现代远程教育与继续教育精品教材系列

XIANDAI YUANCHENG JIAOYU YU JIXU JIAOYU JINGPIN JIAOCAI XILIE

高等数学

（下册）

曾令武　吴　满　编著

Gaodengshuxue

华南理工大学出版社

现代远程教育与继续教育精品教材系列

XIANDAI YUANCHENG JIAOYU YU JIXU JIAOYU JINGPIN JIAOCAI XILIE

高等数学

（下册）

曾令武　吴　满　编著

Gaodengshuxue

华南理工大学出版社

·广州·

内 容 提 要

本书是根据最新修订的成人高等教育《高等数学考试大纲》编写的，内容及深广度与大纲完全一致．全书分上、下两册，内容包括一元微积分、常微分方程、空间解析几何、多元函数微积分以及无穷级数．

本书对基础知识的叙述通俗易懂，说理清晰，注重几何直观和应用意识；例题丰富典型，富有启发性，对提高基础运算能力和分析问题、解决问题的能力极有帮助．每章末配有测试题及答案．

本书与《高等数学解题指引与同步练习》配套使用．可作为高等院校工科、经管各类专业的教材和学习参考书．书中有“*”号标记的内容不作统一要求．

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．下册/曾令武，吴满编著．—广州：华南理工大学出版社，2010.5
（现代远程教育与继续教育精品教材系列）
ISBN 978-7-5623-3290-9

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①曾…②吴…　Ⅲ.①高等数学-远距离教育：终生教育-教材
Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 086009 号

总 发 行：华南理工大学出版社（广州五山华南理工大学 17 号楼，邮编 510640）
营销部电话：020-87113487　87110964　87111048（传真）
E-mail: scutc13@scut.edu.cn　　http://www.scutpress.com.cn
总 策 划：范家巧
策划编辑：胡　元
责任编辑：王建洲
技术编辑：杨小丽
印 刷 者：佛山市浩文彩色印刷有限公司
开　　本：787 mm×1092 mm　1/16　**印张**：12.25　**字数**：276 千
版　　次：2010 年 5 月第 1 版　2010 年 5 月第 1 次印刷
印　　数：1～3000 册
定　　价：22.00 元

序

我国正处在高等教育史上改革和发展的一个重要时期，高等教育由传统的精英教育逐步向大众化、普及化教育转变，传统学校教育向终身教育转变，促进了学习型社会的形成. 成人高等教育作为高等教育的重要组成部分，也从过去作为普通高等教育的补充逐步明确为面向成人在职继续教育的重要方式. 因此，随着成人高等教育的模式和主要面向对象的改变，教学内容和方法的改革势在必行.

教材作为教学内容的主要载体，其内容编排和知识点的传授，对于保证甚或提高教学的质量具有十分重要的意义. 该书作为成人高等教育的教材，突出“适用性”的特点，因材施教，在强化基本概念和基础能力的基础上，注重对学习者分析问题、解决问题能力的培养. 内容编排既便于教师教学，也有利于读者自学，充分体现面向成人在职教育的特色.

该书作者吴满、曾令武从教50周年，长期从事高等数学的课程教学和研究工作，在成人教育方面也具有几十年的教学实践经验，编写过多种针对不同类型学生的数学教材，在数学课程教学和研究方面成果颇丰，并多次获得学校和各种机构的表彰与嘉奖. 更为重要的是，两位作者一直以来是最受学生欢迎的主讲教师之一，我们有理由相信，该书也将成为最受任课教师和学生欢迎的教材之一.

值此新书出版之际，专此为序，以示敬意!

华南理工大学继续教育学院

院长 罗敏

2010年2月

目　录

第六章　微分方程

众所周知，寻求变量之间的函数关系是数学研究的一项重要内容，也是解决实际问题的关键．而实际问题往往受本身条件的限制，难以直接建立所需的函数，比较容易得到的是含有待求函数及其导数(或微分)的关系式，这样的关系式就是所谓的微分方程．通过微分方程得出所需函数，就是求解微分方程．

建立微分方程需要几何、力学、物理学等各相关学科的知识，但离不开变化率的概念．求解微分方程要应用不定积分法．前面第二、第四章介绍的知识为我们应用微分方程解决实际问题提供了有力的保障．本章主要介绍几类常用微分方程的求解方法．

第一节　微分方程的基本概念

下面通过两个例子介绍有关微分方程的基本概念，并初步了解应用微分方程解决问题的过程．

例 1　设一条平面曲线通过点(1，2)，且曲线上任一点 $M(x,\ y)$处的切线斜率为 $2x$，求这曲线的方程．

解　设所求的曲线方程为 $y=y(x)$．根据导数的几何意义及题设，可知未知函数应满足

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x \qquad ①$$

又曲线经过点(1，2)，故未知函数还应满足条件：当 $x=1$ 时，$y=2$．

为求出未知函数 $y=y(x)$，将方程①变形为

$$\mathrm{d}y=2x\mathrm{d}x$$

将上式两边积分

$$\int\mathrm{d}y=\int 2x\mathrm{d}x$$

得

$$y=x^2+C \qquad ②$$

其中，C 为任意常数．

把 $x=1$，$y=2$ 代入式②，得

$$2=1^2+C$$

由此得出 $C=1$，并回代到式②中，即得所求的曲线方程为

$$y = x^2 + 1 \tag{③}$$

它是过定点(1，2)的一条抛物线．而式②所表示的是由这条曲线沿 y 轴上、下平移而得到的一族抛物线．这族曲线在横坐标相同的点处，切线的斜率相等（切线相互平行），都等于横坐标的 2 倍．这正是它们的通性．

例 2 设列车在平直线路上以 20 m/s（相当于 72 km/h）的速度行驶，当制动时列车获得的加速度为 $-0.4\ \mathrm{m/s^2}$．问制动后经过多长时间列车才能停住，以及列车在这段时间里所行驶的路程？

解 设列车在制动的一瞬间为 $t=0$，经过 t s 后行驶了 s m 才停住．依据题意，反映制动后列车运动规律的函数 $s=s(t)$ 应满足

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -0.4 \tag{④}$$

此外，列车运动的位置函数还应满足两个条件：

$$\begin{cases} s\Big|_{t=0} = 0 & \text{（初始位置）} \\ \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = 20 & \text{（初始速度）} \end{cases} \tag{⑤}$$

下面求解微分方程④．将方程两边积分，得

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \int(-0.4)\mathrm{d}t = -0.4t + C_1 \tag{⑥}$$

再积分一次，得

$$s = \int(-0.4t + C_1)\mathrm{d}t = -0.2t^2 + C_1 t + C_2 \tag{⑦}$$

其中，C_1 和 C_2 为任意常数．

把条件 $t=0$ 时，$v=20$ 代入式⑥，得 $C_1=20$．

把条件 $t=0$ 时，$s=0$ 代入式⑦，得 $C_2=0$．

再把 C_1，C_2 的值回代到式⑥和式⑦，得

$$v = -0.4t + 20 \tag{⑧}$$

$$s = -0.2t^2 + 20t \tag{⑨}$$

式⑨就是制动后列车的运动方程．

在式⑧中，令 $v=0$，得到列车从开始制动到完全停住所需的时间

$$t = \frac{20}{0.4} = 50\ (\mathrm{s})$$

再把 $t=50$ 代入式⑨，得到列车在制动后所行驶的该段路程为

$$s = -0.2 \times 50^2 + 20 \times 50 = 500\ (\mathrm{m})$$

上面两个例子中，根据实际问题建立起来的未知函数应满足的关系式①和④都含有未知函数的导数(或微分)，它们都是微分方程．

一般地，凡表示未知函数、未知函数的导数(或微分)与自变量之间的关系式的方

程，叫做**微分方程**.

必须指出，微分方程中可以不显现出未知函数或自变量，但方程中必须出现未知函数的导数(或微分)，否则就不成为微分方程.

微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数，称为微分方程的**阶**. 例如，例 1 的方程①是一阶微分方程，例 2 的方程④是二阶微分方程.

如果把某个函数以及它的各阶导数代入一个微分方程，能使方程成为恒等式，则该函数就称为那个微分方程的**解**. 就例 1 而言，函数②和③都是微分方程①的解；就例 2 而言，函数⑦和⑨都是微分方程④的解.

如果微分方程的解中含有任意常数，且任意常数的个数等于该方程的阶数，这样的解称为微分方程的**通解**. 如例 1、例 2 中，式②是方程①的通解，式⑦是方程④的通解.

必须注意，通解中的任意常数是相互独立的. 例如

$$\begin{aligned} y &= C_1\sin 2x + C_2\sin x\cos x \\ &= C_1\sin 2x + \frac{C_2}{2}\sin 2x = \left(C_1 + \frac{C_2}{2}\right)\sin 2x \end{aligned}$$

其中，$C_1+\dfrac{C_2}{2}$可以合并写成一个任意常数 C，故此函数实质只含一个任意常数，而不是两个任意常数.

在微分方程的通解中，按一定的条件(习惯上叫做**初始条件**)确定出任意常数取特定值，从而得到不含任意常数的解，这个解就称为微分方程的**特解**. 如式③是方程①的特解，式⑨是方程④的特解.

通常，一阶方程的初始条件是给出未知函数 $y=y(x)$在点 x_0 处的函数值

$$y\Big|_{x=x_0} = y_0$$

二阶方程的初始条件是给出未知函数 $y=y(x)$在点 x_0 处的函数值及一阶导数值

$$y\Big|_{x=x_0} = y_0,\quad y'\Big|_{x=x_0} = y_1$$

在一个微分方程中，若未知函数 $y(x)$及其各阶导数都是一次幂，则称该方程为**线性**微分方程. 例 1、例 2 中的方程①和④都是非线性微分方程.

例 3 指出下列各微分方程的自变量、未知函数以及方程的阶数，并说明是否为线性方程.

(1) $y' + x(y'')^2 + x^2y = 0$；　　(2) $(\sin t)x' + x\cos t = 2t\sin^2 t$；

(3) $(2x^2+6)\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = 0$.

解 要确定微分方程的阶，关键是找出方程中所含未知函数的最高阶导数的阶数，它就是该微分方程的阶，而不必考虑它的幂次.

(1) 自变量是 x，未知函数是 $y=y(x)$，出现的未知函数的最高阶导数是 y''，所以方程是二阶微分方程. 由于 y''是二次幂，故所给方程不属线性微分方程.

（2）自变量是 t，未知函数是 $x=x(t)$，出现的未知函数的最高阶导数是 x'，并且 x 及 x' 都是一次的，于是该方程为一阶线性微分方程.

（3）方程中 x 与 y 的地位是平等的，若将方程写成

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x^2+6} \quad 或 \quad y'-\frac{1}{2x^2+6}y=0$$

则自变量是 x，它是关于未知函数 $y=y(x)$ 的一阶线性微分方程.

如果把方程写成

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2x^2+6}{y} \quad 或 \quad x'-\frac{2}{y}x^2=\frac{6}{y}$$

则把 y 看做自变量，是关于未知函数 $x=x(y)$ 的一阶非线性微分方程．这就是说，指定哪个变量为自变量是人为的，即自变量与因变量是相对的.

例 4 验证下列所给函数是否为微分方程 $y''-y=0$ 的解，并指出哪个是通解，哪个是特解.

（1）$y=e^{-x}$； （2）$y=C_1e^x+C_2e^{-x}$； （3）$y=Ce^x+e^{-x}$.

解 （1）由 $y=e^{-x}$，求得 $y'=-e^{-x}$，$y''=e^{-x}$．将 y 及 y'' 的表达式代入方程，有

$$y''-y=e^{-x}-e^{-x}=0$$

恒成立，所以 $y=e^{-x}$ 是所给微分方程的解．因它不含任意常数，故是特解.

（2）由 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$，求得 $y'=C_1e^x-C_2e^{-x}$ 及 $y''=C_1e^x+C_2e^{-x}$．将 y 及 y'' 的表达式代入方程，有

$$y''-y=(C_1e^x+C_2e^{-x})-(C_1e^x+C_2e^{-x})=0$$

成立，所以 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$ 是所给微分方程的解．又因它含有两个独立任意常数 C_1 与 C_2，所以是所给二阶方程的通解.

（3）由 $y=Ce^x+e^{-x}$，求得 $y'=Ce^x-e^{-x}$ 及 $y''=Ce^x+e^{-x}$．将 y 及 y'' 的表达式代入方程，有

$$y''-y=(Ce^x+e^{-x})-(Ce^x+e^{-x})=0$$

成立，所以 $y=Ce^x+e^{-x}$ 是所给方程的解．因为 y 的表达式中只含一个任意常数，而所给方程是二阶方程，故不是通解，也不是特解，只能说它是微分方程的解.

第二节　变量可分离的一阶微分方程

求解一个微分方程，首先要判别方程的类型．当确认是一阶微分方程时，一般先解出所给方程的 y' 的表达式，若能表示成

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\cdot g(y) \qquad ①$$

的形式，即它的右端是两个单变量函数 $f(x)$（变量为 x）与 $g(y)$（变量为 y）的乘积，就称方程为一阶**变量可分离型**的方程．这里方程①可以写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\mathrm{d}x \quad (g(y) \neq 0) \tag{②}$$

其特征是变量 x 与变量 y 分离在方程的两边．这样只要将方程②两边分别积分，有

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x$$

积分后便可得到微分方程的通解．

上述解法是在 $g(y)\neq 0$ 的前提下进行的．如果存在常数 y_0，使 $g(y_0)=0$，那么 $y=y_0$满足方程①，从而它也是微分方程的解．若这个解是特解，它必含于通解之内；若它不是特解，我们就不予讨论．因此，以后在解题时，就当做 $g(y)\neq 0$ 的情况来处理．

例 1　求微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy$ 的通解．

解法 1　这是一个变量可分离的方程．当 $y\neq 0$ 时，将方程分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = 2x\mathrm{d}x$$

两边积分，得

$$\ln|y| = x^2 + C_1$$

故

$$|y| = \mathrm{e}^{x^2+C_1} = \mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{x^2}, \quad 即 \quad y = \pm\,\mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{x^2}$$

因 $\pm\mathrm{e}^{C_1}$仍为任意常数，把它记作 C（$C\neq 0$）便得到

$$y = C\mathrm{e}^{x^2}$$

此外，$y=0$ 显然也是微分方程的解．若在上面通解中补充 C 取零值，就得到这个解．因此，所给微分方程的通解可写为

$$y = C\mathrm{e}^{x^2} \quad (C\ 为任意常数)$$

解法 1 是严谨的，但在解题过程中，时常采用下述简化的表达方式，得出同样的正确结果．

解法 2　分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = 2x\mathrm{d}x$$

两边积分，有

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y} = \int 2x\mathrm{d}x$$

得

$$\ln y = x^2 + \ln C$$

即

$$\ln\frac{y}{C}=x^2,\quad y=Ce^{x^2}$$

其中，C 为任意常数．这就是原方程的通解．

今后，我们采用这一简化解法，把 $\ln|y|$ 写成 $\ln y$，当积分后出现“ln”时，把任意常数直接写成 $\ln C$，都是为了便于把积分结果化为更简洁的表达式，而不必采用解法 1 的严密书写格式，也不再一一加以说明．

例 2 求微分方程 $(1-x^2)y-xy'=0$ 的通解．

解 这是一个一阶微分方程，通过代数运算解出 y' 的表达式，有

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(1-x^2)y}{x}$$

将方程分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{1-x^2}{x}\mathrm{d}x$$

两边积分，有

$$\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\int\left(\frac{1}{x}-x\right)\mathrm{d}x$$

得

$$\ln y=\ln x-\frac{x^2}{2}+\ln C$$

化简为

$$\ln\frac{y}{Cx}=-\frac{x^2}{2},\quad \frac{y}{Cx}=e^{-\frac{x^2}{2}},\quad y=Cxe^{-\frac{x^2}{2}}$$

这就是所给微分方程的通解．

例 3 求微分方程 $(x-xy^2)\mathrm{d}x+(y+x^2y)\mathrm{d}y=0$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=2$ 的特解．

解 这是一个一阶微分方程，但不必解出 y' 的表达式，直接通过代数运算对方程分离变量．原方程可写成

$$x(1-y^2)\mathrm{d}x+y(1+x^2)\mathrm{d}y=0,\quad y(1+x^2)\mathrm{d}y=x(y^2-1)\mathrm{d}x$$

分离变量，得

$$\frac{y\mathrm{d}y}{y^2-1}=\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

两边积分，有

$$\int\frac{y}{y^2-1}\mathrm{d}y=\int\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

用凑微分法，得

$$\int\frac{\mathrm{d}(y^2-1)}{y^2-1}=\int\frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{x^2+1},\quad \ln(y^2-1)=\ln(x^2+1)+\ln C$$

化简得方程的通解为

$$y^2 - 1 = C(x^2 + 1)$$

用初始条件 $x=0$，$y=2$ 代入通解，得 $C=3$. 于是，所求的特解为

$$y^2 = 3x^2 + 4$$

注　本例题的解以隐函数的形式出现，称为微分方程的**隐式解**.

第三节　一阶线性微分方程

一个一阶微分方程，若未知函数 y 及 y' 都是一次幂，则称为一阶线性微分方程. 其标准形式为

$$y' + P(x)y = Q(x) \qquad ①$$

其中，$P(x)$，$Q(x)$是已知的连续函数.

如果 $Q(x)\equiv 0$，则方程①可写成

$$y' + P(x)y = 0 \qquad ②$$

称为与方程①对应的**一阶线性齐次**方程. 相应地，把方程①称为**一阶线性非齐次**方程.

一阶线性齐次方程②是变量可分离的方程. 分离变量，得

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx$$

两边积分，得

$$\ln y = -\int P(x)dx + \ln C$$

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} \qquad ③$$

这是线性齐次方程②的通解.

注意，其中 $\int P(x)dx$ 表示 $P(x)$ 的任意一个原函数，它不再含任意常数（本节中下面的不定积分也如此约定）.

为了求出线性非齐次方程①的通解，我们先考察一个具体的例子，以分析线性非齐次方程与其对应的线性齐次方程通解之间的关系.

例 1　求解下列微分方程.

(1) $y' + xy = x$；　　　　(2) $y' + xy = 0$.

解　(1) 将方程分离变量，得

$$\frac{dy}{y-1} = -x dx$$

两边积分，有

$$\int \frac{dy}{y-1} = -\int x dx$$

得

$$\ln(y-1)=-\frac{x^2}{2}+\ln C,\quad \frac{y-1}{C}=e^{-\frac{x^2}{2}}$$

故

$$y=1+Ce^{-\frac{x^2}{2}}$$

或写成

$$y=(e^{\frac{x^2}{2}}+C)e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{④}$$

（2）把方程分离变量，得

$$\frac{dy}{y}=-x\,dx$$

两边积分，有

$$\int\frac{dy}{y}=-\int x\,dx$$

得

$$\ln y=-\frac{x^2}{2}+\ln C,\quad \frac{y}{C}=e^{-\frac{x^2}{2}}$$

故

$$y=Ce^{-\frac{x^2}{2}} \tag{⑤}$$

在例 1 中，第一个方程为线性非齐次方程，第二个方程是第一个方程对应的线性齐次方程．比较这两个方程的通解可以看出，它们的形式是相似的，差别在于齐次方程的通解⑤中的任意常数 C，在非齐次方程的通解④中变为 x 的函数

$$C(x)=e^{\frac{x^2}{2}}+C$$

这一有趣的结果且具有一般性，即所谓“常数变易”．下面我们就采用**常数变易法**来求线性非齐次方程的通解．

先把齐次方程②的通解③中的任意常数 C 看做是 x 的函数 $C(x)$，并设想非齐次方程①的通解形式为

$$y=C(x)e^{-\int P(x)dx} \tag{⑥}$$

那么，如何确定 $C(x)$？为此，按解的含义，将式⑥及其导数

$$y'=C'(x)e^{-\int P(x)dx}-P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx}$$

代入方程①，整理后得

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x)$$

成立，即

$$C'(x)=Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

两边积分，得

$$C(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C$$

再将 $C(x)$ 回代到式⑥，便得到线性非齐次方程①的通解

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right) \tag{⑦}$$

若把这一通解改写成两项之和

$$y=Ce^{-\int P(x)dx}+e^{-\int P(x)dx}\cdot\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

上式右端第一项是对应线性齐次方程②的通解，第二项是线性非齐次方程①的一个特解（在方程①的通解⑦中，取 $C=0$ 便得到此特解）.

由此可知，一阶线性非齐次方程的通解等于其对应齐次方程的通解与自身一个特解之和. 这一结论揭示了线性非齐次方程的通解结构.

例 2　求方程 $y'+2xy=2xe^{-x^2}$ 的通解.

解法 1　先解对应齐次方程

$$\frac{dy}{dx}+2xy=0$$

分离变量，得

$$\frac{dy}{y}=-2xdx$$

两边积分后得

$$\ln y=-x^2+\ln C,\quad y=Ce^{-x^2}$$

再设原非齐次方程的通解为

$$y=C(x)e^{-x^2}\quad(C(x)\text{待定})$$

将 $y=C(x)e^{-x^2}$ 和 $y'=C'(x)e^{-x^2}-2xC(x)e^{-x^2}$ 代入原方程，整理后得

$$C'(x)e^{-x^2}=2xe^{-x^2},\quad C'(x)=2x$$

积分得到

$$C(x)=x^2+C$$

因此，原方程的通解为

$$y=(x^2+C)e^{-x^2}$$

解法 2　所给方程是一阶线性非齐次微分方程的标准形式，这里 $P(x)=2x$，$Q(x)=2xe^{-x^2}$. 直接代入通解公式⑦，得

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)=e^{-\int 2xdx}\left(\int 2xe^{-x^2}\cdot e^{\int 2xdx}dx+C\right)$$