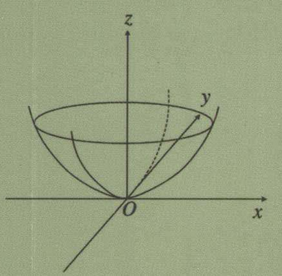
高等师范院校数学专业教材



数学分析是本科数学专业最重要的基础课，已经非常成熟。基于现在中学阶段已经开始学习微积分，故简编了这套只含经典分析内容，适合普通本科数学专业的教材。

SHUXUE FENXI

数学分析

叶淼林 主编

下册

中国科学技术大学出版社

高等师范院校数学专业教材

数学分析

下册

主　编　叶淼林
副主编　宋寿白　侯为波　姚云飞
参　编　胡学平　余桂东　张　海
杨　翠　马宗立　汪志华
陈素根

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

"数学分析"是数学专业的基础课，本书是根据安徽省师范院校数学专业学生的基础情况、教学背景等因素量身打造的数学专业课教材之一. 教材内容是由讲授此课程多年的老师经过多次讨论商定的，其中包括一元微积分学、多元微积分学、级数理论等基础内容，分上、下两册. 本书适合师范院校数学专业本科生使用，也可供各高校数学系教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析. 下册/叶淼林主编. —合肥：中国科学技术大学出版社，2012.1
ISBN 978-7-312-02956-1

Ⅰ. 数…　Ⅱ. 叶…　Ⅲ. 数学分析—高等师范院校—教材　Ⅳ. O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 253682 号

出版　中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号，230026
网址：http://press.ustc.edu.cn
印刷　安徽省瑞隆印务有限公司
发行　中国科学技术大学出版社
经销　全国新华书店
开本　710 mm×960 mm　1/16
印张　14
字数　275 千
版次　2012 年 1 月第 1 版
印次　2012 年 1 月第 1 次印刷
定价　23.00 元

前　言

“数学分析”是数学专业的一门主干基础课，这门课程的教学效果直接影响许多后续课程的学习. 一本适当的教材是学好这门课程的条件之一，所以，我们特地组织安徽师范大学、淮北师范大学、安庆师范学院、阜阳师范学院4所师范院校共同编写了一套适合普通师范院校数学专业的专业课程教材，本书是其中之一. 本书同时是安徽省高等学校“十一五”省级规划教材.

本书考虑到现在中学数学教学内容中含有微积分的内容，所以对一元微积分中的计算部分写得较简洁，主要强调基本概念、基本方法，只用常规手段、“大道”处理问题，很少介绍“小技巧”. 本书还沿用申报省规划教材时安徽大学蒋威教授的观点：只写数学分析的经典内容，不越雷池一步，只适用于普通院校，调子不要高，但语言要精确. 本书在实数基本理论、可积性等方面对学生提出了较高的要求.

本书是集体编写、共同审阅的成果. 参与编写和审阅的人员有叶淼林、宋寿白、侯为波、姚云飞、胡学平、余桂东、张海、杨翠、马宗立、汪志华、陈素根等，全书由叶淼林负责统稿.

编　者

2011 年 11 月

目　　录

前言 …… (i)
第 11 章　多元函数的极限与连续 …… (1)
11.1　平面点集 …… (1)
11.2　二元函数及其极限 …… (10)
11.3　二元函数的连续性 …… (20)
第 12 章　多元函数微分学 …… (28)
12.1　偏导数与全微分 …… (28)
12.2　方向导数与梯度 …… (43)
12.3　复合函数微分法 …… (48)
12.4　泰勒公式与多元函数极值 …… (58)
12.5　隐函数 …… (70)
12.6　隐函数组 …… (78)
12.7　隐函数(组)微分的应用 …… (89)
第 13 章　含参变量积分 …… (104)
13.1　含参变量正常积分 …… (104)
13.2　含参量反常积分 …… (110)
13.3　欧拉积分 …… (120)
第 14 章　重积分 …… (124)
14.1　二重积分概念 …… (124)
14.2　直角坐标系下二重积分的计算 …… (130)
14.3　二重积分的变量变换 …… (136)
14.4　三重积分 …… (143)
14.5　重积分的应用 …… (147)
14.6　n 重积分 …… (152)
第 15 章　曲线积分与曲面积分 …… (155)
15.1　第一型曲线积分 …… (155)

15.2 第一型曲面积分 …… (161)
15.3 第二型曲线积分 …… (166)
15.4 格林公式——曲线积分与路线的无关性 …… (174)
15.5 第二型曲面积分 …… (183)
15.6 高斯公式与斯托克斯公式 …… (192)
15.7 场论初步 …… (204)
数学家小传 …… (211)
参考文献 …… (214)

第 11 章　多元函数的极限与连续

到目前为止，我们主要讨论了一元函数(即只有一个自变量的函数)的微积分．研究一元函数，其实只是考虑由一个因素确定的问题或事物．然而现实中的许多问题常常涉及多个因素．例如，研究自然现象一般总离不开空间和时间，而空间点的位置需要用三个坐标来确定，这就有了三个变量，再加上时间变量，这样便涉及四个变量．因此，我们需要讨论含有多个自变量的所谓多元函数以及多元函数微积分学的基本理论和方法．

从本章开始，我们讨论多元函数微积分，它是一元函数微积分的推广，读者将会看到，一元函数问题的一些性质在这里继续保持着，但由于多元函数的定义域和多元极限的复杂性，产生了与一元函数问题有着本质差异的新东西新内容，这将是读者需要特别注意的，为了掌握好这些新知识新内容，我们将主要研究二元函数，在掌握了二元函数的有关理论和方法后，也就不难将其推广到一般的多元函数上去．

一元函数微积分的理论基础是实数理论和极限理论，多元函数微积分也有着与之相应的理论基础，本章内容即是建立这些基础知识，主要讨论平面点集与多元函数、多元函数的极限和连续性等问题．

11.1　平 面 点 集

多元函数微积分是在二维、三维和 n 维欧氏空间中讨论微分和积分问题的，因此有必要先了解 n 维欧氏空间的概念，以下只是对 n 维欧氏空间的基本概念作简单介绍，有关初等拓扑知识则主要就二维欧氏空间进行讨论．

11.1.1　n 维欧几里得(Euclid)空间的概念

n 元有序数组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$(其中 $x_i \in \mathbf{R}, i=1,2,\cdots,n$)的全体通常叫做 n

维空间,记为 $\mathbf{R}^n$,即

$$\mathbf{R}^n = \{(x_1,x_2,\cdots,x_n) \mid x_i \in \mathbf{R}, i = 1,2,\cdots,n\}.$$

记 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,称 x 为 $\mathbf{R}^n$ 中的**元素**.

空间 $\mathbf{R}^n$ 中的元素 x 可以看做是坐标分别是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一个点,相应地,称 $\mathbf{R}^n$ 是 n 维坐标空间. x 可看做是分量分别为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一个向量,此时 $\mathbf{R}^n$ 又称为 n 维向量空间. 我们已经知道,实数轴上的所有点与全体实数是一一对应的. 平面解析几何告诉我们,建立了直角坐标系后坐标平面上的所有点与全体有序实数对 (x,y) 是一一对应的. 一般地,建立了坐标后的 n 维空间中的所有点与全体 n 元有序实数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 也是一一对应的. 今后,我们将 n 维空间中的点与 n 元有序实数组(或 n 维向量)等同看待而不加区别.

在高等代数中,曾经在 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中定义了向量的加法、数乘和内积的概念. 引进了这些运算的 n 维空间便叫做 n 维欧几里得空间,简称为 n 维欧氏空间,仍记为 $\mathbf{R}^n$. 建立直角坐标系后的坐标平面上的所有点构成二维欧氏空间 $\mathbf{R}^2$.

对于 $\mathbf{R}^n$ 中的任意两点 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$,定义 x 与 y 的欧氏距离(以下简称**距离**)为

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}.$$

容易验证,$\mathbf{R}^n$ 中如此引进的距离有如下三个性质:

(i) 正定性:$\rho(x,y)\geqslant 0$;$\rho(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$,$x,y\in\mathbf{R}^n$;

(ii) 对称性:$\rho(x,y)=\rho(y,x)$,$x,y\in\mathbf{R}^n$;

(iii) 三角形不等式:$\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$,$x,y,z\in\mathbf{R}^n$.

我们只证明三角不等式成立. 对任何实数 t,显然成立不等式:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + tb_i)^2 \geqslant 0,$$

即

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2 + 2t\sum_{i=1}^{n}a_ib_i + t^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2 \geqslant 0.$$

利用二次三项式非负的判别条件,有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right). \tag{11.1}$$

(11.1)式即为著名的柯西(Cauchy)不等式.

现在,对任意的 $x=(x_1,\cdots,x_n)$,$y=(y_1,\cdots,y_n)$,$z=(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbf{R}^n$,有

$$\rho(x,z)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |(x_i - y_i) + (y_i - z_i)| |x_i - z_i|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i| |x_i - y_i|.$$

由(11.1)式可得

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| |x_i - z_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i| |x_i - z_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

于是有

$$\rho(x,z)^2 \leqslant \rho(x,y)\rho(x,z) + \rho(y,z)\rho(x,z).$$

由 ρ 的正定性立得三角不等式成立.

11.1.2　平面点集

我们已经知道,二维欧氏空间 $\mathbf{R}^2$ 就是确定了(直角)坐标系的平面.通常称为坐标平面,坐标平面上满足某条件 P 的点所成之集,称为平面点集,记为

$$E = \{(x,y) \mid (x,y) \text{ 满足条件 } P\}.$$

例如,平面上的以原点为中心,r 为半径的圆内所有点的集合是

$$E = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant r^2\},$$

而圆上所有点的集合是

$$E = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = r^2\}.$$

全平面上的所有点所成之集即为

$$\mathbf{R}^2 = \{(x,y) \mid -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty\}.$$

根据集合的包含关系,对任意平面点集 E,总有 $E \subset \mathbf{R}^2$.

利用欧氏空间的距离 ρ,可以建立邻域概念.

设 $P_0(x_0,y_0) \in \mathbf{R}^2$,$\sigma$ 是一个正数,$P(x,y) \in \mathbf{R}^2$,平面点集

$$\{(x,y) \mid \rho(P,P_0) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \sigma\}$$

与

$$\{(x,y) \mid |x - x_0| < \sigma, |y - y_0| < \sigma\}$$

分别称为以点 P_0 为中心的 σ 圆邻域与方邻域(如图 11.1 所示).

显然,点 P_0 的任一圆形邻域都包含点 P_0 的一个方邻域,反之亦然,因此,把这两种邻域统称为点 P_0 的 σ 邻域或点 P_0 的邻域,并记作 $U(P_0;\sigma)$或 $U(P_0)$.

平面点集

$$\{(x,y) \mid 0<\rho(P,P_0)<\sigma\}$$

或

$$\{(x,y) \mid x-x_0<\sigma, |y-y_0|<\sigma, (x,y)\neq(x_0,y_0)\}$$

称为点 P_0 的空心邻域，记作 $U^{\circ}(P_0;\sigma)$或 $U^{\circ}(P_0)$.

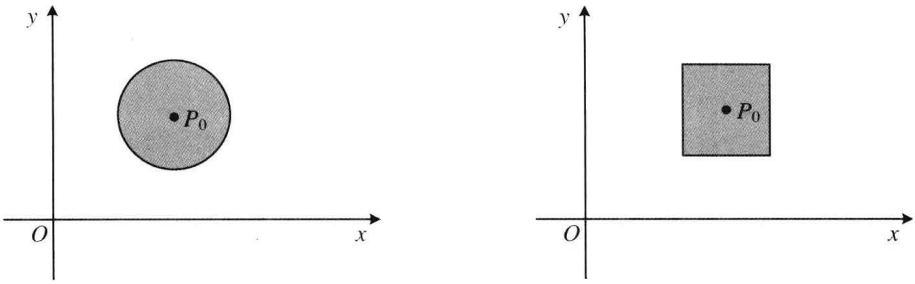


图 11.1

注 $U^{\circ}(P_0;\sigma)\neq\{(x,y) \mid 0<|x-x_0|<\sigma, 0<|y-y_0|<\sigma\}$.

任取点集 $E\subset\mathbf{R}^2$，利用邻域可将 $\mathbf{R}^2$ 中的点 P 分为三类：

(i) 内点.若存在点 P 的某邻域 $U(P)$，使得 $U(P)\subset E$，则称点 P 为点集 E 的内点；

(ii) 外点.若存在点 P 的某邻域 $U(P)$，使得 $U(P)\subset E^c$（$E^c=\mathbf{R}^2-E$，称为 E 的余集），则称点 P 为点集 E 的外点；

(iii) 界点.若对点 P 的任何邻域 $U(P)$，总有 $U(P)\cap E\neq\varnothing$ 且 $U(P)\cap E^c\neq\varnothing$，则称点 P 为点集 E 的界点.

E 的内点全体之集称为 E 的内部，记为 E° 或 $\mathrm{int}E$. E 的界点全体之集称为 E 的边界，记为 ∂E.

例 11.1 平面点集 $E=\{(x,y) \mid 1\leqslant x^2+y^2<4\}$，所有满足 $1<x^2+y^2<4$ 的点 (x,y) 都是 E 的内点，故 $E^{\circ}=\{(x,y) \mid 1<x^2+y^2<4\}$；所有满足 $x^2+y^2<1$ 或 $x^2+y^2>4$ 的点 (x,y) 都是 E 的外点；而满足 $x^2+y^2=1$ 或 $x^2+y^2=4$ 的点 (x,y) 都是 E 的界点，从而

$$\partial E=\{(x,y) \mid x^2+y^2=1 \text{ 或 } x^2+y^2=4\}.$$

由此可见，E 的内点必属于 E，E 的外点必不属于 E，而 E 的界点则可能属于 E，也可能不属于 E.

利用邻域，还可以描述平面上点 P 与点集 E 的另一种关系.

聚点：若点 P 的任何邻域 $U(P)$ 内都含有 E 的异于点 P 的点，则称点 P 为点集 E 的聚点. E 的全体聚点之集称为 E 的导集，记为 E'.

孤立点：若点 $P\in E$，但 P 不是 E 的聚点，即存在点 P 的某空心邻域 $U^{\circ}(P)$，

使得 $U^\circ(P)\cap E=\varnothing$,则称点 P 为 E 的孤立点.

显然,点集 E 的内点都是 E 的聚点,但一定不是 E 的孤立点;E 的外点一定不是 E 的聚点,当然也不是 E 的孤立点;E 的界点如果不是 E 的孤立点,则它必是 E 的聚点.

注　P 为点集 E 的聚点 $\Leftrightarrow$ 对任意 $\delta>0$, $U(P;\delta)\cap E$ 为无限集 $\Leftrightarrow$ 对任意 $\delta>0$, $U^\circ(P;\delta)\cap E\neq\varnothing$.

例 11.2　设平面点集

$$E_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\},$$
$$E_2=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\},$$
$$E_3=\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\middle| n\text{ 为正整数}\right\},$$

则 $E_1'=E_2'=E_2$, E_3 有唯一的一个聚点 $(0,0)$; E_1,E_2 都无孤立点,而 E_3 中每一点都是其孤立点.

由此可见,点集 E 的聚点可能属于 E,也可能不属于 E;E 的孤立点必属于 E.

例 11.2 分别表明点集 E_1,E_2 的一个特征:E_1 中的每一点都是 E_1 的内点,E_2 包含了它的所有聚点.按照这一特征,又可定义下面的几个特殊平面点集.

开集:若平面点集中每一点都是 E 的内点,即 $\mathrm{int}E=E$,则称 E 是 $\mathbf{R}^2$ 中的一个开集.

闭集:若平面点集 E 的所有聚点都属于 E,即 $E'\subset E$(或 $E\cup E'=E$),则称 E 是 $\mathbf{R}^2$ 中的一个闭集

点 P 的 δ 邻域 $U(P;\delta)$ 和例 11.2 中的 E_1 都是开集;例 11.2 中的 E_2 和 E_2' 都是闭集;而例 11.2 中的 E_3 既不是开集,也不是闭集;全平面 $\mathbf{R}^2$ 既是开集又是闭集,约定空集 $\varnothing$ 也是既开又闭的集合.

设 $E\subset\mathbf{R}^2$,容易验证下面的结论成立:

(i) 若 $E'=\varnothing$,则 E 为闭集,由于有限点集无聚点,从而任何有限点集皆为闭集;

(ii) 平面点集 E 为闭集 $\Leftrightarrow E=E\cup\partial E\Leftrightarrow E=E^\circ\cup\partial E$.

设点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)\in\mathbf{R}^2$,点集

$$\{(x,y)\mid x=x_1+t(x_2-x_1),y=y_1+t(y_2-y_1),0\leqslant t\leqslant 1\}$$

称为以 A,B 为端点的线段.

设 $E\subset\mathbf{R}^2$,若 E 中的任意两点都可用一条完全含于 E 的有限折线(由有限条线段连接而成)相连接,则称平面点集 E 具有连通性.

开区域:若平面点集 E 为非空开集,且具有连通性,则称 E 为开区域.

闭区域:开区域连同它的边界所成的点集称为闭区域.

区域:开区域、闭区域以及开区域连同它的一部分边界点的点集,统称为区域.

例如,例 11.2 中的点集 E_1 是开区域,E_2 是闭区域,E_3 不是区域,而例 11.1 中的点集 E 是区域,全平面 $\mathbf{R}^2$ 既是开区域,又是闭区域.

注 (i) 开区域必为开集.但反之不真,如点集 $E=\{(x,y)\mid xy>0\}$ 是开集,但 E 不具有连通性,故它不是开区域;

(ii) 闭区域必为闭集,反之也不真.如单点集是闭集,但不是闭区域.

有界点集:设 $E\subset\mathbf{R}^2$,若存在 $r>0$,使得 $E\subset U(O;r)$(其中 O 是坐标原点),则称点集 E 为有界点集,否则,即是说,若对任意 $r>0$,都存在点 $P\in E$,使得 $P\notin U(O;r)$,则称 E 是无界点集.

前述例 11.1、例 11.2 中的点集都是有界点集,而全平面 $\mathbf{R}^2$ 及 $E=\{(x,y)\mid xy>0\}$ 都是无界点集.

注 E 为有界点集$\Leftrightarrow$存在矩形区域 $D=[a,b]\times[c,d]$,使得 $E\subset D$.

点集的直径:设 $E\subset\mathbf{R}^2$,令

$$d(E)=\sup\{\rho(P_1,P_2)\mid P_1,P_2\in E\},$$

称 $d(E)$为点集的**直径**.

当且仅当 $d(E)$为有限数时,E 为有界点集.

11.1.3 $\mathbf{R}^2$ 的完备性

我们曾在一元函数极限理论的讨论中,建立了反映实数系 $\mathbf{R}$(或 $\mathbf{R}^1$)完备性的几个等价的基本定理,它们在一元函数极限理论中起着非常重要的作用.把这些基本定理推广到 $\mathbf{R}^2$ 上,它们则反映了 $\mathbf{R}^2$ 的完备性,并将在二元函数极限理论中起着重要的作用.

数列(点列)在一元函数极限理论中扮演着重要角色,同样,在 $\mathbf{R}^2$ 中"点列"也是一个重要角色.

所谓一个**平面点列**(简称为点列)是指 $\mathbf{R}^2$ 上的一列按序排列的点

$$P_1,\quad P_2,\quad \cdots,\quad P_n,\quad \cdots.$$

我们把它简记为$\{P_n\}$.

定义 11.1 设$\{P_n\}\subset\mathbf{R}^2$ 是一个平面点列,$P_0\in\mathbf{R}^2$ 是一定点,若对任意 $\varepsilon>0$,总存在正整数 N,当 $n>N$ 时,总有 $P_n\in U(P_0;\varepsilon)$(或 $\rho(P_n,P_0)<\varepsilon$,这里 ρ 为 $\mathbf{R}^2$ 中的欧氏距离),则称点列$\{P_n\}$收敛于点 P_0,记为

$$\lim_{n\to\infty}P_n=P_0\quad 或\quad P_n\to P_0\quad(n\to\infty).$$

在坐标平面中,若 $P_n=(x_n,y_n)(n=1,2,\cdots)$,$P_0=(x_0,y_0)$,则点列收敛与坐标收敛之间有如下关系:

定理 11.1 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0$ 的充要条件是$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$,$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y_0$.

证　必要性. 设$\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0$，由点列收敛定义，对任给 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}^+$，当 $n>N$ 时，总有 $P_n\in U(P_0;\varepsilon)$，即

$$\rho(P_n,P_0)=\sqrt{(x_n-x_0)^2+(y_n-y_0)^2}<\varepsilon,$$

于是有

$$|x_n-x_0|\leqslant\rho(P_n,P_0)<\varepsilon,\quad |y_n-y_0|\leqslant\rho(P_n,P_0)<\varepsilon.$$

由数列极限定义即得

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x_0,\quad \lim_{n\to\infty}y_n=y_0.$$

充分性. 由假设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y_0$ 知，对任给 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}^+$ 当 $n>N$ 时，总有

$$|x_n-x_0|<\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon,\quad |y_n-y_0|<\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon.$$

因此

$$\rho(P_n,P_0)=\sqrt{(x_n-x_0)^2+(y_n-y_0)^2}<\varepsilon,$$

从而$\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0$.　□

下面的几个定理是反映 $\mathbf{R}^2$ 完备性的几个等价命题.

定义 11.2　设点列$\{P_n\}\subset\mathbf{R}^2$，若对任给 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}^+$，当 $n>N$ 时，总有

$$\rho(P_n,P_m)<\varepsilon,$$

则称$\{P_n\}$是柯西(点)列或基本点列.

定理 11.2(柯西准则)　平面点列$\{P_n\}$收敛的充要条件是$\{P_n\}$是一柯西列.

证　必要性. 设$\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0$，由点列极限定义，对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}^+$，当 $m,n>N$ 时，恒有 $\rho(P_n,P_0)<\frac{\varepsilon}{2}$，$\rho(P_m,P_0)<\frac{\varepsilon}{2}$. 从而由三角不等式，有

$$\rho(P_n,P_m)\leqslant\rho(P_n,P_0)+\rho(P_m,P_0)<\varepsilon.$$

故$\{P_n\}$是柯西列.

充分性. 设$\{P_n\}$是柯西列，因为

$$|x_n-x_m|\leqslant\rho(P_n,P_m),\quad |y_n-y_m|\leqslant\rho(P_n,P_m),$$

其中 $P_n=(x_n,y_n)$，$P_m=(x_m,y_m)$，这说明数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$都是柯西列，由数列收敛的柯西准则，它们都收敛，设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y_0$，则由定理 11.1 知$\{P_n\}$收敛.　□

定理 11.3(闭区域套定理)　设 $\mathbf{R}^2$ 中的闭区域列$\{D_n\}$满足

(i) $D_{n+1}\subset D_n$，$n=1,2,\cdots$；

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}d(D_n)=0$，$d(D_n)$为$D_n$ 的直径(此时称$\{D_n\}$是一个闭区域套)，则

存在唯一的点

$$P_0 \in D_n, \quad n = 1,2,\cdots.$$

证 任取点 $P_n \in D_n$ 得到点列 $\{P_n\}$，由条件(i)，对每个正整数 n 有

$$P_n, \quad P_{n+p} \in D_n \quad (p = 1,2,\cdots).$$

由条件(ii)有 $\rho(P_{n+p}, P_n) \leqslant d(D_n) \to 0 (n \to \infty)$.

由点列收敛的柯西准则，存在 $P_0 \in \mathbf{R}^2$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0$，对每个 n 由于

$$P_{n+p} \in D_{n+p} \subset D_n \quad (p = 1,2,\cdots),$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty} P_{n+p} = P_0$，又 D_n 是闭区域，从而必为闭集，所以必有 $P_0 \in D_n$.（为什么？）

其次证明 P_0 是唯一的，若还有 $Q_0 \in D_n (n = 1,2,\cdots)$，则由 $P_0 \in D_n$ 有 $\rho(P_0, Q_0) \leqslant d(D_n) \to 0, n \to \infty$，即 $P_0 = Q_0$. □

应当注意，如果 D_n 都是开区域，则所有 D_n 的公共点可能是不存在的，读者可自行举出这样的例子.

定理 11.4（聚点定理） 若 $E \in \mathbf{R}^2$ 是有界无限点集，则 E 在 $\mathbf{R}^2$ 中至少有一个聚点.

证 用闭区域套定理来证明. 因为 E 是有界点集，所以存在闭正方形域 $D_1 \supset E$. 对分 D_1 各边，把 D_1 分成了四个小闭正方形域，其中至少有一个小闭正方形域含有 E 的无穷多个点，记这个小闭正方形域为 D_2，再对分 D_2 各边，把 D_2 分成了四个小闭正方形域，其中又至少有一个小闭正方形域含有 E 的无穷多个点，记其为 D_3. 如此一直下去，得到一列闭正方形域（如图 11.2 所示），满足 $D_1 \supset D_2 \supset \cdots \supset D_n \supset \cdots$，且 D_n 的边长趋于零，故 D_n 的直径 $d(D_n)$ 也趋于零. 由闭区域套定理，存在唯一的点

$$P_0 \in D_n \quad (n = 1,2,\cdots).$$

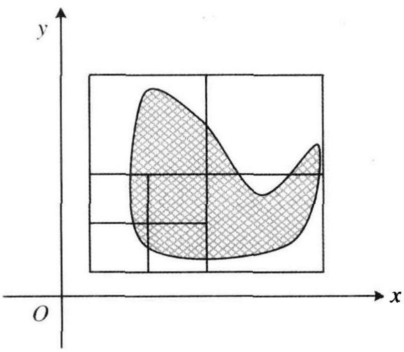


图 11.2

现在证明 P_0 就是 E 的聚点. 任给 $\varepsilon > 0$，由于 D_n 的边长趋于零，故存在

$N \in \mathbf{N}^+$，使得 D_N 的边长小于$\frac{\varepsilon}{2}$，因此 $D_N \in U(P_0;\varepsilon)$. 而 $D_N \cap E$ 是无限集，于是便有 $U(P_0;\varepsilon)\cap E$ 是无限集，这说明 P_0 是 E 的聚点. □

一个平面点列作成一个点集，如果它是有界点集，则称该点列是**有界点列**. 仿照 $\mathbf{R}$ 中的数列（点列）的子列定义，可建立平面点列的子列概念. 于是由聚点定理立即可得下面的推论.

推论 11.1（致密性定理）　平面有界点列必有收敛子列.

定理 11.5（有限覆盖定理）　设 $D \subset \mathbf{R}^2$ 为一有界闭域，$\{G_\alpha\}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的一个开域族，若 $\{G_\alpha\}$ 覆盖了 $D\left(D \subset \bigcup\limits_{\alpha} G_\alpha\right)$，则存在有限个开域族 $G_i \in \{G_\alpha\}$（$i=1,2,\cdots,k$），使得这有限个开区域覆盖 $D\left(D \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} G_i\right)$.

$\mathbf{R}$ 中有限覆盖定理是就闭区间$[a,b]$和开区间族并成的开覆盖而言的. 这里换为有界闭区域 D 和开域族$\{G_\alpha\}$，是 $\mathbf{R}$ 中有限覆盖定理在 $\mathbf{R}^2$ 中一个很自然的推广，因此其证明可完全仿照进行（留给读者自己完成）. 事实上，更一般地，可在定理 11.5 中分别改设 D 为有界闭集，$\{G_\alpha\} \subset \mathbf{R}^2$ 是一个开集族，此时仍有与定理 11.5 相应的结论成立.

上述定理 11.2 到定理 11.5 都是 $\mathbf{R}$ 中相应的完备性定理在 $\mathbf{R}^2$ 中的直接推广，它们也是彼此等价的，因此共同成为欧氏空间 $\mathbf{R}^2$ 的完备性定理. 把它们再向一般 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$（$n>2$）上推广，就是很容易的事了.

练　习　11.1

1. 求下列平面点集的内点、外点、聚点和界点；并判定哪些点集是开集、闭集、有界集及区域：

(1) $[a,b)\times(c,d]$；　　(2) $\{(x,y)\mid xy>0\}$；

(3) $\{(x,y)\mid xy=0\}$；　　(4) $\{(x,y)\mid x^2 \leqslant y \leqslant 2x^2\}$；

(5) $\{(x,y)\mid x,y$ 都是有理数$\}$；　　(6) $\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2<1\}$；

(7) $\{(x,y)\mid x^2+y^2 \leqslant 1$ 或 $y=0, 1\leqslant x \leqslant 2\}$；

(8) $\left\{(x,y)\,\middle|\, y=\sin\frac{1}{x}, x>0\right\}$；

(9) $\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{m}\right)\,\middle|\, n,m=1,2,\cdots\right\}$.

2. 证明：

(1) 若点列$\{P_n\}$收敛，则$\{P_n\}$是有界点列，且其极限是唯一的；

(2) 若点列$\{(x_n,y_n)\}$与$\{(x_n{}',y_n{}')\}$都收敛，则点列

$$\{\alpha(x_n,y_n)+\beta(x_n',y_n')\}$$

也收敛，且

$$\lim_{n\to\infty}[\alpha(x_n,y_n)+\beta(x_n',y_n')]=\alpha\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n)+\beta\lim_{n\to\infty}(x_n',y_n').$$

这里 $\alpha\in\mathbf{R}$，$\alpha(x,y)=(\alpha x,\alpha y)$，$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$.

3. 设 E 为平面点集. 若 $P\in\partial E$，但 $P\notin E$，证明：$P\in E'$.

4. 证明：$E\subset\mathbf{R}^2$ 为闭集$\Leftrightarrow E=E\cup\partial E\Leftrightarrow E=E^{\circ}\cup\partial E$.

5. 证明：P_0 是 E 的聚点的充要条件是：存在点列 $\{P_n\}\subset E$，$P_n\neq P_0$，$P_i\neq P_j$，$n=1,2,\cdots$，$i\neq j$，使得 $P_n\to P_0(n\to\infty)$.

6. 举例说明无界点列不一定有收敛子列.

7. 举例说明，满足

$$\lim_{n\to\infty}\rho(P_{n+1},P_n)=0$$

的点列 $\{P_n\}$ 不一定是柯西列.

8. 证明：闭区域必为闭集. 举例说明反之不真.

11.2 二元函数及其极限

我们已经讨论过一元函数的极限. 本节要讨论多元函数最简单的情形——二元函数，以及二元函数的极限.

11.2.1 二元函数的概念

定义 11.3 设 $D\subset\mathbf{R}^2$ 为平面点集，f 是一给定的对应关系. 若对任意一点 $P(x,y)\in D$，按对应关系 f，有唯一的实数 z 与之对应，则称 f 为定义于 D 上的二元函数，记为

$$f:\quad D\to\mathrm{R},\quad P\mapsto z, \tag{11.2}$$

D 称为函数 f 的定义域；z 称为 f 在 P 点的函数值，记为

$$z=f(P)\quad 或\quad z=f(x,y).$$

函数值的全体之集称为函数 f 的值域，记为 $f(D)$；而点 P 的坐标 x 与 y 称为 f 的自变量，z 称为因变量.

和一元函数一样，通常用能够表明二元函数的定义域及对应关系的表达式

$$z=f(x,y),(x,y)\in D\quad 或\quad z=f(P),P\in D \tag{11.3}$$

来表示一个二元函数，在定义域 D 可以确定的情况下，甚至更简单地将二元函数

表示为

$$z = f(x, y) \quad 或 \quad z = f(P).$$

二元函数 f 实际上是点集 D 到实数集 $\mathbf{R}$ 的一个映射，在这个意义下，称 $z = f(P)$ 为 P 的像，而 P 称为 z 的原像.

三维欧氏空间 $\mathbf{R}^3$ 中的点集

$$\{(x, y, z) \mid z = f(x, y), (x, y) \in D\}$$

称为二元函数 f 的图像，记作 $\mathrm{Gr}f$，通常 $z = f(x, y)$ 的图像是一空间曲面，该曲面在 xOy 平面上的投影就是 f 的定义域 D.

若二元函数 f 的值域 $f(D)$ 是有界数集，则称 f 是有界函数；$f(D)$ 是无界数集，则称 f 是无界函数，若 $D_1 \subset D$，$f(D_1)$ 是有界数集，则称 f 在 D_1 上是有界的，否则称 f 在 D_1 上是无界的.

例 11.3　函数 $z = 2x + 3y$ 的定义域是 $\mathbf{R}^2$，值域是 $\mathbf{R}$，其图像是过坐标原点 $(0,0,0)$ 的一个平面，它是无界函数.

例 11.4　函数 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 的定义域是平面单位圆域 $D = \{(x, y) \mid x + y \leqslant 1\}$，值域是闭区间 $[0,1]$，它的图像是以圆点为中心的单位球面的上半部分（如图 11.3 所示），它是有界函数.

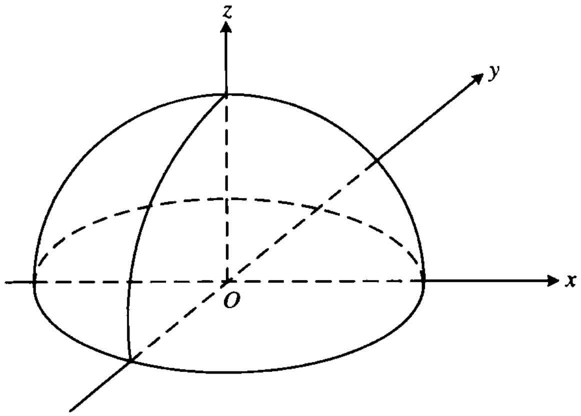


图 11.3

例 11.5　函数 $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ 的定义域 $D = \mathbf{R}^2$，值域是 $[0, +\infty)$，从而是无界函数，它的图像是椭圆抛物面（如图 11.4 所示）.

我们可以轻松地将二元函数概念推广到一般的多元函数.

设 $D \subset \mathbf{R}^n$ 为 n 维空间点集，f 是一确定的对应关系，若对任一