高等学校理工类课程学习辅导丛书

概率论与数理统计学习指导

主　编　戴　琳
副主编　秦叔明

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校理工类课程学习辅导丛书

概率论与数理统计学习指导

Gailülun yu Shuli Tongji Xuexi Zhidao

主　编　戴　琳

副主编　秦叔明

参编人员　戴　琳　付英姿　秦叔明
吴刘仓　徐润林

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书是根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的工科类本科数学基础课程教学基本要求和全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲，并结合了昆明理工大学公共数学课程系列教材《概率论与数理统计》而编写的学习辅导参考书。

本书的主要内容包括概率论及数理统计部分。按照章节顺序，梳理归纳了关键知识点和重点内容；对例题作了详尽的分析和解答，总结出了典型题型的解题思路和解题技巧；搜集了近年来概率论与数理统计考研真题，便于准备考研或基础较好的同学使用。

本书可作为高等学校理工类学生的辅导教材、复习参考书以及考研指导书，也可作为教师的教学参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习指导/戴琳主编.—北京：高等教育出版社，2011.9

ISBN 978-7-04-033516-3

Ⅰ.①概… Ⅱ.①戴… Ⅲ.①概率论-高等学校-教学参考资料 ②数理统计-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 158173 号

策划编辑 张长虹　责任编辑 张长虹　封面设计 张 志　版式设计 马敬茹
插图绘制 黄建英　责任校对 刘春萍　责任印制 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	高等教育出版社印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm × 960mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	12.25	版　　次	2011年9月第1版
字　　数	220千字	印　　次	2011年9月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	17.30元

物 料 号　33516-00

前　　言

“概率论与数理统计”是一门探索随机现象规律性的学科，该学科为其他许多学科提供了必不可少的方法和理论基础，成为数据分析的基本工具。今天概率论与数理统计已被广泛地应用于理、工、农、医、经、管等多个领域，并成为高等学校理工类以及经济管理类专业学生必修的一门重要基础课程，该门课程具有知识点多、概念抽象以及应用性强等特点。为了帮助广大在校学生以及考研同学掌握概率论与数理统计的知识精髓，理解其背后的统计思想，提高其分析问题和解决问题的能力，根据多年的实践教学经验和教学研究，我们编写了这本与教材同步的辅导用书。

本书根据工科类本科数学基础课程教学基本要求和全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲编写而成。每章的主要内容为：

一、基本概念　定理　性质

本书对教材中的相关知识点进行了系统的梳理，归纳和总结了每章的基本概念、定理、性质，有助于读者清晰把握各章的重要知识点，并理顺其知识脉络。

二、基本例题

本书在基本例题部分归纳了每章所涉及的基本例题和典型例题，并通过详细的解答，帮助读者更好地掌握各种题型的解题方法及其延伸，从而达到融会贯通、举一反三的功效。

三、扩展例题

本书有针对性地搜集了部分综合性较强、灵活性较大的例题，并结合历年数学考研大纲，精心挑选了部分有代表性的考研真题，可供学有余力的同学自学或考研同学复习之用。

本书主要内容由戴琳、秦叔明老师完成，徐润林、付英姿、吴刘仓老师参加编写了第六、七、八、九章的部分内容。

本书在编写过程中得到本校教务处的大力支持，高等教育出版社的有关领导和编辑为本书的出版也做了大量的工作，在此表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，加之时间仓促，书中错误在所难免，恳请广大同行及读者批评指正。

编 者

2011年5月

目　　录

第一章　随机事件与概率

一、概念 定理 性质

1. **随机试验**:若试验满足条件

(1) 试验可在相同条件下重复进行;

(2) 试验的结果具有多种可能性;

(3) 试验前不能确切知道会出现哪种结果,只知道所有可能出现的结果,则称试验为随机试验,记为 E.

2. **样本空间**:试验的所有可能结果的集合,用 Ω 来表示.

3. **随机事件**:随机试验 E 的一个可能结果,简称事件,用大写字母 $A,B,C\cdots$表示.

4. 随机事件之间的关系及运算

A 与 B **互斥(互不相容)**$\Leftrightarrow AB=\varnothing$;

A 与 B **互逆(对立)**$\Leftrightarrow AB=\varnothing$ 且 $A\cup B=\Omega$.

互斥必互逆,互逆不一定互斥.

若事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$,且两两互斥,称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 Ω 的一个**完备事件组**.

5. 随机事件满足的运算规律

(1) **结合律**:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,$(AB)C=A(BC)$;

(2) **交换律**:$AB=BA$,$A\cup B=B\cup A$;

(3) **分配律**:$A(B\cup C)=AB\cup AC$,$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

(4) **德摩根律**:$\overline{AB}=\bar{A}\cup\bar{B}$,$\overline{A\cup B}=\bar{A}\bar{B}$.

6. 随机事件的概率

(1) **概率的古典定义**:设随机试验 E 的样本空间 Ω 的样本点个数为有限数 n,且 Ω 中每个样本点出现的可能性相同,若事件 A 中含有 k 个样本点,则 $P(A)=\dfrac{k}{n}$.

(2) **概率的几何定义**:设随机试验 E 的样本空间 Ω 为 $\mathbf{R}^n(n=1,2,3)$中一区域,$A\subset\Omega$,且 Ω 中每个样本点出现的可能性相同,则 $P(A)=\dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$,其中 $\mu(A)$,$\mu(\Omega)$分别为区域 A 和 Ω 的度量.

(3) **概率的公理化定义**:设随机试验 E 的样本空间为 Ω,对任一事件 A 赋予值 $P(A)$,若$P(A)$满足① 非负性:$P(A)\geqslant 0$;② 规范性:$P(\Omega)=1$;③ 可列可加性:若 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$两两互斥,且 $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(A_i)$,则称 $P(A)$ 为 A 的概率.

7. 概率的计算公式

(1) **加法公式**:两个事件加法公式 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$,

当 A,B 独立时,有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$;

当 A,B 互斥时,有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

三个事件加法公式

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

(2) **减法公式**:$P(A-B)=P(A)-P(AB)$,即 $P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)$.

当 $A\supset B$ 时,有 $P(A-B)=P(A)-P(B)$.

(3) **对立事件概率公式**:$P(\bar{A})=1-P(A)$.

(4) **条件概率**:设 A,B 为两随机事件,且 $P(A)>0$,称 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$为事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率.

(5) **乘法公式**:$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)\quad (P(A)>0,P(B)>0)$.

$$P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB)\quad (P(AB)>0).$$

(6) **全概率公式**:设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为完备事件组,且 $P(A_i)\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$,$B$ 为任一事件,则 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+\cdots+P(A_n)P(B|A_n)$.

(7) **贝叶斯公式(逆概公式)**:设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为完备事件组,且 $P(A_i)\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$,$B$ 为任一事件,$P(B)>0$,则

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n}P(A_k)P(B|A_k)}=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

8. **独立性**:若事件 A,B 满足 $P(AB)=P(A)P(B)$,则称事件 A,B 独立.

若事件 A,B 独立,且 $P(B)>0$,则 $P(A|B)=P(A)$.

若事件 A,B 独立,则有(1) $A,\bar{B}$ 独立;(2) $\bar{A},B$ 独立;(3) $\bar{A},\bar{B}$ 独立.

9. **n 重伯努利试验**:若随机试验只有两种可能结果:事件 A 发生或不发生,则称这样的试验为伯努利试验;将伯努利试验在相同条件下独立重复进行 n 次,则称试验为 **n 重伯努利试验**.

10. **二项概率公式**:设随机试验 E 下事件 A 发生的概率为 p,则在 n 重伯努

利试验中,事件 A 恰好发生 k 次($k=0,1,2,\cdots,n$)的概率为

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,2,\cdots,n.$$

二、基本例题

1. 填空题

例 1　掷一颗骰子,观察出现的点数.写出该随机试验的样本空间 $\Omega=$ $\underline{\{1,2,3,4,5,6\}}$.

例 2　生产产品直到有 10 件正品为止,记录生产产品的总件数.写出该随机试验的样本空间 $\Omega=$ $\underline{\{10,11,\cdots,\}}$.

例 3　设 A,B,C 为三个事件,则 A,B,C 都发生应表示为 $\underline{ABC}$.

例 4　设 A,B,C 为三个事件,则 A 发生,B 与 C 不发生应表示为 $\underline{A\bar{B}\bar{C}}$.

例 5　(1) 设 A,B,C 为三个事件,则 A,B,C 至多两个发生应表示为 $\underline{\overline{ABC}}$.

(2) 设 A,B,C 为三事件,试用 A,B,C 的运算表示事件 A,B,C 中至少有两个发生: $\underline{AB\cup AC\cup BC}$ 或 $\underline{AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup \bar{A}BC\cup ABC}$.

例 6　设 A 表示"甲种产品畅销",B 表示"乙种产品滞销".则"甲种产品畅销或乙种产品滞销"用 A,B 表示为 $\underline{A\cup B}$.

例 7　设 A,B 为两个事件,化简下列事件:

(1) $(\bar{A}\cup B)(A\cup B)=\underline{B}$;

(2) $(\bar{A}\cup\bar{B})(A\cup\bar{B})=\underline{\bar{B}}$.

例 8　设 $f_n(A)$ 与 $P(A)$ 为事件 A 发生的频率与概率,则当 $n\to\infty$ 时,有 $\underline{f_n(A)\xrightarrow{P}P(A)}$.

例 9　设 A,B 为两个事件,且 $P(A)=0.6,P(B)=0.7$. 则 $P(AB)$ 的最大值为 $\underline{0.6}$.

(提示:$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.6+0.7-P(A\cup B)$,当 $A\subset B$ 时,$P(A\cup B)$ 最小,从而 $P(AB)$ 最大.)

例 10　设 A,B 为两个事件,$P(A)=0.9,P(AB)=0.36$. 则 $P(A\bar{B})=\underline{0.54}$.

(提示:$P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=0.9-0.36=0.54$.)

例 11　设 A,B 为两个事件,$P(B)=0.7,P(\bar{A}B)=0.3$. 则 $P(\bar{A}\cup\bar{B})=\underline{0.6}$.

(提示:$P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-[P(B)-P(\bar{A}B)]=1-(0.7-0.3)=0.6$.)

例 12　某市有 50% 住户订日报,有 65% 的住户订晚报,有 85% 的住户至少订这两种报纸中的一种.则同时订这两种报纸的住户的百分比为 $\underline{30\%}$.

例 13　已知 A,B 两个事件满足条件 $P(AB)=P(\underline{\overline{A\cup B}})$,且 $P(A)=p$. 则 $P(B)=\underline{1-p}$.

(提示:$P(AB)=P(\overline{A\cup B})\Rightarrow P(A\cup B)=1-P(\overline{A\cup B})=1-P(AB)$,$P(A\cup$

$B)=P(A)+P(B)-P(AB)$,所以 $P(A)+P(B)=1$,$P(B)=1-P(A)=1-p$.)

例 14　在 11 张卡片上分别写上 probability 这 11 个字母,从中任意连抽 7 张,其排列结果为 ability 的概率为 $\underline{\dfrac{4}{P_{11}^{7}}}$.

(提示:11 个字母任取 7 个排成一列,共有排列法 P_{11}^{7} 种,所求事件的排列法共有 $1\times2\times2\times1\times1\times1\times1$ 种,故所求概率为 $p=\dfrac{4}{P_{11}^{7}}$.)

例 15　袋中有白球 5 只,黑球 6 只.陆续取出 3 球.则顺序为黑白黑的概率为 $\underline{\dfrac{5}{33}}$.

(提示:11 球任取 3 球共有 $11\times10\times9$ 种取法,所求事件的排法有 $C_6^1C_5^1C_5^1$ 种,故所求概率为 $p=\dfrac{C_6^1C_5^1C_5^1}{11\times10\times9}=\dfrac{5}{33}$.)

例 16　设 $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\dfrac{1}{3}$,$A_1,A_2,A_3$ 相互独立.则 A_1,A_2,A_3 恰好出现一个的概率为 $\underline{\dfrac{4}{9}}$.

(提示:$P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3)=\dfrac{4}{9}$.)

例 17　设一批产品中一、二、三等品各占 60%,30%,10%,从中随机地取出一件,结果不是三等品,则取到一等品的概率为 $\underline{\dfrac{2}{3}}$.

(提示:以 A_1,A_2,A_3 分别表示任取一件产品为一、二、三等品,则 $P(A_1\mid\bar{A}_3)=\dfrac{P(\bar{A}_3A_1)}{P(\bar{A}_3)}=\dfrac{0.6}{0.9}=\dfrac{2}{3}$.)

例 18　设 10 件产品中有 4 件不合格,从中任取两件,已知两件中有一件是不合格品,则另一件也是不合格品的概率为 $\underline{\dfrac{1}{5}}$.

(提示:$A_1=\{$两件均不合格$\}$,$A_2=\{$一件合格$\}$,两件中有一件是不合格品即为 $A_1\cup A_2$;两件中有一件是不合格品,另一件也是不合格品即 A_1,故 $P=P(A_1\mid A_1\cup A_2)=\dfrac{P(A_1(A_1\cup A_2))}{P(A_1\cup A_2)}=\dfrac{C_4^2}{C_4^2+C_4^1C_6^1}=\dfrac{6}{6+4\times6}=\dfrac{1}{5}$.)

例 19　两人独立地破译一密码,已知各人能破译密码的概率为$\dfrac{1}{2}$.则两人中至少有一人能破译密码的概率为 $\underline{\dfrac{3}{4}}$.

例 20　一批产品共有 10 件正品和 2 件次品，任取两次，每次取一件，取后不放回. 则第 2 次取出的是次品的概率为 $\underline{\frac{1}{6}}$.

（提示：A,B 分别表示第一次、第二次取得的是次品，则

$$P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\bar{A})P(B\mid \bar{A})$$
$$=\frac{2}{12}\times\frac{1}{11}+\frac{10}{12}\times\frac{2}{11}=\frac{22}{132}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}.）$$

例 21　设工厂甲和工厂乙生产产品的次品率分别为 1% 和 2%，现从由甲和乙的产品分别占 60% 和 40% 的一批产品中随机地抽取一件. 若取到的产品发现是次品，则该次品是工厂甲生产的概率为 $\underline{\frac{3}{7}}$.

（提示：A_1,A_2 分别表示所取产品是工厂甲、乙生产，B 表示取到次品，则 $P(B)=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)=0.6\times0.01+0.4\times0.02=0.014$，$P(A_1\mid B)=\dfrac{0.006}{0.014}=\dfrac{6}{14}=\dfrac{3}{7}$.）

2. 计算题

例 1　电话号码由 5 个数字组成，每个数字可能是从 0 到 9 这 10 个数字中的任一个. 求电话号码由 5 个不同数字组成的概率.

解　从 10 个数中任意抽取 5 个数（含重复）的基本事件总数为 $n=10^5$ 种，所求事件的基本事件数为 $10\times9\times8\times7\times6$ 种，故所求概率为

$$p=\frac{10\times9\times8\times7\times6}{10^5}=\frac{3\ 024}{10^4}=0.302\ 4.$$

例 2　n 张奖券中有 m 张有奖的，k 个人购买，每人一张. 求其中至少有一人中奖的概率.

解法一　试验可模拟为 m 个红球，$n-m$ 个白球，编上号，从中任取 k 个构成一组，则

基本事件总数为 C_n^k，而全为白球的取法有 C_{n-m}^k种，故所求概率为 $1-\dfrac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$.

解法二　令 $A_i=\{第\ i\ 人中奖\}, i=1,2,\cdots,k$. $B=\{无一人中奖\}$，则 $B=\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_n$，注意到 $\bar{A}_1,\bar{A}_2,\cdots,\bar{A}_n$ 不独立也不互斥. 由乘法公式

$$P(B)=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2\mid\bar{A}_2)P(\bar{A}_3\mid\bar{A}_1\bar{A}_2)\cdots P(\bar{A}_k\mid\bar{A}_1\cdots\bar{A}_{k-1})$$
$$=\frac{n-m}{n}\cdot\frac{n-m-1}{n-1}\cdot\frac{n-m-2}{n-2}\cdots\frac{n-m-k+1}{n-k+1}\xlongequal{同除\ k!}\frac{C_{n-m}^k}{C_n^k},$$

故所求概率为 $1-\dfrac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$.

例 3　20 个运动队，任意分成甲乙两组（每组 10 队）进行比赛，已知其中有

两个队是一级队. 求这两个一级队

(1) 被分在不同组(记为事件 A)的概率;(2) 被分在同一组(记为事件 B)的概率.

解 从 20 个队中抽取 10 个队的基本事件总数为 $n = C_{20}^{10}$,事件 A 包含的基本事件数为 $C_2^1C_{18}^9$,事件 B 包含的基本事件数为 $2C_2^2C_{18}^8$,所以

(1) $P(A) = \frac{C_2^1C_{18}^9}{C_{20}^{10}} = 0.526$;

(2) $P(B) = \frac{2C_2^2C_{18}^8}{C_{20}^{10}} = 0.474$.

或因 $B = \bar{A}$,故 $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - P(A) \approx 1 - 0.526 = 0.474$.

例 4 从一批由 45 件正品,5 件次品组成的产品中任取 3 件,求其中恰有一件次品的概率.

解 从 50 件产品中任取 3 件的基本事件总数为 $n = C_{50}^3$,所求事件包含的基本事件数为 $C_5^1C_{45}^2$,所以 $p = \frac{C_5^1C_{45}^2}{C_{50}^3} \approx 0.253$.

例 5 设袋中有 a 个黑球,b 个白球,现随机地从中取出一球. 分别就 (1) 抽取后放回;(2) 抽取后不放回,求出第 $k(1 \leqslant k \leqslant a+b)$ 次取出的一个球是黑球的概率.

解 (1) $p = \frac{a}{a+b}$;

(2)
$$p = \frac{aP_{a+b-1}^{k-1}}{P_{a+b}^k} = \frac{a(a+b-1)\cdots[(a+b-1)-(k-1)+1]}{(a+b)(a+b-1)\cdots(a+b-k+1)} = \frac{a}{a+b}.$$

例 6 某人有 5 把钥匙,其中有两把能打开房门,但他忘了是哪两把可以开门,只好逐次试开. 问此人在 3 次内能打开房门(记为事件 A)的概率是多少?

解 5 把钥匙不放回地连接抽取 3 次,每次抽取 1 把的基本事件总数为 $n = C_5^1C_4^1C_3^1 = 60$,所求事件 A 的对立事件 $\bar{A} = \{3$ 次内没有打开房门$\}$包含的基本事件数为 $C_3^1C_2^1C_1^1 = 6$,于是

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{6}{60} = 0.9.$$

例 7 房间中有 4 人,问至少 1 个人的生日是 1 月份的概率是多少? 至少 2 个人的生日是同一个月的概率是多少?

解 随机试验中 4 个人都等可能地以 12 个月中的某月为其生日月份,因此,样本空间的基本事件总数为 $n = 12^4$,事件 $A = \{$至少 1 人的生日在 1 月份$\}$

的对立事件 $\bar{A}$ 包含 11^4 个基本事件，事件 $B=\{$至少 2 人生日是同一个月$\}$，其对立事件 $\bar{B}$ 包含基本事件数为 $12\times11\times10\times9$ 个.

(1) $P(A)=1-P(\bar{A})=1-\dfrac{11^4}{12^4}=0.293\ 9$;

(2) $P(B)=1-P(\bar{B})=1-\dfrac{12\times11\times10\times9}{12^4}\approx0.427\ 1$.

例 8　在中国象棋的棋盘上任意地放上一只红“车”及一只黑“车”. 求它们正好可以相互吃掉的概率.

解　棋盘上共有 $10\times9=90$ 个棋位，在棋盘上任意地放上 2 个棋子的基本事件总数为 $n=\mathrm{P}_{90}^2$，一只红“车”及一只黑“车”正好可以相互吃掉这一事件指它们在同一直线上，其包含的基本事件数为 $10\times\mathrm{P}_9^2+9\times\mathrm{P}_{10}^2$，所求概率为 $p=\dfrac{10\times\mathrm{P}_9^2+9\times\mathrm{P}_{10}^2}{\mathrm{P}_{90}^2}=\dfrac{17}{89}=0.191$.

例 9　在$[-1,1]$上任取一点，求该点到原点的距离不超过$\dfrac{1}{5}$的概率.

解　如图 1－1 所示，此为几何概率问题. 样本空间 $\Omega=[-1,1]$，所求事件占有区间$\left[-\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{5}\right]$，从而所求概率为 $p=\dfrac{2\cdot\frac{1}{5}}{2}=\dfrac{1}{5}$.

例 10　在长度为 a 的线段内任取两点，将其分成三段，求它们可以构成三角形的概率.

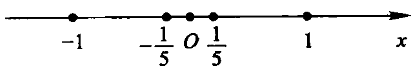

图 1－1

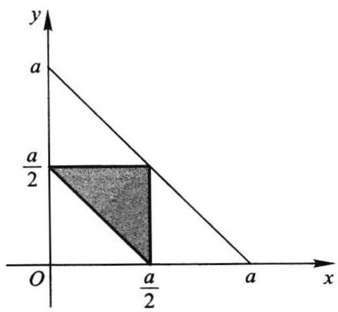

图 1－2

解　如图 1－2 所示，样本空间满足：$0<x<a$，$0<y<a$，且 $0<x+y<a$，与图中大三角形中的点一一对应. 又事件满足

$$\begin{cases} x+y>a-x-y, \\ x-y<a-x-y, \\ y-x<a-x-y, \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} x+y>\dfrac{a}{2}, \\ x<\dfrac{a}{2}, \\ y<\dfrac{a}{2}. \end{cases}$$

所求概率为图中阴影部分的面积与大三角形面积之比，即 $p=\dfrac{1}{4}$.

例 11 已知某设备由两部分组成，总长度为两部件长度之和，每个部件在加工时长度误差出现在$(-1,1)$区间内是等可能的，设两部件加工过程独立，问此设备总长度误差仍在$(-1,1)$内的概率是多少？

解 如图 1-3 所示，以 x,y 分别表示两部件误差，则两部件长度误差情况与图中大正方形中的点一一对应，所求事件满足 $|x+y|<1$，即为图中阴影部分. 故所求概率为图中阴影部分的面积与矩形面积之比，即 $p=\dfrac{3}{4}$.

例 12 某码头只能容纳一只船，现已知某日将独立到来两只船，且在 24 h 内各时刻到来的可能性相等，如果它们需要停靠的时间分别为 3 h 及 4 h，试求一船要在江中等待的概率.

解 如图 1-4 所示，设 x,y 分别表示此两船到达码头的时间，则 $0\leqslant x\leqslant 24$，$0\leqslant y\leqslant 24$. 所求事件满足：$x-y\leqslant 3$，$y-x\leqslant 4$，即为图中阴影部分，故所求概率为图中阴影部分的面积与正方形面积之比，故

$$p=\frac{24^2-\left(\dfrac{1}{2}\times 20^2+\dfrac{1}{2}\times 21^2\right)}{24^2}=\frac{311}{1\ 152}=0.27.$$

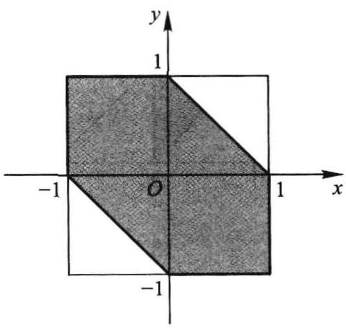

图 1-3

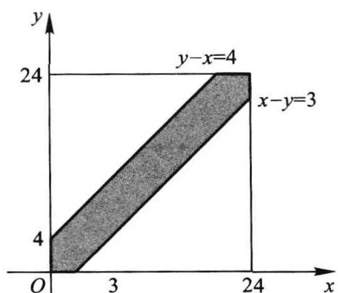

图 1-4

例 13 某城市发行报纸 A,B,C，订阅 A 的有 45%，订阅 B 的有 35%，订阅 C 的有 30%，同时订阅 A,B 的有 10%，同时订阅 A,C 的有 8%，同时订阅 B,C

的有 5%,同时订阅 A,B,C 的有 3%.试求下列事件的概率.

(1) 只订 A 报的;(2) 只订 A 报及 B 报的;(3) 至少订阅一种报纸的;(4) 不订阅任何报纸的.

解 (1) $P(A\bar{B}\bar{C})=P(A-B-C)=P(A-(B\cup C))=P(A-A(B\cup C))$

$$=P(A)-P(AB)-P(AC)+P(ABC)$$

$$=0.45-0.1-0.08+0.03=0.30;$$

(2) $P(AB\bar{C})=P(AB-C)=P(AB-ABC)=P(AB)-P(ABC)$

$$=0.1-0.03=0.07;$$

(3) $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)$

$$-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

$$=0.45+0.35+0.30-0.10-0.08-0.05+0.03=0.90;$$

(4) $P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=1-P(A\cup B\cup C)=1-0.90=0.10.$

例 14 设 A,B 为两个事件,$P(A)=0.5,P(B)=0.7$. 问

(1) 在什么条件下,$P(AB)$取到最大值?(2) 在什么条件下,$P(AB)$取到最小值?

解 (1) $P(AB)\leqslant\min\{P(A),P(B)\}=0.5,P(A)<P(B)$,只要 $A\subset B$,有 $P(AB)=P(A)=0.5$ 达到最大;

(2) $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$,只要 $P(A\cup B)=1$,即可使 $P(AB)=0.5+0.7-1=0.2$ 达到最小.

例 15 设 $P(A)=0.4,P(A\cup B)=0.7$.

(1) 若 A,B 互不相容,求 $P(B)$;(2) 若 A,B 相互独立,求 $P(B)$.

解 (1) 若 A,B 互不相容,则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$,于是

$$P(B)=P(A\cup B)-P(A)=0.3;$$

(2) 若 A 与 B 相互独立,则

$$P(B)=P(A\cup B)-P(A)+P(A)\cdot P(B)=0.7-0.4+0.4P(B),$$

所以 $P(B)=0.5$.

例 16 飞机投炸弹炸敌方弹药仓库,已知投一弹命中 1,2,3 号仓库的概率分别为 0.01,0.02,0.03. 求飞机投一弹没有命中仓库的概率.

解 设 $A=\{$命中仓库$\}$,则 $\bar{A}=\{$没有命中仓库$\}$,又设 $A_i=\{$命中第 i 号仓库$\}(i=1,2,3)$. 则 $P(A_1)=0.01,P(A_2)=0.02,P(A_3)=0.03$,而 $A=A_1\cup A_2\cup A_3$(其中 A_1,A_2,A_3 两两互不相容). 故 $P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=0.01+0.02+0.03=0.06$,所以 $P(\bar{A})=1-P(A)=1-0.06=0.94$,即飞机投一弹没有命中仓库的概率为 0.94.

例 17 一批零件共 100 个,次品率 10%,连续两次从这批零件中任取一个零件,第一次取出的零件不再放回,求第二次才取得正品的概率.

解 设 $A=\{$第一次取得次品$\}$，$B=\{$第二次取得正品$\}$，则 $AB=\{$第二次才取得正品$\}$，又因为 $P(A)=\frac{10}{100}$，$P(B\mid A)=\frac{90}{99}$. 则 $P(AB)=P(A)P(B\mid A)=\frac{10}{100}\frac{90}{99}=0.090\ 9$.

例 18 设 A,B 为两个事件，设 $P(A)=0.7$，$P(B)=0.6$，$P(B\mid\bar{A})=0.4$. 求 $P(A\cup B)$.

解 $P(\bar{A}B)=P(\bar{A})P(B\mid\bar{A})=0.3\times0.4=0.12$,

$P(AB)=P(B)-P(\bar{A}B)=0.6-0.12=0.48$,

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.6+0.7-0.48=0.82$.

例 19 三人独立地破译一密码，他们能单独译出密码的概率分别为 $\frac{1}{5}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$. 求此密码被译出的概率.

解 以 A,B,C 分别表示第一、二、三人独立地译出密码，D 表示密码被译出，则

$$P(D)=P(A\cup B\cup C)=1-P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C})$$

$$=1-\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{5}.$$

例 20 有三个元件独立地工作，每个元件的可靠性都是 p，将三个元件并联成一个系统. 求并联系统的可靠性.

解 A_i 表示第 i 个元件正常工作 $(i=1,2,3)$，则

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)\overset{\text{独立}}{=\!=\!=}1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)$$

$$=1-(1-p)^3.$$

例 21 求下列系统（如图 1－5 所示）的可靠度，假设元件 i 的可靠度为 p_i，各元件正常工作或失效相互独立.

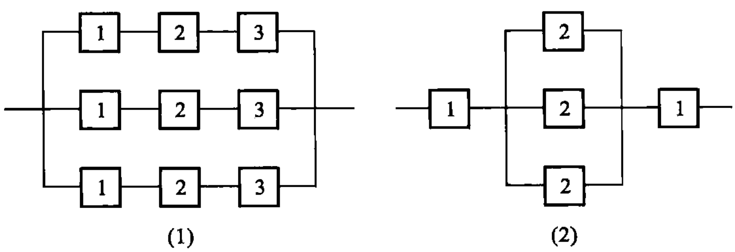

图 1－5

解　(1) 系统由三个子系统并联而成,每个子系统可靠度为 $p_1p_2p_3$,从而所求系统(1)的可靠度为 $1-(1-p_1p_2p_3)^3$;

(2) 系统为一个串并联系统,系统(2)的可靠度为 $p_1^2[1-(1-p_2)^3]$.

例 22　三台机器相互独立地运转,设第一、第二、第三台机器不发生故障的概率依次为 0.9,0.8,0.7. 求这三台机器中至少有一台发生故障的概率.

解　记 $A_i=\{$第 i 台机器未发生故障$\}(i=1,2,3)$,$D=\{$三台机器中至少有一台发生故障$\}$,则 $P(D)=1-P(\bar{D})=1-P(A_1A_2A_3)=1-0.9\times0.8\times0.7=1-0.504=0.496$.

例 23　设某种动物由出生算起活到 20 年以上的概率为 0.8,活到 25 年以上的概率为 0.4. 问现在 20 岁的这种动物,能活到 25 年以上的概率为多少?

解　用 X 表示动物寿命,则

$$P\{X\geqslant25\mid X\geqslant20\}=\frac{P\{X\geqslant20,X\geqslant25\}}{P\{X\geqslant20\}}=\frac{0.4}{0.8}=0.5.$$

例 24　某地区历史上从某年后 30 年内发生特大洪水的概率为 80%,40 年内发生特大洪水的概率为 85%,求已过去了 30 年未发生特大洪水的地区在未来 10 年内发生特大洪水的概率.

解　用 X 表示发生特大洪水的时刻,则

$$P\{30<X<40\mid X\geqslant30\}=\frac{P\{X\geqslant30,30<X<40\}}{P\{X\geqslant30\}}=\frac{0.05}{0.2}=0.25.$$

例 25　若事件 A,B 互不相容,且 $0<P(B)<1$. 试证 $P(A\mid\bar{B})=\dfrac{P(A)}{1-P(B)}$.

证明　由条件概率的定义知 $P(A\mid\bar{B})=\dfrac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=\dfrac{P(A\bar{B})}{1-P(B)}$,由于 A,B 互不相容,所以 $AB=\varnothing$,$A\bar{B}=A$,故 $P(A\mid\bar{B})=\dfrac{P(A)}{1-P(B)}$.

例 26　设 A,B 为两个事件,且 $0<P(A)<1$,$0<P(B)$,$P(B\mid A)=P(B\mid\bar{A})$. 问事件 A,B 是什么关系?

解　由条件 $P(B\mid A)=P(B\mid\bar{A})$,可得

$$\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})}=\frac{P(AB)+P(\bar{A}B)}{P(A)+P(\bar{A})}=P(B),$$

所以 $P(AB)=P(A)P(B)$,故 A,B 相互独立.

例 27　某厂生产的产品中一等品、二等品、三等品各占 20%,65%,15%. 从中任取一产品,如果该产品不是三等品,则它是一等品的概率是多少?

解　设事件 $A=\{$取得一等品$\}$,$B=\{$取得二等品$\}$,$C=\{$取得三等品$\}$. 由条件概率知,所求概率为