

A TEACHING HANDBOOK OF
comprehensively
fostering students' s
mathematics thinking

全面数学思维培养

教学手册 ②

MATHEMATICS THINKING

主编／程为麟 朱谦

光明日报出版社

思维破障

全面素质教育培养

教学下册 ②

1000

A TEACHING HANDBOOK OF
comprehensively
fostering students' s
mathematics thinking

全面数学思维培养 教学手册 ②

MATHEMATICS THINKING

主编 / 程为麟 朱谦

光明日报出版社

思维

手册



第四章 利用不等式理论实现 不等量变换思维与探 索性思维培养

作者：赵 喆

不等式是中学数学研究的重要内容，具有应用广泛、变换灵活的特点。它已渗透到了数学各个分支中，既是学习高等数学的基础工具，又是培养学生发展思维的好教材，在历年的高考数学试题中占有相当的比重，这些试题不仅测试有关不等式的基础知识、基本技能、基本方法，而且更有效地测试运算能力、逻辑推理能力，以及运用有关的知识 and 数学方法、考察分析问题和解决实际应用问题的综合能力，经常有综合性较强，难度较大的试题。

本章主要内容有不等式的性质、解不等式、不等式的证明、不等式的应用。

第一节 不等式的性质与定理

一、不等式的性质

1. (对称性): $a > b \Leftrightarrow b < a$
2. (传递性): $a > b, b > c \Rightarrow a > c$
3. (可加性): $a > b \Rightarrow a + c > b + c$
4. (与数相乘): $a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc$
 $a > b, c < 0 \Rightarrow ac < bc$
5. (同向相加): $a > b, c > d \Rightarrow a + c > b + d$

二、不等式的定理

定理 1 如果 $a, b \in \mathbb{R}$, 那么 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ (当且仅当 $a=b$ 时取 “=” 号).

推论 如果 $a, b \in \mathbb{R}^+$, 那么 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (当且仅当 $a=b$ 时取 “=” 号).

定理 2 如果 $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, 那么 $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ (当且仅当 $a=b=c$ 时取 “=” 号).

推论 如果 $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, 那么 $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ (当且仅当 $a=b=c$ 时取 “=” 号).

三、题型分析与思维培养

1. (90 年全国高考试题) 设命题甲为 $0 < x < 5$, 命题乙为 $|x-2| < 3$, 那么 ()

- (A) 甲是乙的充分条件, 但不是乙的必要条件
- (B) 甲是乙的必要条件, 但不是乙的充分条件
- (C) 甲是乙的充要条件
- (D) 甲不是乙的充分条件, 也不是乙的必要条件

【解】 $|x-2| < 3$ 解得 $-1 < x < 5$

由此可知: $0 < x < 5$ 时 $|x-2| < 3$ 成立

由 $-1 < x < 5$ 不能使甲 $0 < x < 5$ 成立故选 A

2. (92 年全国高考试题) 若 $\log_a 2 < \log_b 2 < 0$, 则 ()

- (A) $0 < a < b < 1$
- (B) $0 < b < a < 1$
- (C) $a > b > 1$
- (D) $b > a > 1$

【解】 由题设可知 $0 < a < 1, 0 < b < 1$

由对数函数图象, 容易得出 $0 < b < a < 1$, 选 B

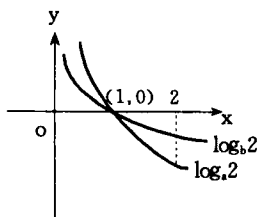


图 4-1-1

3. (94 年上海高考试题) 若 $0 < a < 1$, 则下列不等式正确的是 ()

- (A) $(1-a)^{\frac{1}{2}} > (1-a)^{\frac{1}{3}}$
- (B) $\log_{(1-a)} (1+a) > 0$
- (C) $(1-a)^3 > (1+a)^2$
- (D) $(1-a)^{1+a} > 1$

【解】 由 $0 < a < 1$ 时, $0 < 1-a < 1$

$\therefore y = (1-a)^x$ 为减函数

$\therefore (1-a)^{\frac{1}{2}} > (1-a)^{\frac{1}{3}}$, 选 A

4. 下列不等式中, 正确的个数为 ()

(1) $x + \frac{1}{x} \geq 2$

(2) $\sin \theta + \cos \theta \geq 2$ (θ 第一象限)

(3) $\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}} \geq 2$

(4) $x + \frac{2}{\sqrt{x}} - 1 \geq 2$

(A) 1个 (B) 2个 (C) 3个 (D) 4个

【解】(1) 仅当 $x > 0$ 时成立, (2) (3) 不具备等号条件, 只有 (4) 具备等号条件, 即 (4) 中 $x > 0$

$$\therefore x + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 3$$

$$\therefore x + \frac{2}{\sqrt{x}} - 1 \geq 2$$

$x=1$ 时取等号, 选 A

5. (90 全国高考试题) 已知 $h > 0$, 设命题甲为: 两个实数 a, b , 满足 $|a-b| < 2h$; 命题乙为: 两个实数 a, b , 满足 $|a-1| < h$, 且 $|b-1| < h$, 那么 ()

- (A) 甲是乙的充分条件, 但不是乙的必要条件
 (B) 甲是乙的必要条件, 但不是乙的充分条件
 (C) 甲是乙的充要条件
 (D) 甲不是乙的充分条件, 也不是乙的必要条件

【解】当 $|a-1| < h$, $|b-1| < h$ 时

$$\text{由 } |a-b| = |(a-1) - (b-1)| \leq |a-1| + |b-1| < h+h=2h$$

知命题乙可推出命题甲, 而命题甲不一定推出命题乙

如令 $a=-2, b=1, h=2$

$$\text{则 } |a-b| = |-2-1| < 4=2h, \text{ 但 } |a-1| = |-2-1| = 3 \not< 2=h$$

$\therefore$ 甲是乙的必要条件而不是充分条件, 选 (B)

6. 对下列四个不等式 (1) $x^2+3 > 2x$, (2) $a^2+b^2 \geq 2(a-b-1)$, (3) $a^5+b^5 \leq a^3b^2+a^2b^3$, (4) $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$, 其中恒成立的是 ()

- (A) 仅 (1) 和 (2) (B) 仅 (1) 和 (3)
 (C) 仅 (1)、(2) 和 (4) (D) 均恒成立

【解】(1) 变形为 $(x-1)^2+2 > 0$

$$(2) \text{ 变形为 } (a-1)^2 + (b+1)^2 \geq 0$$

$$(3) \text{ 变形为 } (a+b)(a-b)^2(a^2+ab+b^2) \leq 0, a > 0, b > 0, a \neq b \text{ 时不成立}$$

$$(4) a, b \text{ 异号不成立}$$

故 (1)、(2) 恒成立, 选 A

7. (89 年上海高考试题) 若 $a < b < 0$, 则下列不等关系中不能成立的是 ()

- (A) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ (B) $\frac{1}{a-b} > \frac{1}{a}$
 (C) $|a| > |b|$ (D) $a^2 > b^2$

【解】 $\because a < b < 0$,

$$\therefore ab > 0, \frac{a}{ab} < \frac{b}{ab} < 0$$

即 $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$, 则 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ 成立

由 $a < b < 0$ 可知有 $|a| > |b|$, $a^2 > b^2$ 均成立

对于 (B), 由 $\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a} = \frac{b}{a(a-b)}$

$\because a < b < 0$,

$\therefore a-b < 0, a < 0, b < 0$

故 $\frac{b}{a(a-b)} < 0$, 即 $\frac{1}{a-b} < \frac{1}{a}$,

$\therefore$ B 不成立, 故选 B.

8. (93 年全国高考试题) 若 a, b 是任意实数 $a > b$, 则 ()

(A) $a^2 > b^2$

(B) $\frac{b}{a} < 1$

(C) $\lg(a-b) > 0$

(D) $(\frac{1}{2})^a < (\frac{1}{2})^b$

【解】当 $a > b > 0$ 时, 可得 $a^2 > b^2$, $\frac{b}{a} < 1$, 但该题的条件是 $a > b$, 故 $a^2 > b^2$, $\frac{b}{a} < 1$ 不一定成立, 由 $\lg(a-b) > 0$, 需 $a-b > 1$, 即 $a > b+1$, 但由已知 $a > b$, 不能得到 $a > b+1$, 故 (C) 不一定成立, 对于 (D) 注意指数函数 $y = (\frac{1}{2})^x$, 当 $a > b$ 时得 $(\frac{1}{2})^a < (\frac{1}{2})^b$, 故 (D) 成立, 选 D.

9. (89 年上海高考试题) 若 $a > b > 0$, 下列各不等式中恒成立的是 ()

(A) $\frac{2a+b}{a+2b} > \frac{a}{b}$

(B) $\frac{b^2+1}{a^2+1} > \frac{b^2}{a^2}$

(C) $a + \frac{1}{a} > b + \frac{1}{b}$

(D) $a^a > b^b$

【解】(A) $\frac{2a+b}{a+2b} - \frac{a}{b} = \frac{(b-a)(b+a)}{b(a+2b)} < 0$, 不成立.

(B) $\frac{b^2+1}{a^2+1} - \frac{b^2}{a^2} = \frac{(a-b)(a+b)}{a^2(a^2+1)} > 0$, 正确.

(C) $a + \frac{1}{a} - b - \frac{1}{b} = (a-b)(1 - \frac{1}{ab})$ 不能确定.

(D) 令 $a = \frac{1}{3} > b = \frac{1}{4}$ 则 $a^a = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$, $b^b = \sqrt[4]{\frac{1}{4}}$, $(\sqrt[3]{\frac{1}{3}})^{12} = \frac{1}{81}$, $(\sqrt[4]{\frac{1}{4}})^{12} = \frac{1}{64}$.

$\therefore \frac{1}{81} < \frac{1}{64}$, 与 $a^a > b^b$ 矛盾 $\therefore$ D 不成立 故选 (B)

10. 若 $0 < a < 1$, $0 < b < 1$, 则 $a+b$, $2\sqrt{ab}$, a^2+b^2 , $2ab$ 中最大的一个是 ()

- (A) a^2+b^2 (B) $2\sqrt{ab}$
(C) $2ab$ (D) $a+b$

【解】 $\because 0 < a < 1, 0 < b < 1 \therefore a+b \geq 2\sqrt{ab} \quad a^2+b^2 \geq 2ab$,
而 $(a^2+b^2) - (a+b) = a(1-a) + b(1-b)$, $1-a > 0 \quad 1-b > 0$
 $\therefore a(1-a) + b(1-b) > 0$,
 $\therefore a^2+b^2$ 最大, 选 (A)

第二节 不等式的解法技巧与思维方法

一、概论

一元一次不等式和一元二次不等式是最简单的不等式, 其他不等式, 如高次不等式、分式不等式、无理不等式、指数和对数不等式、绝对值不等式、含有字母系数的不等式, 一般都转化为一元一次不等式(组)或一元二次不等式(组)来解.

解不等式时, 要注意不等式的同解变形等价性的使用, 对各类不等式要掌握它的特点和常规解法, 注意归纳解各类不等式的思路和方法.

在历年高考数学试题中, 都涉及到解不等式的题目, 对解有理不等式、解无理不等式、指数和对数不等式、绝对值不等式都进行了考察, 尤其是含字母系数的不等式渗透到各类不等式中考察, 增加了试题的综合性, 提高了试题的难度.

二、题型分析与思维培养

1. (87年广东高考试题) 不等式 $\frac{3x-1}{2-x} \geq 1$ 的解集是 ()

- (A) $\{x \mid \frac{3}{4} \leq x \leq 2\}$ (B) $\{x \mid \frac{3}{4} \leq x < 2\}$
(C) $\{x \mid x > 2 \text{ 或 } x \leq \frac{3}{4}\}$ (D) $\{x \mid x < 2\}$

【解】原不等式化为: $\frac{4x-3}{x-2} \leq 0$

解得: $\frac{3}{4} \leq x < 2$, 选 (B)

2. (97 年全国高考试题) 不等式组 $\begin{cases} x > 0 \\ \frac{3-x}{3+x} > \left| \frac{2-x}{2+x} \right| \end{cases}$ 的解集是 ()

(A) $\{x \mid 0 < x < 2\}$

(B) $\{x \mid 0 < x < 2.5\}$

(C) $\{x \mid 0 < x < \sqrt{6}\}$

(D) $\{x \mid 0 < x < 3\}$

【解】不等式组有解 $\begin{cases} x > 0 \\ \frac{3-x}{3+x} > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < 3$

由题意 不等式等价于 $\begin{cases} 0 < x \leq 2 \\ \frac{3-x}{3+x} > \frac{2-x}{2+x} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 2 < x < 3 \\ \frac{3-x}{3+x} > \frac{x-2}{2+x} \end{cases}$

即 $\begin{cases} 0 < x \leq 2 \\ (3-x)(2+x) > (2-x)(3+x) \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 2 < x < 3 \\ (3-x)(2+x) > (x-2)(3+x) \end{cases}$

解得 $0 < x \leq 2$ 或 $2 < x < \sqrt{6}$

综上 $0 < x < \sqrt{6}$, 选 (C)

【思维模式评注】从上述不等式解答中不难发现, 解分式、无理不等式、绝对值不等式时, 都是把它们转化为与之同解的整式不等式组.

3. (90 年上海高考试题) 不等式 $|\sqrt{x-2}-3| < 1$ 的解集是 ()

(A) $\{x \mid 5 < x < 16\}$

(B) $\{x \mid 6 < x < 18\}$

(C) $\{x \mid 7 < x < 20\}$

(D) $\{x \mid 8 < x < 22\}$

【解】原不等式等价于 $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ -1 < \sqrt{x-2}-3 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 6 < x < 18 \end{cases}$

即 $6 < x < 18$, 选 (B)

4. 已知 $f(x) = 2^x + 1$, $g(x) = 2x - 1$, 则不等式 $f[g(x)] > g[f(x)]$ 的解集是 ()

(A) $\{x \mid x < 2\}$

(B) $\{x \mid x > 2\}$

(C) $\{x \mid 0 < x < 2\}$

(D) $\{x \mid 1 < x < 2\}$

【解】 $\because f[g(x)] = 2^{2x-1} + 1$, $g[f(x)] = 2(2^x + 1) - 1$

则 $2^{2x-1} + 1 > 2^{x+1} + 1$

$\therefore 2x-1 > x+1$

$\therefore x > 2$, 选 (B)

5. 不等式 $\sqrt{4-x^2} + \frac{|x|}{x} \geq 0$ 的解集是 ()

(A) $\{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$

(B) $\{x \mid -\sqrt{3} \leq x < 0 \text{ 或 } 0 < x \leq 2\}$

(C) $\{x \mid -2 \leq x < 0 \text{ 或 } 0 < x \leq 2\}$

(D) $\{x \mid -\sqrt{3} \leq x < 0 \text{ 或 } 0 < x \leq \sqrt{3}\}$

【解】不等式有意义 $\begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow -2 \leq x < 0 \text{ 或 } 0 < x \leq 2$

不等式等价于 $\begin{cases} -2 \leq x < 0 \\ \sqrt{4-x^2} \geq 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 0 < x \leq 2 \\ \sqrt{4-x^2} \geq -1 \end{cases}$

解得 $\{x \mid -\sqrt{3} \leq x < 0\}$ 或 $\{x \mid 0 < x \leq 2\}$

综上所述不等式解集为 $\{x \mid -\sqrt{3} \leq x < 0 \text{ 或 } 0 < x \leq 2\}$, 故选 (B)

6. 不等式 $(x^2-4x-5)(x^2+8) < 0$ 的解集是 ()

(A) $\{x \mid -1 < x < 5\}$ (B) $\{x \mid 0 < x < 5\}$

(C) $\{x \mid 0 < x < 3\}$ (D) $\{x \mid 0 < x < 3\}$

【解】已知不等式虽是一个高次不等式, 但由于 $x^2+8 > 0$ ($x \in \mathbb{R}$), 故与已知不等式等价的是一元二次不等式 $x^2-4x-5 < 0$, 解为 $-1 < x < 5$, 故选 (A)

7. 若集合 $A = \{x \mid x^2-2x-3 \leq 0\}$, 集合 $B = \{x \mid x^3 > 1\}$, 则集合 $A \cap B$ 是 ()

(A) $\{x \mid 1 < x \leq 3\}$ (B) $\{x \mid x < 0\}$

(C) $\{x \mid 0 < x < 3\}$ (D) $\{x \mid -1 \leq x \leq 3\}$

【解】由 $x^2-2x-3 \leq 0$, 解得 $-1 \leq x \leq 3$

由 B 中 $x^3 > 1$, 得 $x > 1$,

$\therefore 1 < x \leq 3$, 选 (A)

8. 下列不等式中, 与不等式 $\frac{x-3}{2-x} \geq 0$ 同解的是 ()

(A) $(x-3)(2-x) \geq 0$ (B) $(x-3)(2-x) > 0$

(C) $\frac{2-x}{x-3} \geq 0$ (D) $\lg(x-2) \leq 0$

【解】不等式 $\frac{x-3}{2-x} \geq 0$ 中 $x \neq 2$, 可以 $x=3$, 排除 (A)、(C)、(B), 故选 (D)

9. 若 $A = \{x \mid |x-1| < 2\}$, $B = \{x \mid \frac{x-2}{x} > 0\}$, 则 $A \cap B =$ ()

(A) $\{x \mid -1 < x < 3\}$ (B) $\{x \mid x < 0 \text{ 或 } x > 2\}$

(C) $\{x \mid -1 < x < 0\}$ (D) $\{x \mid 0 < x < 2\}$

(E) $\{x \mid -1 < x < 0 \text{ 或 } 2 < x < 3\}$

【解】由 $|x-1| < 2$, 解得 $-1 < x < 3$

由 $\frac{x-2}{x} > 0$, 解得 $x > 2$ 或 $x < 0$

$\therefore -1 < x < 0$ 或 $2 < x < 3$, 故选 (E)

10. 已知不等式 $x^2-2x-3 < 0$ 的解集是 A, 不等式 $x^2+x-6 < 0$ 的解集是 B, 不等

式 $x^2+ax+b<0$ 的解集是 $A \cap B$, 那么 $a+b=$ ()

- (A) -3 (B) 1 (C) -1 (D) 3

【解】由 $x^2-2x-3<0$, 解得 $A = \{x \mid -1 < x < 3\}$

由 $x^2+x-6<0$, 解得 $B = \{x \mid -3 < x < 2\}$

$\therefore A \cap B = \{x \mid -1 < x < 2\}$

方程 $x^2+ax+b=0$ 的根为 -1, 2

$\therefore a = -[2 + (-1)] = -1, b = -2,$

$\therefore a+b = -3$, 选 (A)

11. 设全集 $I = \mathbb{R}$, 集合 $M = \{x \mid \sqrt{x^2} > 2\}$, $N = \{x \mid \log_x 7 > \log_3 7\}$, 则 $M \cap \bar{N} =$ ()

- (A) $\{x \mid x \leq -2\}$ (B) $\{x \mid x < -2 \text{ 或 } x \geq 3\}$
(C) $\{x \mid x \geq 3\}$ (D) $\{x \mid -2 \leq x \leq 3\}$

【解】 $\because M = \{x \mid x < -2 \text{ 或 } x > 2\}$

$N = \{x \mid 1 < x < 3\}, \bar{N} = \{x \mid x \leq 1 \text{ 或 } x \geq 3\}$

$\therefore M \cap \bar{N} = \{x \mid x < -2 \text{ 或 } x \geq 3\}$, 选 (B)

12. 不等式 $\frac{x^2+3x-4}{x^2+x-6} < 0$ 的解集是_____

【解】原不等式可化为 $(x-2)(x-1)(x+3)(x+4) < 0$

不等式解集为 $\{x \mid -4 < x < -3 \text{ 或 } 2 < x < 3\}$

13. 解不等式 $0 < x^2 - x - 2 < 4$ 所得解集为_____

【解】原不等式等价于 $\begin{cases} x^2 - x - 2 > 0 \\ x^2 - x - 2 < 4 \end{cases}$

不等式解集为 $\{x \mid -2 < x < -1 \text{ 或 } 2 < x < 3\}$

14. 不等式 $\frac{ax}{x-1} < 1$ 的解集为 $\{x \mid x < 1 \text{ 或 } x > 2\}$, 那么 a 的值为_____

【解】原不等式等价于 $[(a-1)x+1](x-1) < 0$

$\therefore x=2$ 是方程 $(a-1)x+1=0$ 的根,

$\therefore a = \frac{1}{2}$

15. (93 北京海淀区) 不等式 $|x-3| + |x+1| > 6$ 的解集为_____

【解】分 $x \leq -1, -1 < x \leq 3, x > 3$ 讨论

不等式解集为 $\{x \mid x < -2 \text{ 或 } x > 4\}$

16. (89 年全国高考试题) 不等式 $|x^2-3x| > 4$ 的解集是_____

【解法 1】作 $y = |x^2 - 3x|$ 的图象,

$$\therefore \{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > 4\}$$

【解法 2】由原不等式得 $x^2 - 3x > 4$ 或 $x^2 - 3x < -4$

$$\text{即 } x^2 - 3x - 4 > 0 \text{ 或 } x^2 - 3x + 4 < 0 \quad (\text{无解})$$

$$\text{由 } x^2 - 3x - 4 > 0 \text{ 得 } x < -1 \text{ 或 } x > 4$$

17. (95 年上海高考试题) 不等式 $\frac{2x-1}{x+3} > 1$ 的解集是_____

【解】由不等式得 $\frac{x-4}{x+3} > 0$,

$$\therefore x > 4 \text{ 或 } x < -3$$

18. (94 年上海高考试题) 不等式 $|x+1| < 1$ 的解集是_____

【解】原不等式可得出 $-1 < x+1 < 1$, 解得 $-2 < x < 0$, 解集为 $\{x \mid -2 < x < 0\}$

19. (91 年全国高考试题) 不等式 $6^{x^2+x-2} < 1$ 的解集是_____

【解】由 $6^{x^2+x-2} < 1$ 得 $x^2+x-2 < 0$, 于是 $-2 < x < 1$

20. (95 年全国高考试题) 不等式 $(\frac{1}{3})^{x^2-8} > 3^{-2x}$ 的解集是_____

【解】原不等式变形为 $3^{8-x^2} > 3^{-2x}$

$$\therefore 8-x^2 > -2x, \text{ 即 } (x+2)(x-4) < 0$$

$$\therefore -2 < x < 4, \text{ 即 } x \in (-2, 4)$$

21. 不等式 $\frac{1}{4^x-1} > \frac{1}{2^x-3}$ 的解集是_____

【解】令 $2^x = A$, 不等式变形为: $\frac{1}{A^2-1} > \frac{1}{A-3}$

$$\text{即 } \frac{1}{A^2-1} - \frac{1}{A-3} > 0 \Rightarrow \frac{A^2-A+2}{(A^2-1)(A-3)} < 0$$

$$\text{而 } A^2-A+2 > 0 \text{ 恒成立, 只要 } (A^2-1)(A-3) < 0$$

$$\text{即 } (A-1)(A+1)(A-3) < 0,$$

$$\therefore 1 < A < 3 \text{ 或 } A < -1$$

$$\therefore 1 < 2^x < 3 \text{ 或 } 2^x < -1 \text{ (无解)}$$

$$\text{而 } 0 < x < \log_2 3, \{x \mid 0 < x < \log_2 3\}$$

22. (91 年全国高考试题) 不等式 $\lg(x^2+2x+2) < 1$ 的解集是_____

【解】由 $\lg(x^2+2x+2) < 1$

$$\text{得 } 0 < x^2+2x+2 < 10$$

而 $x^2+2x+2>0$ 恒成立

$$\therefore x^2+2x+2<10$$

$$\therefore x^2+2x-8<0$$

$$\therefore -4<x<2, \{x \mid -4<x<2\}$$

23. 不等式 $\log_2 \left| x - \frac{1}{2} \right| < -1$ 的解集是_____

【解】由已知 $\left| x - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2}$,

$$\therefore 0 < x < 1, \text{ 且 } x \neq \frac{1}{2}$$

24. 解不等式 $2(x+1) + \frac{x-2}{3} > \frac{7x}{2} - 1$

【解】两边都乘以 6, 得: $12(x+1) + 2(x-2) > 21x - 6$

$$14x + 8 > 21x - 6, \text{ 移项, 整理得: } -7x > -14,$$

$$\therefore x < 2$$

故原不等式的解集为: $\{x \mid x < 2\}$

【思维模式评注】一元二次不等式的解法与一元二次方程相同, 只是两边同乘以代数式时, 注意其自身的符号, 从而再决定不等号方向是否改变.

25. 解关于 x 的不等式 $(a-b)x < a^2 - b^2$

【思维引导】对 x 的系数进行分类讨论:

【解】当 $a-b > 0$, 即 $a > b$ 时, 其解集为 $\{x \mid x < a+b\}$

当 $a-b < 0$, 即 $a < b$ 时, 其解集为 $\{x \mid x > a+b\}$

当 $a-b = 0$, 即 $a = b$ 时, 其解集为 $\emptyset$

【思维模式评注】对于未知量系数为字母时, 需对字母进行分类讨论.

26. 解不等式组 $\begin{cases} (a+3)x < 5a+6 \\ x > 3 \end{cases}$

【解】显然 $a+3 \neq 0$, 则 $a \neq -3$

若 $a+3 > 0$, 即 $a > -3$, 得 $x < \frac{5a+6}{a+3}$

(i) 若 $\frac{5a+6}{a+3} > 3$, 即 $a > \frac{3}{2}$, 故当 $a > \frac{3}{2}$ 时, 解为: $3 < x < \frac{5a+6}{a+3}$

(ii) 若 $\frac{5a+6}{a+3} \leq 3$, 即 $a \leq \frac{3}{2}$, 从而 $-3 < a \leq \frac{3}{2}$ 时无解

若 $a+3 < 0$, 即 $a < -3$, 得: $x > \frac{5a+6}{a+3}$

此时, 若 $\frac{5a+6}{a+3} \geq 3 \Rightarrow a \geq \frac{3}{2}$ 与 $a < -3$ 矛盾

$$\text{若 } \frac{5a+6}{a+3} < 3 \Rightarrow a < \frac{3}{2}$$

故当 $a < -3$ 时, 解为 $x > 3$

综上所述, 原不等式的解集为:

$$\text{当 } a > \frac{3}{2} \text{ 时, } \{x \mid 3 < x < \frac{5a+6}{a+3}\}$$

$$\text{当 } a < -3 \text{ 时, } \{x \mid x > 3\}$$

$$\text{当 } -3 < a \leq \frac{3}{2} \text{ 时, } \emptyset$$

$$27. \text{ 解不等式组 } \begin{cases} 10+2x \leq 11+3x & (1) \\ 5x-3 \leq 4x-1 & (2) \\ 7+2x > 6+3x & (3) \end{cases}$$

【解】(1) 得 $x \geq -1$

(2) 得 $x \leq 2$

(3) 得 $x < 1$

故原不等式组的解集为 $\{x \mid -1 \leq x < 1\}$

【思维模式评注】不等式组的解集为构成不等式组的每一个不等式解集的交集.

$$28. \text{ 解不等式 } x^2 + x - 30 > 0$$

【解】原不等式可化为: $(x+6)(x-5) > 0$

$$\therefore x < -6 \text{ 或 } x > 5$$

故原不等式的解集为: $\{x \mid x < -6 \text{ 或 } x > 5\}$

$$29. \text{ 解不等式 } -x^2 + 5x > 6$$

【解】原不等式可化为: $(x-2)(x-3) < 0$

$$\therefore 2 < x < 3$$

故原不等式的解集为 $\{x \mid 2 < x < 3\}$

$$30. \text{ 解不等式 } x^2 - x + 2 > 0$$

【解法 1】 $\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$, x^2 的系数为 1, 对一切实数 x , 不等式都成立

故原不等式的解集为 $\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$

【解法 2】原不等式可化为: $x^2 - x + 2 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4} > 0$

故原不等式的解集为 $\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$.

$$31. \text{ 解不等式 } 56x^2 + ax < a^2 \quad (a \in \mathbb{R})$$

【解】原不等式可化为: $(7x+a)(8x-a) < 0$

$$\text{而 } 56x^2 + ax - a^2 = 0 \text{ 的两根是 } x_1 = -\frac{a}{7}, x_2 = \frac{a}{8}$$

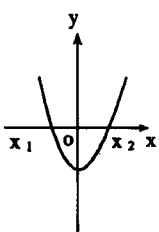
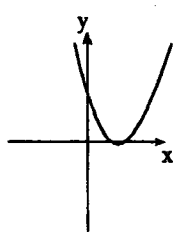
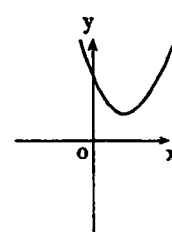
故原不等式的解集为:

(1) 当 $a > 0$ 时, $\{x | -\frac{a}{7} < x < \frac{a}{8}\}$

(2) 当 $a < 0$ 时, $\{x | \frac{a}{8} < x < -\frac{a}{7}\}$

(3) 当 $a = 0$ 时, $\emptyset$

【思维模式评注】任何一个一元二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 或 $ax^2 + bx + c < 0$ ($a > 0$) 的形式的解集, 与一元二次方程的判别式和根及二次函数的图象都有着密切关系, 如下表所示.

$\Delta = b^2 - 4ac$		$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a > 0$) 的根		有两个相异实根 $x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (取 $x_1 < x_2$)	有两个相等实根 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	没有实根
一元二次不等式的解集	$ax^2 + bx + c > 0$ ($a > 0$)	$\{x x < x_1 \text{ 或 } x > x_2\}$	$\{x x \in \mathbb{R} \text{ 且 } x \neq -\frac{b}{2a}\}$	实数集 $\mathbb{R}$
	$ax^2 + bx + c < 0$ ($a < 0$)	$\{x x_1 < x < x_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) 图象				

32. 解关于 x 的不等式 $\frac{(x+4a)(x-6a)}{2a+1} > 0$

【解】(1) 当 $2a+1 > 0$, 即 $a > -\frac{1}{2}$ 时, 原不等式化为: $(x+4a)(x-6a) > 0$

(A) $a > 0$ 时, $x < -4a$ 或 $x > 6a$, 不等式解集为 $\{x | x < -4a \text{ 或 } x > 6a\}$

(B) $-\frac{1}{2} < a < 0$ 时, $6a < -4a$, 其解集为 $\{x \mid x < 6a \text{ 或 } x > -4a\}$

(C) $a=0$ 时, 解集为 $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ 且 } x \neq 0\}$

(2) 当 $a < -\frac{1}{2}$ 时, 原不等式化为 $(x+4a)(x-6a) < 0$

$\therefore 6a < x < -4a$, 其解集为 $\{x \mid 6a < x < -4a\}$

33. 解不等式 $(1-m)x^2 + 2mx - (m+2) > 0 \ (x \in \mathbb{R})$.

【解】因为 $m \in \mathbb{R}$, 所以原不等式可分下列情况, $m=1$ 与 $m \neq 1$, 当 $m \neq 1$ 时, 二次项的系数不确定, 需进一步再讨论

(1) 当 $m=1$ 时, 原不等式化为 $2x-3 > 0$

$\therefore x > \frac{3}{2}$

$\therefore$ 当 $m=1$ 时, 不等式的解集为 $\{x \mid x > \frac{3}{2}\}$

(2) 当 $m < 1$ 时, $1-m > 0$

$$\Delta = 4m^2 + 4(1-m)(m+2) = 4(m^2 - m^2 - m + 2) = 4(2-m)$$

$\therefore m < 1$,

$\therefore 2-m > 0$

即 $\Delta > 0$,

$$\therefore x < \frac{-m - \sqrt{2-m}}{1-m} \text{ 或 } x > \frac{-m + \sqrt{2-m}}{1-m}$$

$\therefore$ 当 $m < 1$ 时, 原不等式的解为:

$$\{x \mid x < \frac{-m - \sqrt{2-m}}{1-m} \text{ 或 } x > \frac{-m + \sqrt{2-m}}{1-m}\}$$

(3) 当 $m > 1$ 时, 原不等式化为 $(m-1)x^2 - 2mx + (m+2) < 0$

$$\Delta = 4m^2 - 4(m-1)(m+2) = 4(2-m)$$

①当 $1 < m < 2$ 时, $\Delta > 0$

$$\therefore \frac{m - \sqrt{2-m}}{m-1} < x < \frac{m + \sqrt{2-m}}{m-1}$$

$\therefore$ 当 $1 < m < 2$ 时, 原不等式的解集为:

$$\{x \mid \frac{m - \sqrt{2-m}}{m-1} < x < \frac{m + \sqrt{2-m}}{m-1}\}$$

②当 $m=2$ 时, 原不等式可化为:

$$x^2 - 4x + 4 < 0, \text{ 即 } (x-2)^2 < 0 \text{ 无解}$$

$\therefore$ 当 $m=2$ 时, 原不等式解集为 $\emptyset$

③当 $m > 2$ 时, $\Delta < 0$, 原不等式无解

$\therefore$ 当 $m > 2$ 时, 原不等式解集为 $\emptyset$

【思维模式评注】当不等式中含字母系数时, 应按字母的取值范围分类讨论, 在用

图象法解一元二次不等式时，要注意其二次项系数为正的条件.

34. 若 $|P| < 2$ ，不等式 $(\log_2 x)^2 + P(\log_2 x) + 1 > 2\log_2 x + P$ 恒成立，解关于 x 的不等式.

【解】将原不等式化为关于 y 、 P 的一次方程

$$y = f(P) = (\log_2 x - 1)P + (\log_2 x)^2 - 2\log_2 x + 1$$

$\because y = f(P)$ ，在 $|P| < 2$ 时，其值为正

$$\therefore \begin{cases} f(-2) \geq 0 \\ f(2) \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2(\log_2 x - 1) + (\log_2 x)^2 - 2\log_2 x + 1 \geq 0 \\ 2(\log_2 x - 1) + (\log_2 x)^2 - 2\log_2 x + 1 \geq 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\text{解得 } 0 < x \leq \frac{1}{2} \text{ 或 } 8 \leq x$$

故原不等式的解为：

$$\{x \mid 0 < x \leq \frac{1}{2} \text{ 或 } x \geq 8\}$$

35. 解关于 x 的不等式 $2x - 1 > P(x^2 - 1)$ ，对于 $|P| \leq 2$ 的实数恒成立.

【思维引导】函数、方程、不等式紧密相关，可构造适当的函数，利用函数的性质使问题变得易解.

【解法 1】设 $f(P) = (x^2 - 1)P + 1 - 2x$ ，它是关于 P 的一次（或零次）式

$f(P) < 0$ 对 $-2 \leq P \leq 2$ ，恒成立

由 $f(x)$ 的保号性，则有 $f(2) < 0$ ，且 $f(-2) < 0$

$$\text{解得：} \frac{\sqrt{7}-1}{2} < x < \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

【解法 2】当 $x^2 - 1 > 0$ 时， $P < \frac{2x}{x^2 - 1}$ 对于一切 $-2 \leq P \leq 2$ ，恒成立

$$\text{则有 } \frac{2x-1}{x^2-1} > 2 \Rightarrow 1 < x < \frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ 或 } -1 < x < \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{即 } 1 < x < \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

当 $x^2 - 1 < 0$ ， $P > \frac{2x-1}{x^2-1}$ ，对 $-2 \leq P \leq 2$ 成立

$$\text{则 } \frac{2x-1}{x^2-1} < -2 \Rightarrow \frac{\sqrt{7}-1}{2} < x < 1 \text{ 或 } \frac{-1-\sqrt{7}}{2} < x < -1$$

$$\text{即 } \frac{\sqrt{7}-1}{2} < x < 1, \text{ 对 } x=1 \text{ 时，符合条件}$$

$$\text{综合得其解集为 } \{x \mid \frac{\sqrt{7}-1}{2} < x < \frac{1+\sqrt{3}}{2}\}$$