概率统计辅导

GAILV TONGJI FUDAO

主审　闫理坦

主编　陈珊敏

東華大學出版社

概率统计辅导

东华大学概率统计教学团队

主　编　陈珊敏

東華大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率统计辅导/陈珊敏主编. —上海：东华大学出版社，2012.3

ISBN 978-7-5669-0005-0

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①陈… Ⅲ. ①概率统计—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 020510 号

责任编辑 竺海娟
封面设计 李 博

概率统计辅导
陈珊敏 主编
上海市延安西路 1882 号
邮政编码：200051 电话：021-62193056
新华书店上海发行所发行 常熟大宏印刷有限公司印刷
2012 年 3 月第 1 版 2012 年 3 月第 1 次印刷
开本：850×1168 1/32 印张：6 字数：156 千字
ISBN 978-7-5669-0005-0/O·010
定价：15.00 元

主审 闫理坦

主编 陈珊敏

编委 陈珊敏 葛 勇 胡良剑 胡梦瑜
陆允生 孙晓君 王会芹 王 澜
闫理坦 张 娟 郑 洁 赵伟国
周 洁

前　　言

本书是作者在多年教学实践的基础上编著而成的，可作为高等学校工科或其他非数学类专业学生学习概率统计的辅导书，或复习考研的辅导书；也可作为教师的教学参考书。

随着数学在经济、金融、管理以及科学技术各领域的应用越来越广泛和深入，特别在计算机日益普及的今天，需要有更多的能够应用随机数学对这些领域中的许多问题及大量的数据建模、分析、进行推断的专业人才。因此，作为随机数学基础的概率统计，是工科或其他非数学类专业学生的重要基础课。东华大学十分重视该基础课的教学，为了不断提高概率统计的教学质量，在东华大学分管教学的领导的关心和支持下，我们组建了以闫理坦教授为首的“东华大学概率统计教学团队”。团队的任务和目标是：对概率统计的教学内容和方法进行深入研讨，团队成员之间充分交流教学经验，相互促进和提高，提升团队的整体教学水平和效果，最终的目的是要促进学生学好概率统计这门重要的数学基础课。本书正是在上述教学背景和环境下编写而成的。

本书的初稿第一章由陈珊敏、陆允生编写；第二章由周洁、郑洁编写；第三章由闫理坦、胡梦瑜编写；第四章由孙晓君、赵伟国编写；第五章由张娟编写；第六章由王澜编写；第七章由胡良剑、王会芹编写；第八章由葛勇编写。全书由陈珊敏和陆允生负责通稿和打印工作，对初稿的内容进行了适当的删减或增加，闫理坦对全书进行了审校。

工科或其他非数学类专业学生在学习概率统计时，最初会把概率统计理解为应用于一批特例的一堆公式、法则和技术的大杂

烩，不理解他们所用方法原理的学生将很快忘却对这些问题求解的细节。基于此，本书主要汇集了概率统计的定义原理；针对概率统计中的重点和难点进行了讲解；考虑到部分学生的考研需要，本书在每一章附有练习题，以便让学生自测学习效果。书中的例题和习题是作者根据多年的教学实践和经验积累而成的，也有一些例题和习题选自近几年的考研题。

本书内容丰富，特色鲜明。限于编者的水平，不妥和疏漏之处在所难免，肯请同行专家和广大读者提供宝贵意见。

目　　录

第一章 事件与概率

§1.1 内容提要

1. 事件的关系与运算

(1) 包含：$A \subset B$：当 A 发生时，B 必然发生，称 A 是 B 的子事件；

(2) 等价：$A = B \Leftrightarrow A \subset B, B \subset A$；

(3) 交：$AB = A \cap B$：A,B 同时发生，$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap \cdots \cap A_n$；

(4) 并：$A \cup B$：A,B 至少一个发生，$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup \cdots \cup A_n$；

(5) 差：$A - B$：A 发生而 B 不发生；$A - B = A\overline{B} = A - AB$；

(6) 互斥：$AB = \emptyset$；当 A,B 互斥时，有时记 $A \cup B = A + B$，$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} A_i$；

(7) 逆：$\overline{A}$ 称为 A 的逆事件；若 A 与 B 满足：$A \cup B = \Omega, AB = \emptyset$，则称 A,B 互逆；且 $\overline{A} = \Omega - A$.

2. 运算规律

(1) 交换率：$A \cup B = B \cup A, AB = BA$；

(2) 结合率：$ABC = A(BC), A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C)$；

(3) 分配率：$A \cap (B \cup C) = (AB) \cup (AC)$，$A \cup (BC) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$；

(4) *De Morgen* 定律：$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$，$\overline{\bigcap A_i} = \bigcup \overline{A}_i, \overline{\bigcup A_i} = \bigcap \overline{A}_i$.

3. 概率定义与性质

定义 1.1 设$A\subset\Omega$是一事件,$P(A)$是满足如下性质的数:

(1) $0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

(2) $P(\Omega)=1$;

(3) 若$A_1,\cdots,A_n,\cdots$是一列互斥事件,即$\forall i,j(i\neq j),A_iA_j=\emptyset$,有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i).$$

则称$P(A)$是事件A发生的概率.

概率的性质如下:

(1) $P(\overline{A})=1-P(A),P(\emptyset)=0$;

(2) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$,进而有

$$\begin{aligned}P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=&\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)\\&+\cdots+(-1)^{k-1}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}P(A_{i_1}\cdots A_{i_k})\\&+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1\cdots A_n);\end{aligned}$$

(3) $P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$,因此若$B\subset A$,则有$P(B)\leqslant P(A)$,且有$P(A-B)=P(A)-P(B)$.

4. 条件概率和乘法、全概率、贝叶斯公式

定义 1.2 若$P(B)>0$,则在B发生的条件下A发生的概率为:

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

由此得到:

(1) 乘法公式:当$P(B)>0$时,有$P(AB)=P(B)P(A\mid B)$;而当$P(A_1\cdots A_{n-1})>0$时,有:

$P(A_1\cdots A_n)$

$=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})$；

(2) 全概率公式：若 $A_1,\cdots,A_n,B$ 满足如下条件：

① $\forall i,j(i\neq j),A_iA_j=\varnothing$；

② $\forall i,P(A_i)>0$；

③ $B\subset\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$.

则 $P(B)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)$；

(3) 贝叶斯公式：若 $A_1,\cdots,A_n,B$ 满足全概率公式中的条件，则我们有：

$$P(A_j\mid B)=\frac{P(A_j)P(B\mid A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)}.$$

5. 事件的独立性

定义 1.3　若两个事件 A,B 满足 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称 A,B 相互独立；

若 n 个事件 $A_1,\cdots,A_n$ 满足 $\forall i,j(i\neq j),P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j)$，则称它们两两独立；

若 n 个事件 $A_1,\cdots,A_n$ 满足 $\forall 2\leqslant k\leqslant n,P(A_{i_1}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})\cdots P(A_{i_k})$，其中 $A_{i_1},\cdots,A_{i_k}$ 是 $A_1,\cdots,A_n$ 中 k 个互不相同的事件，则称 $A_1,\cdots,A_n$ 相互独立.

性质：

(1) 若 A,B 相互独立，则 A 与 $\overline{B}$、$\overline{A}$ 与 B、$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立；

(2) 若 $A_1,\cdots,A_n,B_1,\cdots,B_m$ 相互独立，$f(A_1,\cdots,A_n)$，$g(B_1,\cdots,B_m)$分别为 $A_1,\cdots,A_n$ 与 $B_1,\cdots,B_m$ 的通过交、并等集合运算得到的新集合，则 $f(A_1,\cdots,A_n)$与 $g(B_1,\cdots,B_m)$也相互独立.

§1.2 重点与难点

1. 古典概型

我们称如下的概率模型为古典概型,如果事件空间 Ω 满足如下条件:

(1) $\Omega=\{\omega_1,\cdots,\omega_n\}$;

(2) 每个基本事件发生的可能性相等.

这时,若 $A\subset\Omega$,记 $N(A)$ 表示 A 中所含基本事件的个数,则我们定义事件 A 发生的概率为:

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{N(A)}{n}.$$

从上面可知,要计算古典概型中事件的概率,就是要计算事件空间中基本事件的个数以及事件中所含基本事件的个数.其一般方法如下:

(1) 加法原理

如果从 A 到 B 有两种不同路径,而每条路径又分别有 a、b 种不同的方法,则从 A 到 B 共有 $a+b$ 种不同的方法;

(2) 乘法原理

如果从 A 到 B 有 a 种不同的方法,而从 B 到 C 有 b 种不同的方法,且它们相互独立,则从 A 到 C 共有 ab 种不同的方法;

(3) 排列组合

假设某个箱中有 M 个球,现要从中一个一个的取出 n 个球,则根据不同的取法,有如下四种不同的方法:

① 如果取后即放回,且考虑取的顺序,则共有 M^n 种不同的方法;

② 如果取后即放回,但不考虑取的顺序,则共有 $C_{M+n-1}^{n}=\frac{(M+n-1)!}{n!(M-1)!}$ 种不同的方法;

③ 如果取后不放回，但要考虑取的顺序，则共有 $P_M^n = \frac{M!}{(M-n)!}$ 种不同的方法；

④ 如果取后不放回，且不考虑取的顺序，则共有 $C_M^n = \frac{M!}{n!(M-n)!}$ 种不同的方法.

与此相类似的是按箱分配东西的问题：将 n 个小球分配到 M 个箱中去. 则箱中可容纳任意多个小球对应上面的取后放回，而箱中最多可容纳一个小球则对应上面的取后不放回；而小球两两不同对应上面的有序抽样；小球无区别对应上面的无序抽样.

（4）分组

① 若 $r_1+\cdots+r_k=n$，则将 n 个不同的元素分成 k 个部分，第一部分有 r_1 个，第二部分有 r_2 个，依次下去，则不同的分法有 $\frac{n!}{r_1!\cdots r_k!}$；

② 若 n 个元素中有 n_1 个"1"、n_2 个"2"、…、n_k 个"k"，且 $n_1+\cdots+n_k=n$，从这 n 个元素中取出 r 个，使得带足标"i"的元素有 $r_i(r_i\leqslant n_i, 1\leqslant i\leqslant k)$，而 $r_1+\cdots+r_k=r$，这时不同取法的总数为 $C_{n_1}^{r_1}\cdots C_{n_k}^{r_k}$.

2. 几何概型

定义 1.4　设 Ω 是 R^n 中的一个封闭区域，$A\subset\Omega$，若事件 A 发生的概率仅与其度量的大小成正比，而与其所处的位置、形状等无关，则称该概率模型为几何概型. 且有

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

其中 $\mu(\cdot)$ 表示 R^n 中的欧几里德度量.

对几何概型而言，重要的是如何把题目中的文字转换成数学语言，使其样本空间为直线、平面或立体中的一个封闭区域，再在该封闭区域中找到符合条件的小区域，进而求出事件的概率. 具体例子见后面的例题.

3. 独立性

由独立性的定义，在计算中我们常有如下公式：若 $A_1,\cdots,A_n$ 相互独立，则有

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i) \quad P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1-P(A_i)).$$

若实验 E 只有两个可能的结果：A 及 $\bar{A}$，且 $P(A)=1-P(\bar{A})=p(0<p<1)$，则称 E 是一个贝努里试验，且称 A 是成功事件. 我们把进行一次贝努里实验或独立重复地进行若干次贝努里实验的概率模型称作贝努里概型. 在贝努里概型中，有如下事件的概率：

(1) 记 $B_k=\{n$ 重贝努里试验中 A 恰好出现 k 次$\}$. 则由试验的独立性及概率的有限可加性得：

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \quad P(B_k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k};$$

(2) 将贝努里试验独立重复地进行下去直到出现首次成功为止. 记 $W_k=\{$首次成功出现在第 k 次试验$\}$，则有：

$$\forall\, k = 1,2,\cdots, \quad P(W_k) = p(1-p)^{k-1};$$

(3) 将贝努里试验独立重复地进行下去，直到出现 r 次成功. 记 $C_k=\{$第 r 次成功出现在第 k 次试验$\}$ $(k \geqslant r)$，则 C_k 发生当且仅当第 k 次试验出现成功事件 A，而前 $k-1$ 次恰好出现 $r-1$ 次事件 A，因此有：

$$\forall\, k = r, r+1, \cdots, \quad P(C_k) = C_{k-1}^{r-1} p^{r-1} (1-p)^{k-r} p.$$

§1.3 典型例题

例题 1.1(取球问题) 袋中有 5 个白球，3 个黑球，分别按下列三种取法在袋中取球.

1. 有放回的取球： 从袋中取三次球，每次取一个，看后放回袋中，再取下一个球；

2. 无放回的取球：从袋中取三次球，每次取一个，看后不放回袋中，再取下一个球；

3. 一次取球：从袋中任取三个球.

在以上三种取法中均求事件 $A=\{$恰好取得 2 个白球$\}$的概率.

解：1. 取球时，取到每个球的可能性都相同，而因为是有放回的，因此每次都有 8 种可能，即总的可能性为：$N=8\times8\times8=512$，而三次球中有 2 个白球，但没说是哪次取到的，因此总共有 3 种可能为 2 白 1 黑的，而每种可能中，白的有 5 种可能，黑的有三种可能，因此事件 A 的可能取法有 $N_A=3\times5\times5\times3=225$，所以 $P(A)=\dfrac{N_A}{N}=\dfrac{225}{512}$；

2. 在无放回取球中，第一次取球有 8 种可能，第二次有 7 种，而最后一次为 6 种，因此总的可能有 $N=8\times7\times6=336$，同时，第一次白球有 5 种可能，而第二个白球只有 4 种可能，黑球有 3 种可能，因此事件 A 的可能性有 $N_A=3\times5\times4\times3=180$，所以，此时 $P(A)=\dfrac{N_A}{N}=\dfrac{180}{336}$；

3. 在一次取球中，取的可能数是 $N=C_8^3=\dfrac{8!}{3!5!}$，而事件 A 的可能性为 $N_A=C_5^2C_3^1$，因此 $P(A)=\dfrac{N_A}{N}=\dfrac{C_5^2C_3^1}{C_8^3}$.

例题 1.2(分球问题) 将 n 个(不同的)球放入 $M(n<M)$ 个(不同的)盒子中去，试求如下事件的概率：

1. 在指定的 n 个盒子中各有一个球；

2. n 个盒子中恰好各有一个球.

解：1. 每个球都有 M 种不同的放法，因此 n 个球放入 M 个(不同)盒子中的总数为 $N=M^n$；在指定的 n 个盒子中每个盒子只有一个球，则是一个全排，因此为 $N_A=P_n^n=n!$，因此概率为

$$P_1(A)=\frac{N_A}{N}=\frac{n!}{M^n};$$

2. 因为盒子没有指定，因此可能有 C_M^n 中不同的放法放入 n 个盒子，因此其概率为 $P_2(A)=C_M^nP_1(A)=\frac{C_M^n n!}{M^n}$.

注解 1.1 在上题中，如果球是相同的，盒子是不同的，则又如何？如果球、盒子都是相同的，又如何？球不同、盒子相同又是如何的？

例题 1.3(取数问题) 从 0,1,…,9 共十个数字中随机的不放回的连续取四个数字，并按其出现的先后排成一列，求下列事件的概率：

1. 四个数为一偶数；
2. 四个数成一四位数；
3. 四个数排成一个四位偶数.

解： 令 A={四个数排成一个偶数}、B={四个数排成一个四位数}、C={四个数排成一个四位偶数}，则有
$N_\Omega=P_{10}^4=10\times9\times8\times7$, $N_A=C_5^1\times P_9^3$, $N_B=C_9^1P_9^3$，因此我们有：

$$P(A)=\frac{N_A}{N_\Omega}=\frac{C_5^1P_9^3}{P_{10}^4}=0.5;\quad P(B)=\frac{N_B}{N_\Omega}=\frac{C_9^1P_9^3}{P_{10}^4}=0.9.$$

而四位偶数可以是这样构成的：个位是 0，则其余三个任意，或者，个位是 0 以外的四个偶数之一，则千位数为除个位和 0 以外的其余 8 个数之一，其余两个数任意，因此总共的方法数为 $N_C=P_9^3+C_4^1C_8^1P_8^2=2\,296$，因此：

$$P(C)=\frac{N_C}{N_\Omega}=\frac{2\,296}{5\,040}=0.456.$$

例题 1.4(分组问题) 将一副 52 张的扑克牌平均分给四个人，分别求有人分得 13 张黑桃及有人分得 4 张 A 的概率？

解： 令 A={有人手里有 13 张黑桃}、B={有人手里有 4 张 A}，