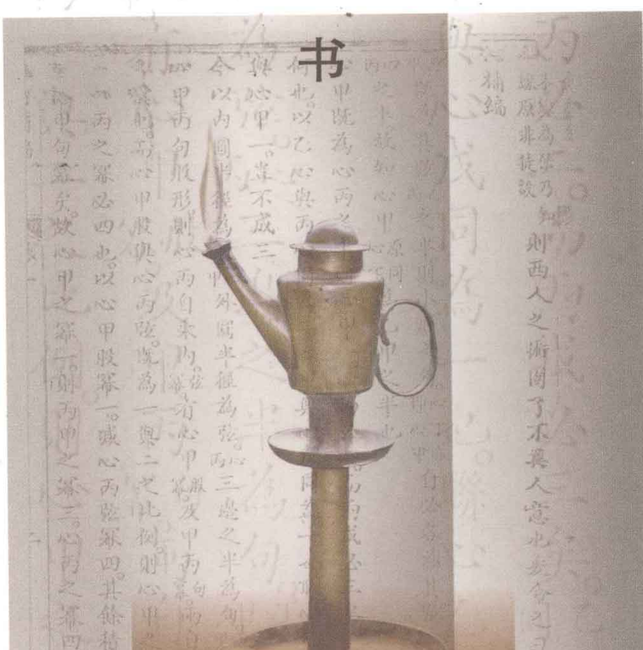
梅文鼎评传（下）

李迪 著

匡亚明 主编

中国思想家评传丛书



南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

梅文鼎评传/李迪著. —南京:南京大学出版社,
2011.4
(中国思想家评传丛书/匡亚明主编)
ISBN 978-7-305-06057-1

I. 梅… II. 李… III. 梅文鼎(1633~1721)-评传
IV. K826.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 083777 号

中国思想家评传丛书
(典藏版)
梅文鼎评传
李 迪 著

南京大学出版社 出版
(南京大学校内 邮政编码:210093)
安徽省儒林图书有限公司 发行
网址:www.rulin.com.cn
三河市华新科达彩色印务有限公司 印刷
开本 660×960 1/16 印张 32.5 字数 338 千
2011 年 4 月第 1 版 第 1 次印刷
ISBN 978-7-305-06057-1

定价:64.00 元(上、下)

中国思想家评传丛书

第八章　梅文鼎的数学思想

梅文鼎的会通中西思想，体现在他研究的各个方面，前一章已论述了在天文历法方面的思想，本章则讲述他在数学领域的会通中西思想及其他思想。

梅文鼎的数学研究内容相当广泛，可以说他当时能接触到的不论中国传统数学还是从西方传进的，包括笔算、计算工具，中国传统的勾股、方程、立体几何、三角学、差分法，《几何原本》等。梅文鼎的整本数学著作有《笔算》、《筹算》、《度算释例》、《少广拾遗》、《方程论》、《方圆幂积》、《几何补编》、《环中黍尺》、《堑堵测量》、《方田通法》、《平立定三差详说》等，另在《梅氏历算全书》中有《勾股阐微》一书，在《梅氏丛书辑要》中又分为《勾股举隅》和《几何通解》两书，但有很大变动，原书的最后部分大多被删除。本章无法详细介绍相关的数学内容，只能简要予以说明，主要讲述数学思想。

一、会通中西与数学研究

梅文鼎在学术上的会通中西思想，既不是先天的，也不是突然冒出来的，而是通过历算研究逐渐形成的。他研究了中国的历算，又研究了从西方传进来的历算，摒弃了固有中国传统历算的部分弊端，接受了西方历算部分正确的观点，而且将他们会通。这在前两章都已讲过，这里再结合数学研究予以说明。

如上所述，梅文鼎的数学研究，涉及到当时已有的全部数学。① 从分支方面来说，他研究的数学包括了算术、代数、几何和三角，但是就中国传统数学来说，主要有量法和算术，而量法"极于勾股"，算术"极于方程"②。因此，梅氏在这两方面，都进行了专门研究。以下为叙述方便起见，仍按分支进行。

在算术方面，他研究过从西方传进来的笔算、纳披尔筹算和比例规。后两种都是当时西方流行的计算工具。

笔算在梅氏之前，孙元化曾有过研究，写有一本《太西算要》，没有出版，只有抄本流传至今。以"笔算"为名的著作，梅氏是中国第一人，其著作《笔算》也是第一部自著的专著。梅氏认为笔算有不少优点，与筹算相比，本书第六章讲述比较方法时，曾引及"笔算之便与筹算同，然筹仍资笔，而笔则不假于筹。于文人之用尤便。"在这句话之下有自注说："笔算无歌

① 本部分主要参考了李迪、郭世荣：《清代著名天文数学家梅文鼎》的第三章。

② ［清］梅文鼎：《方程论 · 发凡》。

括，最便学习，又无妨应酬，久可复核，与筹算同，详筹算书。”①这里所说的筹算显然是纳披尔筹算，而不是中国传统筹算。在叙述上，则是中西融会的做法。

《笔算》书中讲了十进制进位法、小数、分数、整数的四则运算、开平、立方、各种比例等。其中关于小数的记法有一定特点，他认为：

> 乘除之难，在于定位，而畸零为尤难。所以者何？凡定位以单数为根，而畸零无单位可言故也。②

在实际运算中，梅氏在列式时，混合小数的“实”（被除数）的整数最末一位之右侧加一个“根”字。

这种列式并不是普遍使用，仅是在做乘除法时怕计算结果引起混乱而采取的办法。不久，在《数理精蕴》中可能受西方影响而采用了小数点。

在《笔算》中涉及到了算术基本运算规律，归结起来有加法结合律、加法交换结合律、乘法交换律、乘除互换律和指数运算律等，这些已在第六章讲过。对于指数运算律出现在《少广拾遗》中，其中用到了相当于下面的式子：

$$(a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}}=(a^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{m\times n}},$$
$$(a^{m})^{n}=(a^{n})^{m}=a^{mn}。$$

在代数方面，梅文鼎主要研究了两个问题，即中国传统的

① ［清］梅文鼎：《笔算·发凡》，1693。
② ［清］梅文鼎：《笔算》卷4。

“方程”问题和内插法问题，各有著作《方程论》和《平立定三差详说》。

中国传统方程，最早出现在《九章算术》一书中，所解决的问题相当于现在的线性方程组。到明代时，常以未知数的个数，即色数进行分类，如有三个未知数就叫三色，等等。梅氏认为这样分类不反映方程的本质，应以“和较”来分，他说：“万算皆生于和较，和较可以御万算，分含之义也。”“和较者万算之纲也，算之至于勾股、方程，至矣尽矣，窥高致远，探颐穷幽，无所不备，然其用不出于和较。”①因而他首先在书中提出“正名”问题，把方程按照系数的符号变化情形重新进行分类，共有四种情形：

(1)“和数方程”：“和者无正负”，即每个方程的系数符号一致，不变号；

(2)“较数方程”：“较者有正负”，即每个方程的系数都有正有负，符号是改变的；

(3)“和较杂方程”：“杂者半有正负，半无正负”，即在方程组中有的方程的系数不变号，有的方程系数变号；

(4)“和较交变方程”：“变者，或先无正负而变为有正负，或先有正负而变为无正负。”这是说在消元过程中“和数方程”与“较数方程”由一者转变为另一者而新产生的方程。

梅氏解方程的一般方法是布列方程后互乘对减，逐次消元，最后得“三角形矩阵”，再代回求得各未知数。他发现，可利用缺项来减少运算步骤。例如当一行有缺项时，就可省一次消元，又如当两行中某一未知数的系数一个为另一个的若

① ［清］梅文鼎：《方程论》卷1“正名”。

干倍,则可省乘一次,等等。他具体分析了三、四、五、六元方程的"省算"情况,得出了一般性结果:n 元方程组要消去一元需相减 $\frac{n(n-1)}{2}$ 次,如有空位,则至多可减少运算 $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ 次,因此,要消去一元,至少需运算 $(n-1)$ 次。梅氏又讨论了三种特殊方程的求解方法,研究了他认为的五种错误,但梅氏所说有的正确,论述清晰,有的则不正确,论述也十分牵强。对方程理论的研究,由于当时条件的限制,梅氏未能完全达到自己的目的。

他对于内插法的研究,主要来自《授时历》。该历对太阳在黄道上的运行,把由冬至到春分和由秋分到冬至实际运行 88 日 91 刻,如按理论计算为一周天的四分之一为 91 日 31 刻,相差 2 日 40 刻。为了计算出每日太阳在黄道上实际运行与平均运行的差,要用内插法。把 88 日 91 刻分为相等的 6 段,称为段日。梅氏有下列一段精彩论述:

> 考《历草》①并以盈缩日数厘为六段,各以段日除其段之积度得数乃相减为一差,一差又相减为二差,则其数齐同,乃缘此以生定差及平差、立差。定差者,盈缩历初日最大之差也。于是以平差、立差减之,则为每日之定差矣。

设段日为 l,则有 $2l,3l,4l,5l,6l$,其积差为 $f(l)$,$f(2l)$,

① "《历草》"指《授时历》的"历草"。

$f(3l)$,$f(4l)$,$f(5l)$,$f(6l)$。求得 $F(nl)$ 和一次差 $\Delta F(nl)$,二次差 $\Delta^2 F(nl)$:

$$\Delta F(nl)=f[(n+1)l]-f(nl);$$
$$\Delta^2 F(nl)=\Delta F[(n+1)l]-\Delta F(nl)。$$

由此可求得平、立、定三差:

$$\text{定差}=F(x+l)-\Delta F(x+l)+\Delta^2 F(x+l)=a;$$
$$\text{平差}=\frac{1}{l}\left[\Delta F(x+l)-\frac{3}{2}\Delta^2 F(x+l)\right]=b;$$
$$\text{立差}=\frac{1}{l^2}\left[\frac{\Delta^2 F(x+l)}{2}\right]=c,$$

又因而可得平、立、定三差公式:

$$f(x+nl)=nla-(nl)^2 b-(nl)^3 c,$$

并可得三次等间距内插法公式:

$$f(x+nl)=f(x)+(nl)\cdot\Delta f(x)+\frac{(nl)(nl-1)}{2!}\Delta^2 f(x)$$
$$+\frac{(nl)(nl-1)(nl-2)}{3!}\Delta^3 f(x),$$

其中 $f(x)=0$。

梅氏的这一工作,虽然没有多高的创造性,但整理得比较清楚。另外他对于高次开方等问题也有一定研究。

梅氏在几何方面的工作较多,而且有较多的创造性。他的平面几何著作有《几何摘要》、《几何补编》、《几何通解》和《方圆幂积》等。内容比较丰富,简单地说,有如下七项:

（1）对宋代秦九韶提出的“三斜求积”公式

$$S_{\Delta}=\sqrt{\frac{1}{4}\left[b^{2}c^{2}-\left(\frac{c^{2}-a^{2}+b^{2}}{2}\right)^{2}\right]}$$

给予了证明。（其中 a,b,c 为斜三角形的三边）

（2）对勾股定理给出两种证明，都是用“出入相补原理”。

（3）对勾股相求的研究。

（4）对勾股测望术的研究，主要是关于三国时刘徽的“重差术公式”给予证明。

（5）研究了平面图形互容问题。这又分为三角形内容圆、三角形内容方、圆内容圆、圆方互容、正三角形与圆互容等。其中圆内容圆比较新颖，是在一个给定的圆内作几个相等的外切小圆，又都与给定圆相内切，如图 8.1。在日本称为累圆术，并有很大发展。

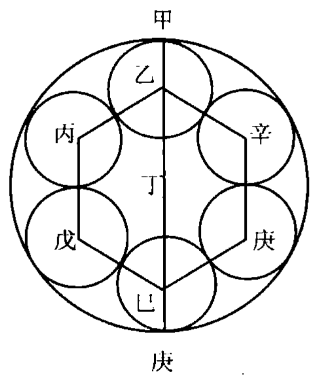


图 8.1　圆内容圆图

（6）理分中末线，即现代所说的“黄金分割”（golden section），在 17 世纪中国平面几何发展中有相当大的重要性。

（7）“以量代算”的平面几何图解法，即用直尺圆规准确地确定所需的解，也就是解的存在性。梅氏还讨论了解的惟一性问题，且必须根据作法证明所求出之解的正确性。

在立体几何方面，梅氏主要有《几何补编》和《方圆幂积》两书。归纳起来，梅氏的结果有以下几项：

（1）球体积和表面积。他利用中国传统的割补方法论证：① 圆柱的体积是同底等高圆锥体积的三倍；② 球体积是外切圆柱体积的 2/3，表面积也有相同比例；③ 球的表面积是同径大圆面积的 4 倍；④ 球体积是以大圆为底、半径为高的圆锥体积的 4 倍；⑤ 球缺的体积是它所在球扇形体积的 5/8。

（2）对正多面体和半正多面体的研究。中国古代在这方面没有研究，只在研究体积时有涉及正六面体和正四面体的情形，至于其他正多面体和半正多面体都没有讨论。明末《崇祯历书》介绍了西方这方面的内容，梅文鼎又观察到儿童玩的方灯和圆灯，受到启发，对正多面体和半正多面体进行了研究，取得了一些成果：把正多面体按面分为全等的正棱锥，每个可称为分体；计算了分体的底面积；求分体的高度；计算分体的体积；面数乘以分体体积等于总体体积。

（3）多面体及球的互容的研究。梅氏具体研究了正四、六、八、十二及二十面体与方灯、圆灯与球等各种立体间的互容关系，也讨论了两个多面体相容时切点的个数和位置以及相应线段的比例等。

（4）研究了多面体之间的各种比例关系，计算了某些棱的长度。

（5）他提出一种"立三角法"的概念。立三角实即三棱锥，是一种四面体，其特殊情形为正四面体。梅氏研究了正四面体的重心；他把立三角形作为多面体的基本形状，是"量体之密率"。

梅氏在三角学方面的研究，也比较突出，包括平面三角和球面三角。这些内容首先见于《崇祯历书》。他自己写有

《平三角举要》、《弧三角举要》、《环中黍尺》和《堑堵测量》四部著作。“三角”一词是梅氏较早在中国使用①,“平三角”即平面三角,“弧三角”即球面三角。《平三角举要》5 卷,书中首先讲述一些概念叫“测算名义”,包括点、线、面、体、角、弧,以及三角中常用的名词的解释,如“通弦正弦”、“正矢大矢”、“割线切线”、“割圆八线”、“八线表”、“余弦”等等。早期传到中国的三角是用相关的 8 条线段来表示它们的值。正弦线、余弦线、正切线、余切线、正割线、余割线、正矢线与余矢线(如图 8.2),叫做八线,但八线并不是平等的,梅氏指出:“正弦为八线之主”,他认为:

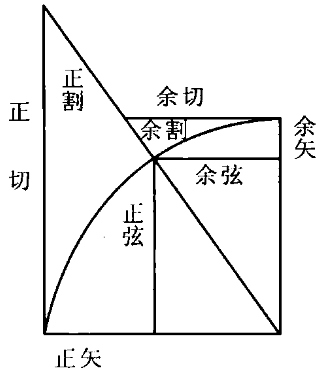


图 8.2　八线

> 割圆之法,皆作勾股于圆内,以先得正弦,故古人只用正弦,亦无不足。今用割切诸线,而皆生于正弦。

梅氏对于前人提到的若干三角基本定理给予了自己的新证明,主要有正弦定理、正切定理和半角定理。这些定理在研究工作中都是常用的结果。

球面三角是梅氏研究的重点,在他的四部著作中有三部

① 稍早的薛凤祚已用过。

是关于这方面的研究。球面三角是研究球面上的以弧为边的三角，其中的关键是弧必须是大圆的一段。他以天球为模型，其上的经线、赤道、黄道都是大圆，但纬线除赤道线外都不是。球面三角形和平面三角形，有很大不同，如平面三角形内角和为 180°，球面三角形则为 180°到 540°之间。为说明平面三角形与球面三角形之异同，现把梅氏之比较研究列表于下（表 8.1）：

表 8.1　平面三角形与球面三角形之比较

平面三角形		球面三角形	
1	三内角之和等于 180°	1	三内角之和在 180° 与 540°之间
2	边无限制，可大可小①	2	边必在 180° 以下，且三边之和小于 360°
3	已知两角可得第三角	3	由两角不可得第三角
4	如有一角为直角，其余两角皆为锐角	4	如有一角为直角，其余两角仍有各种可能
5	如有一角为钝角，其余两角皆为锐角	5	可能有两个或三个钝角
6	有相似形和全等形	6	有全等形，无相似形
7	三边可求角，三角不可求边	7	三边可求角，三角亦可求边
8	八线只适用角	8	八线同时适用于角和边
9	角的八线与边成比例	9	角之八线与边之八线成比例
10	边能度量长度	10	边不能量长度，只有弧度

① 两边之和必须大于第三边。

通过这个比较表可以看出：两者大多不相同，相同或相似的极少。由于这些差别，解球面三角形的方法也有特殊性。同样有球面直角三角形和斜三角形两大类问题，在实际解题时，后一类中有一部分可通过作垂弧的方法变成前者，也就是从一个顶点向对边作垂弧，如三角形乙丙丁为斜三角形，而乙甲为所作的垂弧，但甲点可在丙丁之内［如图8.3(a)］，也可在丙丁之外［图8.3(b)］。这就把斜三角形变成两个球面直角三角形乙丙甲和乙丁甲。

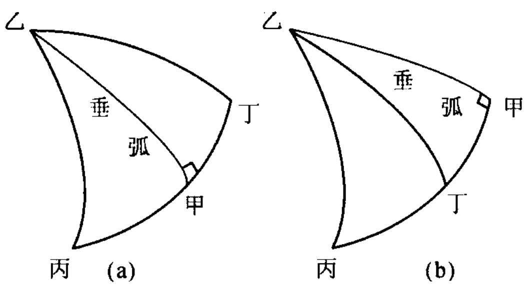


图8.3　垂弧化斜弧三角形为直角弧三角形

在梅氏的研究中还有一种次形法，即把不好求解的三角形变为另一个好解的三角形，“大边易小，钝角易锐”或“易角为弧，易弧为角”。具体地说，如图8.4，△甲乙丙为直角三角形，可用次形求三边，作次形△丙丁庚，由此利用正弦定理即可得原三角形的三边。究竟应当用何种方法得到所需要

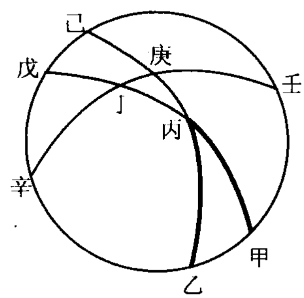


图8.4　次形

的次形,由各自不同情况决定,上面所举仅是一个例子。

梅氏对西方传到中国的一些没有证明的球面三角公式给予了补证,补证的方法是他自己独创的,将在下面介绍。

梅氏在数学研究中,到处反映着他的会通中西思想,特别是几何与三角两方面更为明显。

二、《几何原本》之研究与会通中西

明末,《几何原本》前6卷已被徐光启、利玛窦译为中文,在中国出版。梅文鼎深入研究了这部中译本。梅氏有《勾股阐微》一书,研究中国传统的勾股术,主要是解勾股形问题。他在该书中有一章"勾股法解几何原本之根",是用勾股术解证《几何原本》中的某些问题。于是他就具体把中西几何学会通起来。梅氏选择《几何原本》前6卷最能说明问题的12个题目予以论述。这些题是:卷2的第5,6,8,9,10题;卷3的第27,35,36,37题;卷4的第10,12题和卷6的第30题。查《几何原本》对这些题目的证法是从公设、界说(定义)等进行的,其中虽不断提到"直角形"或"直角方形",但与梅氏之用勾股术则不相同。

梅氏的具体做法,基本上都是首先给出已知图形的说明,最后归结到原题的结论上。他不再给出《几何原本》的题目,图形也不一样。下面举几个例子。为了阅读方便,把书中的甲、乙、丙……都改为$A,B,C\cdots$

例1 "解几何二卷第五题、第六题",是把二个题合在一起研究的。

《几何原本》卷 2 第 5 题是:"如果把一条线段既分成相等的线段,再分成不相等的线段。则由二不相等的线段构成的矩形与两个分点之间一段上的正方形的和等于原来线段一半上的正方形。"①

如图 8.5,设由点 C 将线段 AB 分成相等的两线段 CA,CB,又由点 D 将 AB 分成不等的两线段 DA,DB,则可由 AD,DB 构成的矩形 $ADHK$,$DBFG$ 加上 CD 上的正方形 $LHGE$ 的和等于 CB 上的正方形 $CEFB$。

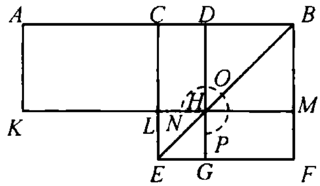


图 8.5

接下来是论证结论的正确性。

设 $CEFB$ 是作在 CB 上的正方形[根据第一卷第 46 题],连接 BE,过 D 作 DG 平行于 CE 或 BF,再过 M 作 KM 平行于 AB 或 EF,又过 A 作 AK 平行于 CL 或 BM[根据第一卷第 31 题],则补形 CH 等于补形 HF。[根据第一卷第 43 题]将 DM 加在以上两边,则整体 CM 等于整体 DF,但是 CM 等于 AL,这是因为 AC 也等于 CB[根据第一卷第 36 题],所以,AL 也等于 DF。

又将 CH 加在以上各边,则整个的 AH 等于拐尺形 NOP。

而 AH 是矩形 AD,DB,因为 DH 等于 DB。所以,拐尺形 NOP 也等于矩形 AD,DB。LG 等于 CD 上的正方形,将

① 引文来自兰纪正、朱恩宽译:《欧凡里得几何原本》,西安:陕西科学技术出版社,1990。下同。有时叙述上略有变化。

它加在以上各边上。则拐尺形 *NOP* 与 *LG* 的和等于 *AD*,*DB* 构成的矩形与 *CD* 上正方形的和。

但是,拐尺形 *NOP* 与 *LG* 的和是 *CB* 上的整体正方形 *CEFB*。

所以,由 *AD*,*DB* 构成的矩形与 *CD* 上的正方形的和等于 *CB* 上正方形 *CEFB*。

证明结束。

在证明过程中,根本不涉及勾股术。

《几何原本》卷2第6题是:"如果平分一线段并且在同一线段上给它加一线段。则合成的线段与加上的线段构成的矩形及原线段一半上的正方形的和,等于原线段一半与加上的线段的和上的正方形。"

如图8.6,设点 *C* 平分线段 *AB*,并在同一直线[①]上加上线段 *BD*,则可证由线段 *AD*,*DB* 构成的矩形与 *CB* 上的正方形 *LEGH* 的和等于 *CD* 上的正方形 *CDFE*。

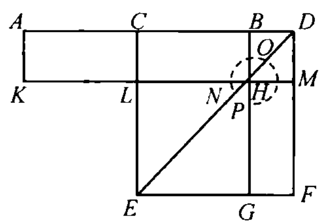


图8.6

证明与上题相似,从略。

梅氏的证明方法,与上述不同,而是完全利用勾股术。现把书中的甲、乙、丙……都改为拉丁字母 *A*,*B*,*C*,…。他的证明是:

设 *AC* 为弦,*DC* 为勾,*DA* 为勾弦和($AC+DC$),*BD* 为勾弦较($AC-DC$)(*DA* 同,*DM*,*AN* 并同)。*G*,*H*,*E*,*F*[②] 为

① "直线"应为线段。

② 这些单个的字都各自代表一块面积。下同。