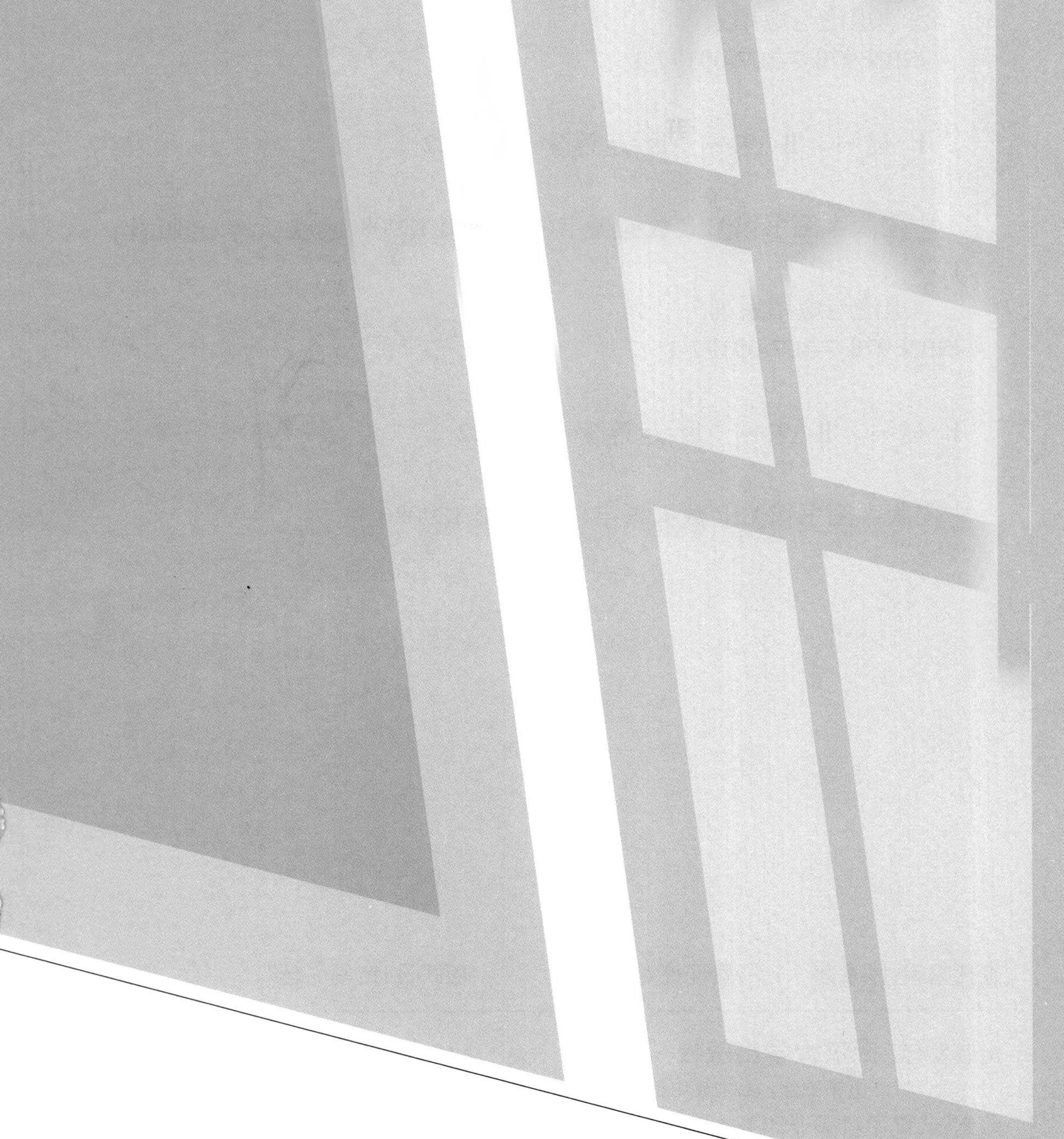
数学理论与应用系列

筹学及其应用（第四版）

朱求长 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社



运筹学及其应用（第四版）

朱求长 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

运筹学及其应用/朱求长编著.—4版.—武汉：武汉大学出版社，2012.1
数学理论与应用系列
ISBN 978-7-307-09177-1

Ⅰ.运…　Ⅱ.朱…　Ⅲ.运筹学　Ⅳ.O22

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第189080号

责任编辑:顾素萍　　责任校对:黄添生　　版式设计:马　佳

出版发行：武汉大学出版社　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件：cbs22@whu.edu.cn　网址：www.wdp.com.cn)
印刷:武汉中科兴业印务有限公司
开本：720×1000　1/16　印张:19.25　字数:344千字　插页:1
版次：1993年8月第1版　1997年12月第2版
2004年9月第3版　2012年1月第4版
2012年1月第4版第1次印刷
ISBN 978-7-307-09177-1/O·459　定价:28.00元

第四版前言

这一版除增加了许多例题外，主要对原书前两章作了较大修改。

在第一章中，关于线性规划问题的标准形，这次改变了过去通常的做法，把标准形不再规定为一种形式，而采用了两种形式，即标准形最大化问题和标准形最小化问题。这样做，当然需要分别制定最大化问题和最小化问题的最优性判别准则，但给后续内容的论述和具体做题带来很大方便。

研究对偶理论的第二章几乎全部重写。前几版中主要是就规范最大化问题进行讨论的，这次则对各种非规范问题的对偶规则、对偶定理、灵敏度分析、影子价格等问题作了详细的论述。

为了使读者能更好地学习本书，由朱希川老师和我还另外编写了《运筹学学习指导及题解》一书，作为本书的配套教材供读者使用。该书已于 2008 年 2 月由武汉大学出版社出版。《运筹学学习指导及题解》和教材《运筹学及其应用》一样，也分为 7 章，每章的内容包含 5 部分，即基本要求、内容说明、新增例题、习题解答和新增习题。

再次感谢武汉大学出版社对本书出版的关心、支持和帮助。

朱求长

于武汉大学

2011 年 9 月

第一版前言

这本书是根据我 1986 年为我校管理学院企业管理等专业编写的一本同名讲义，经过几次修改而成的．其目的是为了满足管理类专业和财经类专业开设运筹学课程的需要．

运筹学是近 50 年来才逐步发展起来的一门新兴科学，最早是由于军事上的需要而产生的．在第二次世界大战前夕，德国的空军已很强大，为了对付德国的空袭，英国防空科学调查委员会主席 H. G. Tizard 组织了一些科学家专门研究如何使用雷达来进行对空作战的问题．科学家们的各种建议构成了一套完整的雷达防空系统，被军方所采用．正因为科学家们的这些工作对作战帮助很大，所以作战研究部主任 A. P. Rowe 称这些工作为“Operational Research”（作战研究，简称为 OR)．到 1942 年，英国的陆、海、空三军都正式建立了 OR 组织，专门研究各种新式武器如何有效地使用的问题．

第二次世界大战结束以后，那些从事作战研究的人员纷纷转入工业生产部门和商业部门．由于经营管理中的许多问题和战争中所碰到的许多问题极为相似，于是，那些 OR 研究人员很快又在经营管理中大显身手，有力促进了英国工业生产的恢复和发展．

美国人称 Operational Research 为 Operations Research，仍简称为 OR. OR 在美国的迅速发展主要还是 20 世纪 50 年代以后的事．由于科学技术的迅猛发展，生产规模越来越大，产品结构越来越复杂，生产的社会化程度也日益提高．要想对这种现代化的大型生产进行科学的组织管理，任何个人都是办不到的，而必须有专门的人员和机构来进行研究．这种情况就促使许多大型企业都建立了 OR 组织．另一方面，由于电子计算机的诞生和不断改进，又为 OR 的实际应用提供了强有力的工具，因为许多大型问题的解决，离开了电子计算机是不可想象的．

OR 作为一门独立的学科在我国传播始于 20 世纪 50 年代中期．开始，有些同志根据西方 20 世纪 50 年代初期对 OR 一般的理解，将 OR 译为运用学．后来，中国学者们认为，这门新兴学科的任务，不单是要研究现有武器

和设备等的运用，而且更要研究未来武器和设备等的运用，以及将来计划（包括国家计划）的制定，故将 OR 翻译为运筹学更好．我国从 1956 年起就开始了对运筹学的研究和应用．1958 年，粮食运输部门在应用运筹学的过程中，总结出一套“图上作业法”．1965 年，许多地方又推广应用了统筹法．今天，运筹学在我国的企业管理、工程技术、运输调度、国民经济计划等方面已得到广泛的应用．

从以上简短介绍中可以看到，运筹学是一门实践性很强、应用性很广的学科．那么，什么是运筹学呢？目前有好几种说法．由于这门学科还很年轻，正在迅速发展之中，所以尚无一致的、确切的定义．其基本含义可以这样表达：运筹学的研究对象是一个系统（如经济系统、作战系统、工作系统等）的组织管理中可以定量化的问题；它采用的主要方法是建立数学模型并求解；它要达到的目标是从各种可供选择的方案中找出一个最好的或满意的方案，以实现系统的某一或某些指标整体最优化（例如质量最好，产量最多，工期最短，利润最大，成本最低，或同时要求若干项指标均达到一定的满意度等）；它的研究成果是为各级管理（领导）人员在作决策时提供科学的依据．因此，简单地说，运筹学所要研究的就是一个系统的组织管理的优化问题，或说它是一门管理优化技术．正因为如此，国外有些人也称运筹学为管理科学（实际上它只是狭义的管理科学）．

当前，我们国家正在进行伟大的社会主义现代化建设，世界各国也都在努力发展自己的经济．经济建设需要投入大量的人力、物力和财力等资源，而任何一个国家的资源总是有限的．因此，如何以最少的资源消耗去取得最大的经济效益，便成为各国政府和人民普遍关心的重大问题．从组织管理方面（而不是技术方面）去研究怎样解决这一问题就是管理学的任务；对其中可以定量化的问题进行研究和解决，就是运筹学的任务．由此可见，运筹学对于我们最有效地利用各种资源，最大限度地提高一个系统的工作效率，实现管理的科学化、现代化，有着重大的意义．

从整个运筹工作的全过程来看，它包括阐述问题、建立模型、求解、检验、修改、实施六个环节．我们主要介绍如何在经济系统（一个工厂或企业，一个地区或一个国家的经济等）中建立管理问题的数学模型以及对数学模型求解的问题．

关于运筹学方面的著作目前国内外已出版了不少．虽然这些书各有所长，但我们在使用中感到有个共同的问题，就是它们都几乎包含了运筹学的所有分支，内容多．而按照我国管理类和财经类专业现行教学计划的安排，本科生只有一个学期（每周 3～4 学时）学习运筹学课程．在这么短的时间

内，若全面介绍该学科各个分支，势必学而不精，故许多学校实际上都只是讲述了其中的部分内容. 鉴于这些考虑，我们编写了这本适合本科生使用的运筹学教材. 内容包括线性规划、整数（线性）规划和网络分析（包括网络规划和网络计划）三个分支. 至于运筹学的其他分支，我们认为，可以另编成书，以适应研究生教学的需要.

为适合管理类和财经类专业的教学要求，本书在编写过程中还特别注意从以下几方面做出努力：

1. 精选题材，学以致用. 本书的主要目的在于帮助读者学会运用定量分析技术来解决实际问题，因此对有些运筹学书籍中的过于抽象的部分及理论性太强的部分，本书中省略或修改了，而对实用中极为重要的方法部分则加强了. 为了使读者了解运筹学的广泛应用和初步掌握建立数学模型的方法，书中列举了大量实例，并专辟一章（第四章）介绍线性规划的应用. 对于每个例题的实际背景都给予了尽可能详细的叙述，以增加读者在有关方面的实际知识.

2. 适当加强理论训练. 考虑到现代管理（尤其是经济管理）对于数学知识的要求越来越高，各种各样的管理优化问题已大量地、迫切地提到了各级管理人员的面前，因此，加强管理工作者的数学知识训练是重要的. 为满足这种需要，本书对优化技术原理部分给出了较系统、完整的阐述. 同时，对需要用到的定理，除极少数外，都尽可能地给出了证明，以使读者不仅知其然，而且知其所以然. 稍为复杂一点的定理证明通常都放在一章或一节之末尾，初学时可以暂时不看.

3. 适合自学. 在整个教学安排中，要求高年级学生更多地进行自学，以更好地培养自己独立学习的能力. 为适应此需要，本书对于每种管理优化技术的思想、原理和方法，都写得较为仔细，而且始终遵循由具体到抽象的认识论原则. 当然，在要求学生自己动手之处，也设置了某些“障碍”.

本书的编写和出版得到了武汉大学管理学院和经管系领导的积极支持，作者在此谨向他们致谢. 这里还要特别感谢武汉大学教务处和武汉大学出版社，正是由于他们的决定性的支持，才使本书得以出版. 教材的编写是一个不断发展、不断完善的过程，欢迎广大读者对本书提出宝贵意见.

编　者

于武汉大学

1993 年 4 月

目　录

第一章 线性规划模型和单纯形法

线性规划是运筹学的一个最基本的分支，它已成为帮助各级管理人员进行决策的一种十分重要的工具. 传统的管理只注重定性分析，已远远不能适应当今社会发展的需要. 现代化管理要求采用定性分析和定量分析相结合的方法，一切管理工作要力求做到定量化、最优化，于是就产生了各种各样的管理优化技术. 在诸多的管理优化技术中，线性规划是目前最常用而又最为成功的一种. 其原因有三：一是应用广泛. 管理工作中的大量优化问题可以用线性规划的模型来表达（参见本章 1.1 节的例题及专门介绍线性规划应用的第四章）. 二是模型较为简单，容易建立，容易学习和掌握. 三是求解方法成熟. 1947 年 G. B. Dantzig 已对一般的线性规划问题建立了解法，即单纯形法. 今天，用单纯形法解线性规划的计算机程序已大量涌现，在计算机上求解此类问题已十分容易.

线性规划在世界上各个工业化国家已经得到了极为广泛的应用，为那些国家的公司、企业节省了成千上万元的资金. 那么它主要用来解决什么样的问题呢？简单地说，它的一种最大量、最普遍的应用就是研究有限资源的合理利用问题，或者说是资源的最优配置问题. 一个组织（如一个企业，一个省，甚至一个国家）要进行许多活动（如要生产多种产品），这些活动往往共同涉及使用某些对该组织来说是稀少的、有限的资源. 因此该组织的管理部门经常面临这样一个问题：如何将这些资源科学地分配给各项活动，以便使整个组织获得最大的效益？资源分配问题有多种多样的具体形式. 为使读者了解线性规划究竟可以用来解决何种管理决策问题，我们在此略举数例：

（1） 某工厂可以同时生产数种产品. 这些产品的生产都要共同使用设备、原料、运力等若干种资源，而这些资源的供应量受到限制. 该厂生产部门的经理面临这样一个问题：应如何制定出最好的生产计划，才能既满足市场需求，又能使本厂获得的利润最高？由于产品的生产是通过资源的转化才得以实现的，所以生产的合理安排问题实际上就是一个资源的最优分配问题.

(2) 某企业现有一笔资金，准备从许多种股票和证券中选择数种进行投资. 该企业财务部门的经理需要研究如何作出最优的投资决策，以便获得最好的经济效益.

(3) 某公司在许多地方设有仓库，以便能及时满足用户的需要. 现有若干家商场业务员打电话来，要求该公司为他们送去某些商品. 公司销售部门的经理需要确定哪个仓库应发多少货给哪家商场，以便使公司支付的总运费最少(详见例 1.1-2).

(4) 某公司计划来年新建 4 座厂房. 他们决定采用招标投标办法选择建厂单位. 现有 6 个建筑队来投标. 该公司需要确定应将哪座厂房分配给哪个建筑队去承建，才能使公司付出的总的建厂费用最少.

其他可用线性规划解决的问题还很多. 读者学完本书后可举一反三. 在第四章中，我们还将专门讲述一些有关的应用.

单纯形法是在计算机上求解大型线性规划问题的一种有效而且可靠的方法，在理论上是一个重要成果，但它不是多项式算法. 1979 年，П. Т. Хатцян 提出了求解 LP 问题（线性规划问题）的多项式算法（称为椭球算法）. 他证明了 LP 问题是存在多项式算法的. 但据计算机上的试验结果看，其迭代次数比单纯形法要多，故实用价值并不大. 其后，1984 年 Narendra Karmarkar 又提出了一种新算法. 相对于单纯形法来说，这种新算法的根本作用何在，尚待进一步检验.

总之，单纯形法仍是我们求解 LP 问题的基本工具，用它来进行优化后分析也非常有效.

下面我们首先在 1.1 节引入几个例子，来说明什么是 LP 模型及有关的基本概念，然后在 1.2 节中叙述求解 LP 问题的基本原理. 其中部分定理的证明对初学者有一定难度，故放在本章最后一节，即 1.7 节. 基本原理只是给求解 LP 问题指明了道路，提供了理论依据，但并不便直接用来求解具体的 LP 问题. 为此，需要专门研究求解 LP 问题的具体方法. 这种方法已经产生出来，即单纯形法. 为使读者易于学习和掌握，我们分三节来介绍此方法. 首先在 1.3 节介绍单纯形法的基本工具 —— 单纯形表，然后在 1.4 节和 1.5 节分别讨论如何用单纯形法来求解最大化问题和最小化问题. 在单纯形法的推导中，我们是以已知一个 LP 问题的一个可行基为前提的，在一般情况下，如何寻找第一个可行基呢? 解决这一问题便是 1.6 节的任务. 在 1.7 节中讨论了应用单纯形法的几个重要特例之后，接着在 1.8 节中介绍了效率有所提高的改进单纯形法.

1.1 什么是线性规划

1.1.1 线性规划的简单例子和模型

线性规划是数学规划问题中的一种，以后我们还会看到所谓的整数规划、非线性规划等. 这里的规划(programming) 是指计划的意思. 在规划前面冠以"线性" 二字，则是因为这类规划问题的数学模型是线性的数学表达式.

一个实际问题的数学模型，是依据客观规律，对该问题中我们所关心的那些量进行科学的分析后所得出的反映这些量之间本质联系的数学关系式. 但一般说来，我们在工业、农业、交通运输、国防等各方面所遇到的实际问题是很复杂的，它们涉及的因素很多，要想建立包罗各种因素的数学模型，不仅不可能 (因有些数量关系无法弄清楚)，也没有必要. 一个可行的办法是择其主要者，加以讨论之. 虽然一般说来，模型粗一点就不太精确，而模型细一点，对实际事物的描述要准确一些，但后者带来的问题是：或者在理论上难以处理，或者在计算时工作量太大，耗费昂贵. 所以，应根据实际问题的具体情况，抓住主要矛盾，建立既能保证精确度要求，又尽量简单的数学模型.

实际的线性规划问题一般都很复杂，为了便于读者掌握建立线性规划模型的方法，我们在这里所选的例子都经过了较大的简化. 只要弄懂了这些简单的模型，今后遇到较为复杂的问题也就能触类旁通、举一反三了.

在下面例 1.1-1 中，我们较为详细地说明了运筹工作者在建立数学模型前必须做的一些工作，以及建立线性规划模型的基本步骤. 而在以后的各个例题中，我们就只专门研究如何建立数学模型了. 通过这些例题，读者将会逐步认识到线性规划模型的一般特征.

例 1.1-1 光华食品厂主要生产葱油饼干 (简记为 Ⅰ 型饼干) 和苏打饼干 (简记为 Ⅱ 型饼干). 根据销售部门提供的信息可知，目前这两种饼干在市场上都很畅销，该厂能生产多少，市场就能卖出多少. 但从生产部门得知，有三种关键设备即搅拌机、成型机、烘箱的生产能力，限制了该厂的饼干生产. 因为两种饼干的生产都要共用这三种设备，所以每种饼干究竟应该生产多少，才能充分利用现有设备资源，使该厂获得最好的经济效益，这是一个很值得认真研究的重要问题. 工厂领导把解决这一问题的任务交给了该厂的

OR 小组（运筹学小组）.

解 OR 小组的第一项工作是阐述问题. 经过和工厂领导及有关部门领导讨论，他们明确了要解决的问题是确定每种饼干每天的产量（以吨为单位），在搅拌机、成型机、烘箱的生产能力允许的条件下，能使工厂获得最大的利润. OR 小组认识到这是一个产品的最优组合问题.

OR 小组的第二项工作是根据要解决的问题收集有关的数据：

(1) 从生产部门、技术部门了解每种设备每天所能提供的工时数；

(2) 从技术部门了解每种饼干生产 1 吨需要每种设备工作的工时数；

(3) 从销售、财务等部门了解每种饼干销售 1 吨所能获得的利润.

所有这些数据都汇集在表 1.1 中. 表中各数据的意义是很明显的. 例如，搅拌机一行中的三个数表示搅拌机为了生产 1 吨 Ⅰ 型饼干和 Ⅱ 型饼干分别需要工作 3 小时和 5 小时，而搅拌机每天所能提供的工作时间为 15 小时.

表 1.1

资源设备 \ 单位时耗/(小时/吨) \ 产品	Ⅰ	Ⅱ	每天现有工时
搅拌机	3	5	15
成型机	2	1	5
烘　箱	2	2	11
利润/(百元/吨)	5	4	

通常，一个企业在自身资源许可的情况下，所能采用的产品组合方案是多种多样的（有时甚至是无穷多个）. 要从这许许多多的可行方案中找出最优方案，是一件非常困难的工作，必须用现代的科学方法才能解决.

OR 小组决定采用建立数学模型的方法来解决这一产品的最优组合问题. 这就是 OR 小组的第三项工作，即建立数学模型.

建立模型的第一步就是定义决策变量. 决策变量要能完全描述出所要做出的决策，它是根据具体的决策问题确定的. 本例中光华食品厂要决策的具体问题是，每天应该生产多少 Ⅰ 型饼干和多少 Ⅱ 型饼干. 于是设

x_1 = Ⅰ 型饼干每天的生产量，以吨为单位；

x_2 = Ⅱ 型饼干每天的生产量，以吨为单位.

第二步是选取目标函数. 光华食品厂希望通过合理安排两种饼干的日产量，以获得最多的利润. 所以使利润最大化就是该厂的目标. 为此，设

z = 每天生产 Ⅰ 型饼干 x_1 吨和 Ⅱ 型饼干 x_2 吨所能创造的利润，以百元

为单位.

OR 小组分析了该厂的情况后认为，对每种饼干而言，不论其原有产量为多少，再增加或减少产量，都不会产生大的附加成本，故利润大体上与产量成正比. 因此，根据表 1.1 最下面一行的数据可知，

$$z = 5x_1 + 4x_2.$$

这里的 z 就叫目标函数，它是决策变量的函数. 我们的目标是选择 x_1 和 x_2 的值，在工厂生产能力许可的条件下，使 z 达到最大值.

当把收入或利润作为问题的目标时，常要求使目标函数最大化；而当把成本或费用作为问题的目标时，常要求使目标函数最小化.

建立模型的第三步是确定约束条件. 从上述目标函数 z 的表达式可知，当 x_1, x_2 的数值越来越大时，z 的值也越来越大. 但是，x_1, x_2 的数值并不能任意地大，它们的取值受到一定的限制，这些限制条件就称为约束条件.

由表 1.1 知，Ⅰ 型饼干每生产 1 吨，需要搅拌机工作 3 小时，若生产 x_1 吨，则需要它工作 $3x_1$ 小时. 同样可知，生产 Ⅱ 型饼干 x_2 吨需要搅拌机工作 $5x_2$ 小时. 而每天搅拌机所能提供的总工作时间只有 15 小时，故有不等式

$$3x_1 + 5x_2 \leqslant 15.$$

类似分析成型机和烘箱的工时消耗和可用情况，又可得

$$2x_1 + x_2 \leqslant 5$$

和

$$2x_1 + 2x_2 \leqslant 11$$

两个不等式. 以上三个不等式就是根据三种设备每天所能提供的工时数得出的三个约束条件.

另外，根据问题的实际意义可知，x_1, x_2 不能为负数.

现在我们完整地写出这一问题的数学模型：求变量 x_1, x_2 的值，要求它们满足条件：

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &\leqslant 15, \\ 2x_1 + \ \ x_2 &\leqslant 5, \\ 2x_1 + 2x_2 &\leqslant 11, \\ x_1, x_2 &\geqslant 0, \end{aligned}$$

并使 $z = 5x_1 + 4x_2$ 达到最大值.

今后，为书写方便，将上述模型记为

$$\max \quad z = 5x_1 + 4x_2, \qquad \text{（目标函数）} \qquad (1.1)$$

$$\text{s. t.} \quad 3x_1 + 5x_2 \leqslant 15, \qquad \text{（搅拌机工时约束条件）} \qquad (1.2)$$

$$2x_1 + \ \ x_2 \leqslant 5, \qquad \text{（成型机工时约束条件）} \qquad (1.3)$$

$$2x_1 + 2x_2 \leqslant 11, \quad \text{（烘箱工时约束条件）} \tag{1.4}$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0, \quad \text{（变量的符号限制条件）} \tag{1.5}$$

其中 max 是 maximize 的省写，s. t. 是 subject to（受约束于）的省写.

下面在书写模型时，我们只注明各种约束的实际意义.

例 1. 1-2 现在我们假设光华食品厂的经营情况发生了一些变化，Ⅰ型饼干的利润虽然较高，但每天的销售量不超过 2 吨. 为了占领市场，该厂的经理提出，不管是Ⅰ型饼干还是Ⅱ型饼干，每天必须生产 3 吨饼干投放市场. 其余的情况与例 1. 1-1 相同. 试为该厂建立一个实现利润最大化的线性规划模型.

解 为了得到这个新问题的数学模型，只需在例 1. 1-1 中(1. 4) 下面再加上两式：

$$x_1 \qquad \leqslant 2,$$

$$x_1 + x_2 = 3.$$

例 1. 1-3 东风电视机公司接到上海一家商场(记为 B_1)、青岛一家商场（记为 B_2）和西安一家商场(记为 B_3）订单各一份，要求下月给各商场供应一些电视机(某种规格型号的，下同). 三家商场 B_1，B_2 和 B_3 对电视机的需求量分别为 100 台、80 台和 90 台. 该公司决定，由它设在北京和武汉的两个仓库 A_1 和 A_2 来供应上述各家商场的电视机. 预计下月 A_1 和 A_2 可供应的电视机数量分别为 200 台和 150 台. 又已知每个仓库运送 1 台电视机到每家商场的运费如表 1. 2 所示. 现问该公司应如何调运电视机(每个仓库向每个商场运送多少台电视机)，才能既满足各商场的需要，又能使总的运费最少?

表 1. 2

	B_1	B_2	B_3
A_1	15	21	18
A_2	20	25	16

解 此例中提出的经营管理问题是，如何合理组织调运，才能使总的运费最少. 具体的决策问题是，每个仓库应该调给每个商场多少台电视机.

设 x_{11}，x_{12} 和 x_{13} 分别表示从仓库 A_1 调给三家商场 B_1，B_2 和 B_3 的电机机数量，以台为单位，x_{21}，x_{22} 和 x_{23} 分别表示从仓库 A_2 调给三家商场 B_1，B_2 和 B_3 的电视机台数. 这些 x_{ij} 称为调运量，简称运量. 在实际问题中，运费与运量的关系往往比较复杂，为简单起见，在运输问题中我们总假定：

$$运费 = 单价 \times 运量.$$

于是，总的运费为

$$15x_{11}+21x_{12}+18x_{13}+20x_{21}+25x_{22}+16x_{23}.$$

显然，各个 x_{ij} 越小，总的运输费用越少. 但是，这些 x_{ij} 是受到一定限制的. 首先，每个仓库供应给各家商场的电视机数量不能超过它自己的拥有量. 比如仓库 A_1，它供应给三家商场 B_1, B_2 和 B_3 的电视机数量分别为 x_{11} 台、x_{12} 台和 x_{13} 台，它自己的拥有量为 200 台. 那么应有

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}\leqslant 200.$$

同样，对仓库 A_2，有

$$x_{21}+x_{22}+x_{23}\leqslant 150.$$

其次，各家商场对电视机的需求应得到满足. 比如对商场 B_1，它需要电视机 100 台. 这些电视机由两个仓库 A_1 和 A_2 负责供应. 因为已设 A_1 供应 x_{11} 台，A_2 供应 x_{21} 台，故应有

$$x_{11}+x_{21}\geqslant 100.$$

同样，为了满足商场 B_2 的需求，应有

$$x_{12}+x_{22}\geqslant 80.$$

对于商场 B_3 也有不等式

$$x_{13}+x_{23}\geqslant 90.$$

最后，所有的调运量(即各个 x_{ij})都不能取负值.

总结以上分析，可得这一运输问题的数学模型如下：(以 z 表示总的运输费用)

$$\begin{aligned}
\min\quad & z=15x_{11}+21x_{12}+18x_{13}+20x_{21}+25x_{22}+16x_{23},\\
\text{s.t.}\quad & x_{11}+x_{12}+x_{13}\leqslant 200, \quad (\text{仓库 } A_1 \text{ 供应约束})\\
& x_{21}+x_{22}+x_{23}\leqslant 150, \quad (\text{仓库 } A_2 \text{ 供应约束})\\
& x_{11}+x_{21}\geqslant 100, \quad (\text{商场 } B_1 \text{ 需求约束})\\
& x_{12}+x_{22}\geqslant 80, \quad (\text{商场 } B_2 \text{ 需求约束})\\
& x_{13}+x_{23}\geqslant 90, \quad (\text{商场 } B_3 \text{ 需求约束})\\
& x_{ij}\geqslant 0 \quad (i=1,2;\ j=1,2,3),
\end{aligned}$$

其中 min 是 minimize 的省写. 严格说来，x_{ij} 还应取整数值，这一点我们暂不考虑.

1.1.2 线性规划问题的一般模型

由以上诸例可见，线性规划问题的数学模型(简称线性规划模型)的一般

形式为

$$
\begin{aligned}
&\max\,(\text{或}\min) \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n, \\
&\text{s.t.}\quad \left.\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n\,(*)\,b_1, \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n\,(*)\,b_2, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n\,(*)\,b_m,
\end{aligned}\right\} \qquad (1.6)
\end{aligned}
$$

某些变量有符号限制，某些变量无符号限制， (1.7)

其中 $a_{ij}, b_i, c_j\,(i = 1,2,\cdots,m;\ j = 1,2,\cdots,n)$ 均为已知实常数，$(*)$ 表示"$\leqslant$"或"$\geqslant$"或"$=$". $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 称为**决策变量**(decision variables)，z 称为**目标函数**(objective function)，(1.6) 和(1.7) 称为**约束条件**(constraints)，(1.6) 中的每一个式子均称为**函数约束**(functional constraint)，(1.7) 则是关于变量的**符号约束**(sign constraints) 或**符号限制**(sign restrictions).

这表明，线性规划模型由三部分构成：

(1) 一组决策变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$. 它们是根据要解决的具体决策问题定义的.

(2) 一个目标函数 z. 我们用它的值来作为衡量所作决策优劣程度的标准. 它是决策变量的线性函数. 在有些问题中我们要求 z 的最大值，而在另一些问题中我们要求 z 的最小值. 前者称为**最大化问题**，后者称为**最小化问题**.

(3) 一组约束条件. 它们确定决策变量的取值范围. 约束条件分为两类. 一类是根据生产、销售、财务等方面的要求得出的一些线性等式或线性不等式. 每个等式或不等式的左边都是决策变量的线性函数，而右边都是一个常数. 这种约束称为**函数约束**. 另一类约束是关于变量符号的约束. 实际问题中对决策变量的符号常有要求. 有些变量只能取非负值，有些变量只允许取非正值，而有些变量既可以取正值，也可以取负值，还可以取 0. 若变量 x_j 只能取非负值，则增加一个符号限制条件 $x_j \geqslant 0$；若变量 x_j 只能取非正值，则增加一个符号限制条件 $x_j \leqslant 0$；若变量 x_j 的取值可正可负，或取 0，则称 x_j 为**符号无限制**(简记为 urs) **变量**. 这些对于变量符号的限制或说明称为**变量的符号约束**，简称为**符号约束**.

在写线性规划问题的约束条件时，我们总是先把函数约束全部列出，最后再写上变量的符号约束. 按此顺序书写，则我们今后说话可以简单一点. 比如说，把"第一个函数约束"就简单地说成"第一个约束". 同样，我们约定，把一个线性规划问题"有 m 个函数约束"简单地说成"有 m 个约束". 总之，当说到一个线性规划问题有多少个约束或是它的第几个约束时，这里的约束指