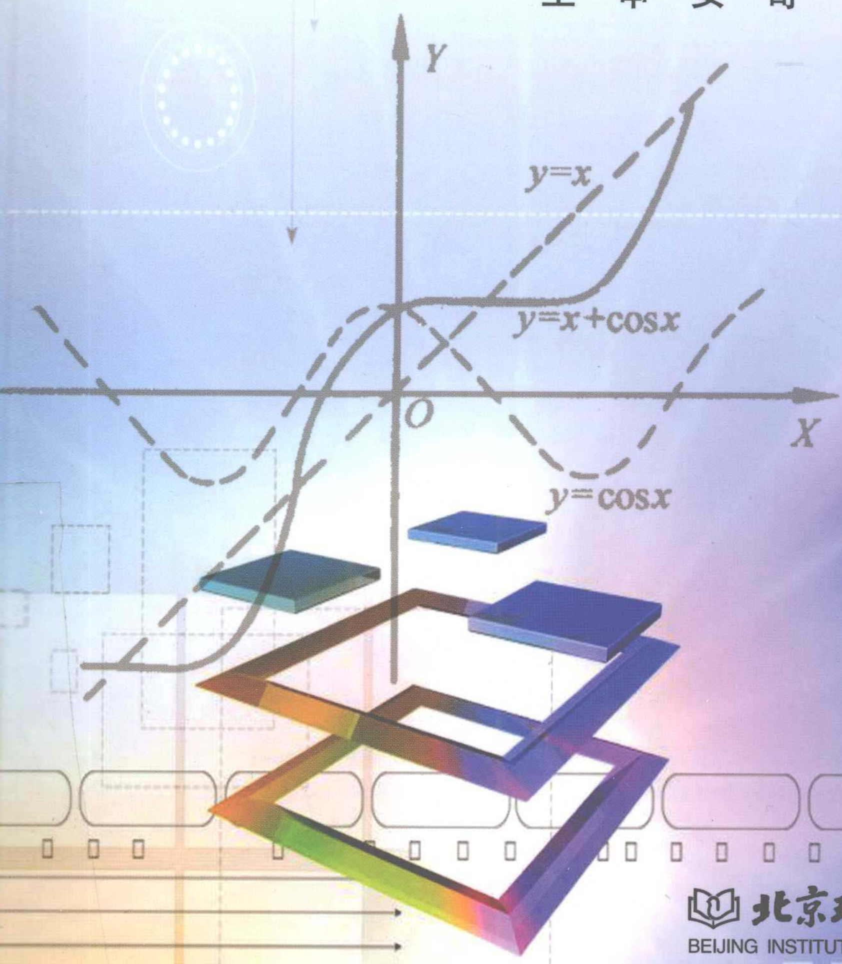
高等职业教育“十二五”创新型规划教材

高等应用数学

Gaodeng Yingyong Shuxue

主　编　朱学荣

主　审　安　奇

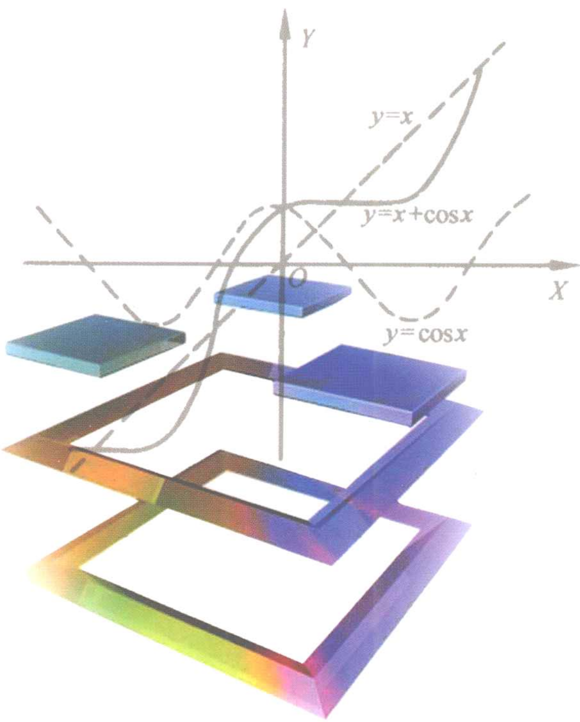


北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

项目编辑：周艳红
策划编辑：郭魏毅
责任编辑：李　娜　王玲玲
封面设计：艺博设计

高等应用数学

Gaodeng Yingyong Shuxue



ISBN 978-7-5640-5032-0
9 787564 050320
定价：21.00元

高等职业教育“十二五”创新型规划教材

高等应用数学

主　编　朱学荣

主　审　安　奇

副主编　于宏坤

参　编　葛文侠　马　兰

　　　　杨培凤　李玉贤

北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本教材从培养高素质技能型人才的目标出发，根据高职教育对学生职业能力培养的要求，充分体现了“以应用为目的，以必需够用为度”的原则。全书内容精炼，难度适中，力求做到贴近专业，强化学生的技能培养。

本书内容包括极限与导数、导数及微分的应用、不定积分、定积分及其应用、空间解析几何共五章，并配备大量的课后习题，为不同层次的学生提供更多的练习空间，是工程类各专业及管理专业的基础课教材，适用于少学时（76～90 学时）教学。

图书在版编目（CIP）数据

高等应用数学 / 朱学荣主编．—北京：北京理工大学出版社，2011.8

ISBN 978－7－5640－5032－0

Ⅰ．①高… Ⅱ．①朱… Ⅲ．①应用数学－高等职业教育－教材 Ⅳ．①029

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 169594 号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / （010）68914775（办公室）　68944990（批销中心）　68911084（读者服务部）
网　　址 / http：/ /www. bitpress. com. cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京泽宇印刷有限公司
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 9
字　　数 / 205 千字
版　　次 / 2011 年 8 月第 1 版　2011 年 8 月第 1 次印刷
印　　数 / 1～4000 册
定　　价 / 21.00 元

责任编辑 / 李　娜
王玲玲
责任校对 / 陈玉梅
责任印制 / 王美丽

前　　言

本教材是从培养高素质技能型人才的目标出发，根据高职教育对学生职业能力培养的要求，在高职院校数学课程内容重构、学时减少的前提下编写的。该教材的编写本着“以应用为目的、以必需够用为度”的原则，立足于体现高职教学改革的指导方针，力求做到结合专业的特点，强化技能的培养。

在教材的编写过程中，充分考虑了高职学生的数学基础，淡化逻辑论证，避免怪题和难度较大题型的解析，例题与习题尽量贴近专业。为便于学生巩固所学知识、提高基本技能，课本中配备了较多的课后练习，并在每章后配有自测题，为不同层次的学生提供更多的练习空间。

本教材主要内容包括：一元函数微积分、空间解析几何简介、经济函数及应用等。本教材适用于高职高专院校三年制工科专业及管理专业 78～96 学时的教学。

本教材由内蒙古建筑职业技术学院组织编写，主编朱学荣，副主编于宏坤，主审安奇。第一章由葛文侠、马兰编写，第二章由葛文侠、杨培凤编写，第三章由于宏坤编写，第四章由朱学荣编写，第五章由李玉贤编写。全书由朱学荣、于宏坤负责统稿。

限于时间和水平，难免有不妥之处，诚恳地希望专家、同行及读者批评指正。

编　者

目　录

第一章　极限与导数

极限是微积分学中最基本、最重要的概念之一；导数是研究函数的变化率及变化性态的有力工具，在实践中有着广泛的应用．本章将讨论极限的概念和运算方法；研究导数的概念、运算法则．

第一节　函数的类型

一、分段函数

函数的表示法常用的有解析法、图示法以及表格法等．有时，我们会遇到一个函数在自变量不同的取值范围内用不同的式子来表示的情况．

例如：函数

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases},$$

是定义在区间$(-\infty,+\infty)$内的一个函数．当$x\geqslant 0$时，$f(x)=\sqrt{x}$；当$x<0$时，$f(x)=-x$．它的图像如图1-1所示．

像这样在自变量的不同变化范围内，对应规律用不同式子来表示的函数，叫做分段函数．

例1　设分段函数

$$f(x)=\begin{cases}x-1, & -1<x\leqslant 0\\ x^2, & 0<x\leqslant 1\\ 3-x, & 1<x\leqslant 2\end{cases}.$$

(1) 画出函数的图像；(2) 求此函数的定义域；

(3) 求$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f\left(\dfrac{3}{2}\right)$的值．

解　(1) 函数图像如图1-2所示；

(2) 函数的定义域为$(-1, 2]$；

(3) $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{3}{2}$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$，$f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{3}{2}$．

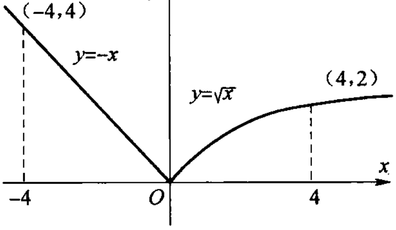


图1-1

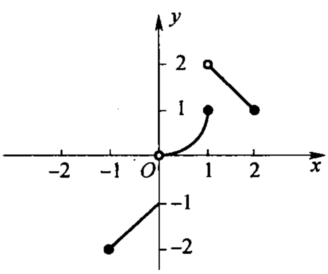


图1-2

二、初等函数

1. 基本初等函数

下列五种函数称为基本初等函数：

(1) 幂函数 $y=x^{\alpha}$（α 为实数）；

(2) 指数函数 $y=a^{x}$（$a>0$，$a\neq1$）；

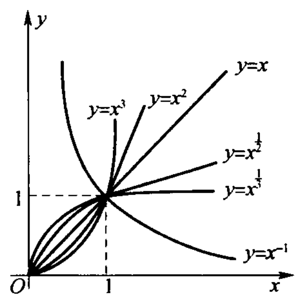
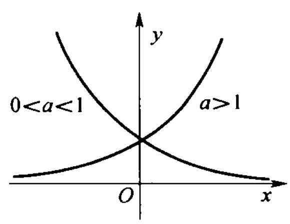
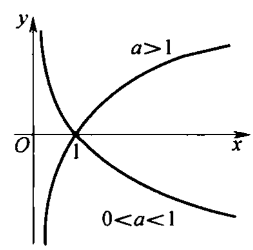
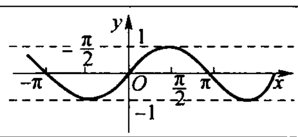
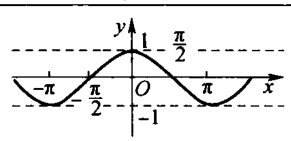
(3) 对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$，$a\neq1$）；

(4) 三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$；

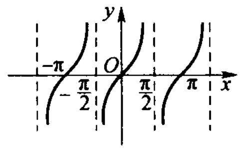
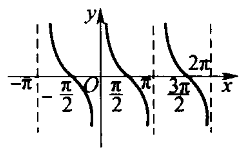
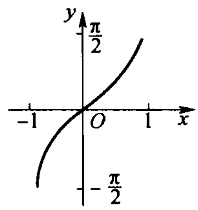
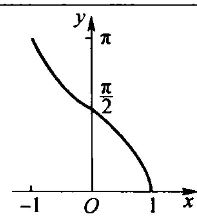
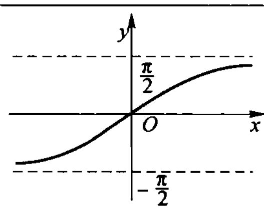
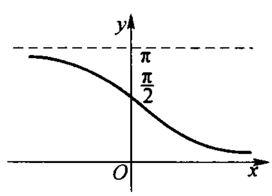
(5) 反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$.

以上五类函数的定义域、值域、图像和性质见表 1－1. 基本初等函数是我们今后学习各类函数的基础，请同学们记住它们的图像与主要性质.

表 1－1　基本初等函数的图像及其主要性质

名称	解析式	定义域和值域	图像	主要特性
幂函数	$y=x^{\alpha}$（$\alpha\in\mathbf{R}$）	依 α 不同而异，但在（0，$+\infty$）内都有定义		经过点(1，1). 在第一象限内，当 $\alpha>0$ 时，x^{α} 为增函数；当 $\alpha<0$ 时，x^{α} 为减函数.
指数函数	$y=a^{x}$（$a>0$ 且 $a\neq1$）	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		图像在 x 轴上方，都通过点(0，1). 当 $0<a<1$ 时，a^{x} 是减函数；当 $a>1$ 时，a^{x} 是增函数.
对数函数	$y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		图像在 y 轴右侧，都通过点(1，0). 当 $0<a<1$ 时，$\log_a x$ 是减函数；$a>1$ 时，$\log_a x$ 是增函数.
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数，周期 2π，有界.
	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数，周期 2π，有界.

续表

名称	解析式	定义域和值域	图像	主要特性
三角函数	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,\ +\infty)$		奇函数，周期 π，在 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加.
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,\ +\infty)$		奇函数，周期 π，在 $(0,\ \pi)$ 内单调减少.
反三角函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,\ 1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$		奇函数，单调增加，有界.
	$y=\arccos x$	$x\in[-1,\ 1]$ $y\in[0,\ \pi]$		单调减少，有界.
	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,\ +\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$		奇函数，单调增加，有界.
	$y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,\ +\infty)$ $y\in(0,\ \pi)$		单调减少，有界.

2. 复合函数

先看一个例子，设 $y=\sqrt{u}$，而 $u=1+x^2$，以 $1+x^2$ 代替 $\sqrt{u}$ 中的 u，得 $y=\sqrt{1+x^2}$，我们称它为由 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=1+x^2$ 复合而成的复合函数.

定义 1　设 $y=f(u)$，而 $u=\varphi(x)$，且函数 $\varphi(x)$ 的值域与函数 $f(u)$ 的定义域的交集非空，则 $y=f[\varphi(x)]$ 叫做 x 的复合函数，其中 u 叫做中间变量.

例 2　试求由函数 $y=u^3$，$u=\tan x$ 复合而成的函数.

解　将 $u=\tan x$ 代入 $y=u^3$ 中，即得所求复合函数 $y=\tan^3 x$.

有时，一个复合函数可能由三个或更多的函数复合而成. 例如，由函数 $y=2^u$，

$u=\sin v$，$v=x+1$，可以复合成函数 $y=2^{\sin(x+1)}$，其中 u 和 v 都是中间变量. 一个复合函数可以有有限个中间变量.

例 3 指出下列复合函数的复合过程.

(1) $y=\cos^2 x$； (2) $y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}}$； (3) $y=e^{\sin\sqrt{x+1}}$.

解 (1) $y=u^2$，$u=\cos x$；

(2) $y=\sqrt{u}$，$u=\cot v$，$v=\frac{x}{2}$；

(3) $y=e^u$，$u=\sin v$，$v=\sqrt{w}$，$w=x+1$.

3. 初等函数

由基本初等函数及常数经过有限次四则运算和有限次复合运算构成的，并且可用一个数学式子表示的函数，称为初等函数.

例如，$y=\sqrt{\ln 5x-3^x}$，$y=\frac{\sqrt[3]{3x}+\tan 5x}{x^3\sin x-2^{-x}}$都是初等函数. 今后我们所讨论的函数，绝大多数都是初等函数.

习题 1－1

1. 填空题.

(1) 设 $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{2x-1}$，则 $f(x)$的定义域为________；

(2) 设 $f(x)=\frac{1}{1+x}$，则 $f\left(\frac{1}{x}\right)=$________；

(3) $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\leqslant 0\\ \sin x, & x>0\end{cases}$，在 $x=\frac{\pi}{2}$时的函数值为________；

(4) 函数 $y=\sin^2(3x+1)$的复合过程为________.

2. 求函数的定义域.

(1) $y=\frac{1}{1-x^2}$； (2) $y=\frac{\sqrt{10-2x}}{3-x}$； (3) $y=\frac{2}{\lg(3-x)}$；

(4) $y=\arcsin\frac{x-1}{5}+\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}$； (5) $y=\frac{2x}{x^2-3x+2}$；

(6) $y=\sqrt{2+x}+\frac{1}{\lg(1-x)}$； (7) $y=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1\\ 1-x, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$.

3. 指出下列函数的定义域，求函数值并作出函数的图像.

(1) $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1+x, & x>1\end{cases}$，求 $f(0)$，$f\left(\frac{1}{2}\right)$，$f(1)$，$f(2)$；

(2) $y=f(x)=\begin{cases}2, & 1\leqslant x<2\\ x, & 0\leqslant x<1\\ \frac{1}{x}, & x<0\end{cases}$，求 $f\left(-\frac{1}{3}\right)$，$f(0)$，$f\left(\frac{3}{4}\right)$，$f(1)$.

4. 写出下列函数的复合过程.

(1) $y=e^{x^2}$；　　(2) $y=\sin x^3$；

(3) $y=\ln(\cos 3x)$；　　(4) $y=\sqrt{1-x^2}$；

(5) $y=\sqrt{\tan 2x}$；　　(6) $y=5^{\ln\sin x}$；

(7) $y=(1+\lg x)^7$；　　(8) $y=\sin^2(2x^2+3)$；

(9) $y=\arcsin\dfrac{x^2-1}{2}$；　　(10) $y=\ln^2(\ln x)$.

第二节　极限与连续

一、极限的概念

1. 数列的极限

我们来观察下面三个数列：

(1) 1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，…，$\frac{1}{n}$，…，通项 $x_n=\frac{1}{n}$；

(2) 0，1，0，1，0，1，…，通项 $x_n=\dfrac{1+(-1)^n}{2}$；

(3) $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{4}$，$\sqrt{5}$，…，通项 $x_n=\sqrt{n+1}$.

从上面三个数列的变化趋势可以看出，只有数列(1)当 n 无限增大时，数列无限接近于一个固定常数零，我们把具有这种变化趋势的数列称为有极限的数列，而数列(2)、(3)称为无极限的数列.

定义 1　对于数列$\{x_n\}$，如果当 n 无限增大时，x_n 无限趋近于一个固定的常数 A，则称数列$\{x_n\}$当 n 无限增大时，以 A 为极限，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A \text{ 或 } x_n\to A(n\to\infty).$$

数列$\{x_n\}$有极限，又称为数列收敛；数列$\{x_n\}$无极限，又称为数列发散.

下面几个结论，可作为我们求极限的公式，请同学们记住：

① $\lim\limits_{n\to\infty}C=C$ (C 为常数)；　　② $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^a}=0$ $(a>0)$；

③ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{q^n}=0$ $(|q|>1)$.

2. 函数的极限

(1) $x\to\infty$($x\to+\infty$或 $x\to-\infty$)时函数 $f(x)$的极限.

观察当 $x\to\infty$时函数 $y=\dfrac{1}{x}$的变化趋势. 由图 1-3 可见，当 $x\to\infty$(包括 $x\to+\infty$，$x\to-\infty$)时，函数 $y=\dfrac{1}{x}$都趋向于确定的常数 0.

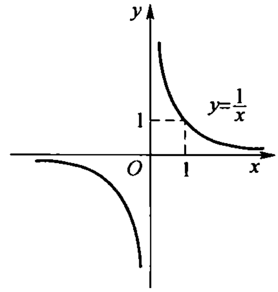


图 1-3

定义 2　设函数 $y=f(x)$，在$|x|>a(a>0)$时有定义. 如果当$|x|$无限增大时，函数 $f(x)$无限趋近于某个确定的常数 A，则称 A

为当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \quad 或\ f(x)\to A(x\to\infty).$$

若只当 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时，函数趋近于确定的常数 A，则记为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \quad 或\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=A.$$

例 1 观察下列函数的图像（见图 1－4），并填空：

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{x}=(\quad)$；　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}=(\quad)$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=(\quad)$；　　(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=(\quad)$.

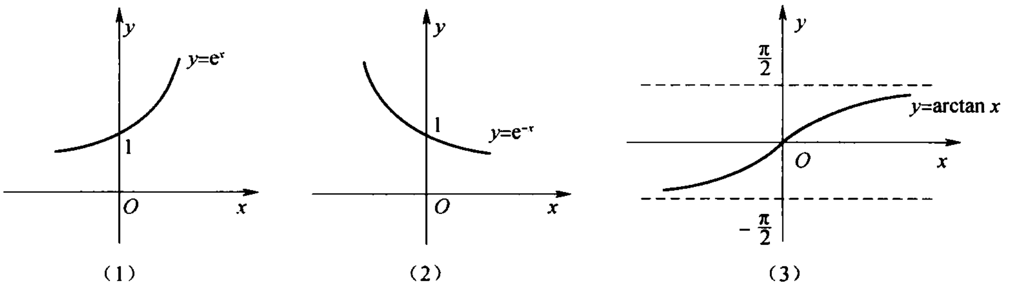


图 1－4

解 从图 1－4 观察到：

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{x}=0$；　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}=0$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$.

显然，当 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时函数 $y=\arctan x$ 不能无限趋近于同一个确定的常数，因此 $x\to\infty$ 时，函数 $y=\arctan x$ 的极限不存在.

由此我们得到结论：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A.$

(2) $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限.

首先引入“邻域”的概念：设 x_0 与 $\delta(\delta>0)$ 是两个实数，满足不等式 $|x-x_0|<\delta$ 的全体实数叫做点 x_0 的 δ 邻域，记作 $U(x_0,\delta)$. 点 x_0 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径.

显然，点 x_0 的 δ 邻域就是以 x_0 为中心的开区间 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$，如图 1－5 所示.

在 x_0 的 δ 邻域中去掉点 x_0，所得集合称为点 x_0 的去心 δ 邻域，记作 $\dot{U}(x_0,\delta)$，用区间可表示为 $(x_0-\delta,\ x_0)\cup(x_0,\ x_0+\delta)$.

现在我们考察当 $x\to1$ 时，函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的变化趋势.

当 $x\neq1$ 时，函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}=x+1$. 由图 1－6 可见，当 $x\to1$ 时，$y\to2$.

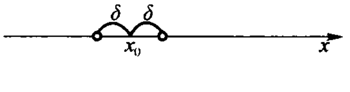


图 1－5

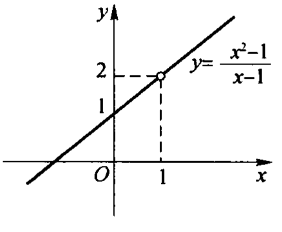


图 1－6

定义 3　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有定义，如果当自变量 x 无限接近于 x_0，即 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，则称 A 为当 $x\to x_0$ 时函数的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \quad 或\ f(x)\to A(x\to x_0).$$

在 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的定义中，x 趋向于 x_0 的路径有两条：从 x_0 的左侧无限接近于 x_0，记为 $x\to x_0^-$；从 x_0 的右侧无限接近于 x_0，记为 $x\to x_0^+$.

定义 4　如果当 $x\to x_0^+$ 时，函数 $f(x)$ 的值无限接近于一个确定的常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的右极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = A \quad 或\ f(x_0+0) = A.$$

如果当 $x\to x_0^-$ 时，函数 $f(x)$ 的值无限接近于一个确定的常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = A \quad 或\ f(x_0-0) = A.$$

显然，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$.

例 2　设 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ x+1, & x\geqslant 0\end{cases}$，讨论当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限是否存在.

解　当 x 从 0 的左侧无限接近于 0 时，有

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x-1) = -1;$$

当 x 从 0 的右侧无限接近于 0 时，有

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x+1) = 1.$$

函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的左、右极限都存在，但不相等，所以当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限不存在.

一般地，$\lim\limits_{x\to\infty} C=C$，$\lim\limits_{x\to x_0} C=C$，$\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$.

二、极限的运算

1. 极限的四则运算

设 $\lim f(x)$ 及 $\lim g(x)$ 都存在，则有如下法则：

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$；

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$；

(3) $\lim[C\cdot f(x)]=C\cdot\lim f(x)$（$C$ 为常数）；

(4) $\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$（$n$ 为正整数）；

(5) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}(\lim g(x)\neq 0)$.

说明：① 法则对于 $x\to x_0$，$x\to\infty$ 等情形均适用；

② 法则(1)和法则(2)均可推广至有限个函数的情形.

例 3　求 $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+x-2\right)$.

解　$\lim\limits_{x\to 2}(x^2+x-2)=\lim\limits_{x\to 2} x^2+\lim\limits_{x\to 2} x-\lim\limits_{x\to 2} 2=4+2-2=4.$

例 4 求$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$.

解 当 $x\to 3$ 时，分子及分母的极限都是零，不能直接使用法则(5). 由函数极限定义知，当 $x\to 3$ 时，其公因子 $x-3\neq 0$，故可约去.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}1}{\lim\limits_{x\to 3}(x+3)}=\frac{1}{6}.$$

例 5 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x^2-1}{4x^3-x^2+3}$.

解 当 $x\to\infty$时，分子、分母的极限都不存在，不能直接使用法则(5)，可以将分子、分母同时除以 x^3，再用法则，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2-1}{4x^3-x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^3}}{4-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^3}}=\frac{3}{4}.$$

用同样方法，可得如下结果

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\infty, & 当\ m<n\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & 当\ m=n\\ 0, & 当\ m>n\end{cases}\quad (a_0\neq 0,b_0\neq 0).$$

例 6 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}}{1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\cdots+\dfrac{1}{3^{n-1}}}$.

解 对于数列的无限项之和，我们可以采用先求前 n 项和，再求极限的方法.

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{1-\dfrac{1}{2}}}{\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{1-\dfrac{1}{3}}}=\frac{4}{3}.$$

2. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

函数$\dfrac{\sin x}{x}$的定义域为 $x\neq 0$ 的全体实数，当 $x\to 0$ 时，我们列出数值表(见表 1-2)，观察其变化趋势.

表 1-2

x(弧度)	± 1.00	± 0.1	± 0.01	± 0.001	…
$\dfrac{\sin x}{x}$	0.841 470 98	0.998 334 17	0.999 983 34	0.999 999 84	…

由表 1－2 可见，当 $x\to0$ 时，$\dfrac{\sin x}{x}\to1$. 根据极限的定义有

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

例 7 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin kx}{x}(k\neq0)$； (2) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$； (3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin kx}{x}=k\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin kx}{kx}=k\cdot1=k$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{\frac{1}{x}\to0}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$；

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=2\cdot\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]^2\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}\left[\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]^2=\dfrac{1}{2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

当 $x\to\infty$ 时，我们列出 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 的数值(见表 1－3)，观察其变化趋势.

表 1－3

x	…	10	100	1 000	10 000	100 000	…
$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	…	2.593 74	2.704 81	2.719 62	2.718 15	2.718 27	…
x	…	－10	－100	－1 000	－10 000	－100 000	…
$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	…	2.867 97	2.732 00	2.719 64	2.718 4	2.718 30	…

由表 1－3 可见，当 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\to\mathrm{e}$，根据极限的定义有

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e},$$

其中 e 是个无理数，其值为 2.718 281 828 459 045….

上式中，设 $u=\dfrac{1}{x}$，则 $x\to\infty$ 时，$u\to0$，于是又得

$$\lim_{u\to0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=\mathrm{e}.$$

例 8 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$； (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$； (3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}\right]^{\frac{1}{2}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$；