线性代数

山西省工科院校数学教材编写组

山西高校联合出版社

线性代数

山西省工科院校数学教材编写组

山西高校联合出版社

线 性 代 数

山西省工科院校数学教材编写组

●

山西高校联合出版社出版发行（太原南内环街31号）

太原工业大学印刷厂印刷

●

开本：787×1092 1/32 印张：10.8 字数：225.8千字

1991年8月第1版 1991年8月太原第1次印刷

印数：1—9850册

●

ISBN 7—81032—062—9

O·6 定价：3.50元

前　言

线性代数以研究有限维空间的线性理论为主。它是高等工科学校各专业的一门重要基础理论课。由于线性问题广泛存在于技术科学的各个领域，而某些非线性问题在一定条件下可以转化为线性问题，尤其是在计算机日益普及的情况下，解线性方程组，作矩阵的各种运算已经成为工程技术人员经常遇到的课题。因此本课程的教学任务是，使学生获得应用科学中常用的矩阵方法、线性方程组，二次型等理论及其有关的基本知识，并具有熟练的运用线性代数方法解决一些实际问题的能力，为学习后继课，扩大知识面奠定必要的数学基础。

本教材的编写以国家教委颁布的“线性代数教学基本要求”为依据，并参照部分专业的教学大纲。广采现行教材的长处，多方听取老师的建议，结合编写者的教学实践，力图使教材结构严谨，叙述通俗，注意启发思维，培养能力。例题及习题的选择具有典型性、多样性、综合性、使之便于教学。

我们选择行列式，向量空间及线性变换初步知识、矩阵运算、线性方程组、矩阵的标准形、二次型作为本书的基本内容。在附录中编写了一章线性空间及线性变换，可供教学要求较高的专业选用。全书的授课时数约34—40学时。

在内容编排方面，有几点需要说明：

1.　由于有些中学不讲二阶、三阶行列式，因此，在第一章的开头编写了一节二阶、三阶行列式的概念及性质。

2. 由于线性代数是讨论有限维线性空间及线性变换的数学理论，矩阵及线性方程组都是起源于线性空间及线性变换。为了便于读者了解线性代数中的重要概念、定理、运算的来龙去脉，因此，在第二章编排了向量空间及线性变换的概念及一些较直观的性质，并由此引出矩阵概念及其一些重要的属性。这一章是全书的引子，它是一个难点。

第三章矩阵运算，除正常内容外，专辟一节正交矩阵，一方面考虑其重要性，另一方面使矩阵内容更集中一些。

第四章线性方程组，除讨论解的存在性及解的结构外，还编写了一节求解方法，适当介绍一些常用的数值方法，为实际应用打下初步基础。

第五章矩阵的标准形，在理论方面略加引深。目的是使学生适当扩充知识面，能适应各种考试。

第六章二次型，我们比较注重二次型的几何背景，使读者了解化二次型为标准形的目的。

由于线性代数具有较强的抽象性和逻辑性，在编写时，我们采取了一些措施，如尽量从直观角度引入概念，对其严密的理论推证多用例子引叙或加深对抽象理论的理解，注意理论与应用的结合。虽然我们主观上想多作一些探索，但限于编写者的水平，不当、疏漏之处在所难免，希望读者批评指正。

编　者

1991年5月

目　录

第一章　行列式

行列式是线性代数的一个重要概念，在后继课程及工程技术中有着广泛的应用。通过本章的学习，要求知道行列式的定义，了解行列式的性质并掌握行列式的计算方法。

第一节　二阶与三阶行列式

一、二阶行列式

二阶行列式起源于解二元一次方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1}$$

我们用a_{22}乘第一个方程，用负a_{12}乘第二个方程，然后相加得：

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2$$

同理可得：

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}$$

如$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，则

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \tag{2}$$

将（2）代入（1）可以验证（2）中的x_1，x_2确是（1）的解。

现在，我们注意到（2）中的x_1，x_2的分母都是$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，它只含有（1）的左端的未知量的系数，如把(1)

中的左端的系数列成下表：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad (3)$$

我们看出把表中左上角与右下角两个数的乘积减去右上角与左下角两个数的乘积恰为$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$。我们称之为对应于这个数表的二阶行列式，记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \qquad (4)$$

按（4）的计算法则，我们发现：

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21}$$

这样（2）即可写成比较简洁的形式：

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

定义1 2^2个数a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22}排成一个表：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad (5)$$

并按计算法则（4）来确定其数值，称（5）为一个二阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (6)$$

我们约定在二阶行列式（5）中，横排的元素称为行，纵排的元素称为列。(以后在n阶行列式中也有这个约定)。$a_{ij}(i, j=1, 2)$称为行列式的元素且它位于第i行第j列，注意行标在前，列标在后。

例如二阶行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 2\times(-5) - 3\times 4 = -22$$

二、三阶行列式

三阶行列式起源于解三元一次方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (7)$$

我们分别用$a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$，$a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}$，$a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}$乘（7）的第一、第二、第三个方程，然后相加，得

$$(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32})x_1$$
$$= b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - a_{13}a_{22}b_3 - a_{12}b_2a_{33} - b_1a_{23}a_{32} \qquad (8)$$

设（8）中x_1的系数为D，那么，当$D\neq 0$时，得，

$$x_1 = \frac{1}{D}(b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - a_{13}a_{22}b_3 - a_{12}b_2a_{33} - b_1a_{23}a_{32}) \qquad (9)$$

在（8）式中，x_1的系数

$$D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

我们把这个代数和叫做一个三阶行列式，并且用符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (10)$$

来表示。计算这个三阶行列式是按对角线规则进行的：称从左上角到右下角的对角线为主对角线，从右上角到左下角的对角线为次对角线；取正号的三项是主对角线上三个元素之积及位于主对角线平行的直线上的两个元素与对角元素之积，取负号的三项是次对角线上三个元素之积及位于与次对角线平行的直线上的两个元素与对角元素之积。按对角线规则计算三阶行列式（10），其值恰为（8）式中x_1的系数。按对角线规则计算三阶行列式

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

其值恰为（8）式等号的右边常数。这样（9）式就可写为比较简洁的形式：

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

同理，我们可以得到

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \qquad x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

定义2　3^2个数a_{ij}（i，$j=1$，2，3）排成一个表

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

我们称数$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})$是对应于这个数表的三阶行列式。记为，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

例1　计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & 5 \end{vmatrix}$$

解　由定义，$D=2\times(-1)\times5+4\times0\times(-3)+3\times1\times(-2)-4\times(-1)\times(-2)-3\times0\times5-1\times(-3)\times(-2)=-18$

例2 计算三阶对角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix}$$

解 由定义$D=a_1a_2a_3+0\cdot0\cdot0+0\cdot0\cdot0-0\cdot a_2\cdot0-a_3\cdot0\cdot0-a_1\cdot0\cdot0=a_1a_2a_3$

例3 计算三阶上三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$$

解 由定义 $D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}\cdot0\cdot0+a_{12}a_{23}\cdot0-a_{13}a_{23}\cdot0-a_{12}\cdot0\cdot a_{33}-a_{11}a_{23}\cdot0=a_{11}a_{22}a_{33}$

此例说明三阶上三角形行列式等于主对角线各元素的乘积。

三、二阶与三阶行列式的性质

利用二阶与三阶行列式的定义，容易证明下面的性质:

性质1 行列式等于它的转置行列式

把行列式D的行列互换而不改变各行、各列的次序所得到的行列式，称为行列式D的转置行列式，记为D'

则 $$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

证 由三阶行列式的定义

$$D'=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32}=D$$

因此，行列式对行成立的性质，对列也真。

性质2 把行列式D的某行（列）的所有元素乘以某定数k，等于用k乘行列式D。

例如，用k乘D的第二列的所有元素，应有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (12)$$

证 我们仅证（12）。由三阶行列式的定义，（12）的左端为

$$a_{11}ka_{22}a_{33}+k_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}ka_{32}-a_{13}ka_{22}a_{31}-ka_{12}a_{21}a_{33}$$
$$-a_{11}a_{23}ka_{32}$$
$$=k(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32})$$
$$=kD$$

性质3 交换行列式D的任意两行（列），行列式仅改变符号。

例如，交换D的第二行与第三行，应有：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (13)$$

证 我们仅证（13），由三阶行列式的定义，（13）式的左端为：

$$a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{21}a_{33}+a_{13}a_{22}a_{31}-a_{13}a_{21}a_{32}-a_{12}a_{23}a_{31}-$$
$$-a_{11}a_{22}a_{33}$$

$$=-(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})$$
$$=-D$$

性质4 行列式D中有两行（列）的对应元素相等，则行列式D等于零。

证 交换这相等的两行（列），则由性质3

$$D=-D,\ 2D=0 \quad \therefore\ D=0$$

性质5 如果行列式D中的某行（列）的各元素是两项之和，那此行列式D等于两个行列式之和

例如，D的第二行是两项之和，应有：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$=D_1+D_2 \tag{14}$$

证 我们仅证（14），由行列式的定义：

$$D_1+D_2=(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})+(a_{11}b_{22}a_{33}+a_{12}b_{23}a_{31}+a_{13}b_{21}a_{32}-a_{13}b_{22}a_{31}-a_{12}b_{21}a_{33}-a_{11}b_{23}a_{32})$$
$$=a_{11}(a_{22}+b_{22})a_{33}+a_{12}(a_{23}+b_{23})a_{31}+a_{13}(a_{21}+b_{21})a_{32}-a_{13}(a_{22}+b_{22})a_{31}-a_{12}(a_{21}+b_{21})a_{33}-a_{11}(a_{23}+b_{23})a_{32}$$
$$=D$$

性质6 把行列式D的任一行（列）的元素乘以同一个数λ后，加到另一行（列）的对应元素上去，行列式D不变。

例如，把D的第二行乘以λ后，加到第一行上去，应有：

$$
\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{21} & a_{12}+\lambda a_{22} & a_{13}+\lambda a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{15}
$$

证 我们仅证（15）。（15）式等号前面的行列式的第一行的元素是两项之和，由性质5，它等于两个行列式之和：

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
+\begin{vmatrix} \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
$$

上式后一个行列式，由性质（2）、（4）应等于零。

即
$$
\begin{vmatrix} \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
=\lambda\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0
$$

故（15）式的左端等于右端。

在三阶行列式D中，划去a_{ij}所在的行和列的元素，余下的元素按原来的顺序构成一个二阶行列式叫做元素a_{ij}的余子式，记作M_{ij}，而$(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$叫做元素a_{ij}的代数余子式，记作A_{ij}。例如在三阶行列式