两行(列)的元素相等,则行列式的值为零.

证 设行列式 D 的第 i,j 行的元素对应相等,交换这两行的位置,由性质 2,行列式变号,另一方面,交换后行列式并没有发生变化,故有 $D=-D$,即 $2D=0, D=0$.

性质 3 把行列式某一行(列)的元素都乘以 k,等于用 k 乘行列式.

证 由行列式的定义,有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{s1} & ka_{s2} & \cdots & ka_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2\cdots j_n} (-1)^{N(j_1\cdots j_s\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots(ka_{sj_s})\cdots a_{nj_n}$$

$$= k\sum_{j_1 j_2\cdots j_n} (-1)^{N(j_1\cdots j_s\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{sj_s}\cdots a_{nj_n}$$

$$= k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论 1 若行列式两行(列)的元素对应成比例,则行列式的值为零.

推论 2 若行列式某一行(列)的元素全为零,则行列式的值为零.

性质 4

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1}+a'_{1s} & a_{s2}+a'_{s2} & \cdots & a_{sn}+a'_{s2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{1s} & a'_{s2} & \cdots & a'_{s2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=D_1+D_2.$$

证 由行列式的定义,有

$$\begin{aligned} D &= \sum_{j_1j_2\cdots j_s\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_s\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots(a_{sj_s}+a'_{sj_s})\cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1j_2\cdots j_s\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_s\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{sj_s}\cdots a_{nj_n} \\ &\quad+\sum_{j_1j_2\cdots j_s\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_s\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a'_{sj_s}\cdots a_{nj_n} \\ &= D_1+D_2. \end{aligned}$$

性质 5 把行列式某一行(列)的元素都乘以同一个数后,加到另一行(列)的对应元素上,行列式的值不变.

证明 由性质 4 和性质 3 的推论 1,有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1}+ka_{s1} & a_{t2}+ka_{s2} & \cdots & a_{tn}+ka_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{s1} & ka_{s2} & \cdots & ka_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

行列式的性质是计算行列式的有力工具，利用行列式的性质计算行列式的值，就是要把行列式变成一个与它等值的、容易计算的特殊行列式.

例 1.4 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 的值.

解 对于这个行列式来说，组成它的每一行的元素都相同，如果把 2、3、4 列都加到第 1 列上，由性质 5 知，行列式的值保持不变. 这时行列式的第 1 列的元素都是 10，由性质 3，就可把 10 提出来，再由性质 5，把它化成上三角行列式.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 3 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 1 & 2 \\ 10 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 160.$$

例 1.5 计算行列式：

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}, \quad a_1a_2\cdots a_n \neq 0.$$

解 把行列式的第 1 列乘 -1 后加到后面的各个列上得

$$\text{原行列式} = \begin{vmatrix} 1+a_1 & -a_1 & -a_1 & \cdots & -a_1 & -a_1 \\ 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix},$$