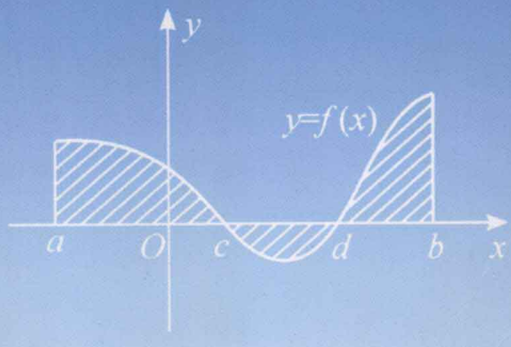
教育部高等农林院校理科基础课程

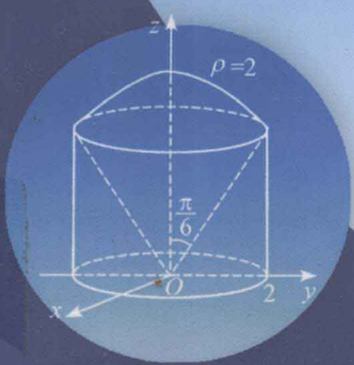
教学指导委员会推荐示范教材配套辅导教材

高等数学学习指导

Guidance for College Mathematics

杨丽明 主编





中国农业大学出版社
ZHONGGUONONGYEDAXUE CHUBANSHE

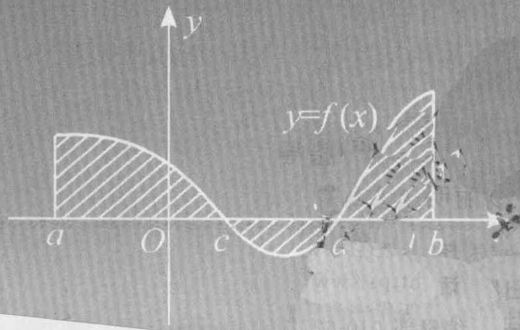
教育部高等农林院校理科基础课程

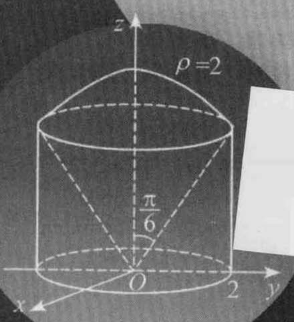
教学指导委员会推荐示范教材配套辅导教材

高等数学学习指导

Guidance for College Mathematics

杨丽明 主编





中国农业大学出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导/杨丽明主编. —北京:中国农业大学出版社,2009.11
ISBN 978-7-81117-881-4

Ⅰ. 高… Ⅱ. 杨… Ⅲ. 高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 173971 号

书　　名 高等数学学习指导
作　　者 杨丽明　主编

策划编辑 张秀环　董夫才　　**责任编辑** 韩元凤
封面设计 郑　川　　**责任校对** 王晓凤　陈　莹
出版发行 中国农业大学出版社
社　　址 北京市海淀区圆明园西路 2 号　　**邮政编码** 100193
电　　话 发行部 010-62731190,2620　　读者服务部 010-62732336
　　　　编辑部 010-62732617,2618　　出　版　部 010-62733440
网　　址 http://www.cau.edu.cn/caup　　**e-mail** cbsszs@cau.edu.cn
经　　销 新华书店
印　　刷 北京鑫丰华彩印有限公司
版　　次 2010 年 5 月第 1 版　　2010 年 5 月第 1 次印刷
规　　格 787×1 092　　16 开本　　14.25 印张　　349 千字
定　　价 23.00 元

主　编　杨丽明

副主编　吴国荣　李国辉　曾善玉

编　者（以姓氏拼音排序）

白春阳　河南科技学院
关　驰　沈阳农业大学
郭　英　黑龙江八一农垦大学
郭运瑞　河南科技学院
李国辉　中国农业大学
吕　雄　内蒙古农业大学
汪宏喜　安徽农业大学
吴国荣　内蒙古农业大学
杨丽明　中国农业大学
于晓娟　黑龙江八一农垦大学
岳超慧　安徽农业大学
张　阚　沈阳农业大学
曾善玉　中国农业大学

主　审　王来生　中国农业大学

教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会
推荐示范教材编审指导委员会

主　任　江树人

副主任　杜忠复　程备久

委　员（以姓氏笔画为序）

王来生　王国栋　方炎明　李宝华　张文杰　张良云
杨婉身　吴　坚　陈长水　林家栋　周训芳　周志强
高孟宁　戚大伟　梁保松　曹　阳　焦群英　傅承新

教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会
推荐数学类示范教材编审指导委员会

主　任　高孟宁

委　员（以姓氏笔画为序）

王来生　石　峰　卢恩双　吴　坚　杜忠复　张良云
杜晓林　孟　军　房少梅　梁保松　惠淑荣

出版说明

在教育部高教司农林医药处的关怀指导下，由教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会（以下简称“基础课教指委”）推荐的本科农林类专业数学、物理、化学基础课程系列示范性教材现在与广大师生见面了。这是近些年全国高等农林院校为贯彻落实“质量工程”有关精神，广大一线教师深化改革，积极探索加强基础、注重应用、提高能力、培养高素质本科人才的立项研究成果，是具体体现“基础课教指委”组织编制的相关课程教学基本要求的物化成果。其目的在于引导深化高等农林教育教学改革，推动各农林院校紧密联系教学实际和培养人才需求，创建具有特色的数理化精品课程和精品教材，大力提高教学质量。

课程教学基本要求是高等学校制定相应课程教学计划和教学大纲的基本依据，也是规范教学和检查教学质量的依据，同时还是编写课程教材的依据。“基础课教指委”在教育部高教司农林医药处的统一部署下，经过批准立项，于 2007 年底开始组织农林院校有关数学、物理、化学基础课程专家成立专题研究组，研究编制农林类专业相关基础课程的教学基本要求，经过多次研讨和广泛征求全国农林院校一线教师意见，于 2009 年 4 月完成教学基本要求的编制工作，由“基础课教指委”审定并报教育部农林医药处审批。

为了配合农林类专业数理化基础课程教学基本要求的试行，“基础课教指委”统一规划了名为“教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会推荐示范教材”（以下简称“推荐示范教材”）。“推荐示范教材”由“基础课教指委”统一组织编写出版，不仅确保教材的高质量，同时也使其具有比较鲜明的特色。

一、“推荐示范教材”与教学基本要求并行　教育部专门立项研究制定农林类专业理科基础课程教学基本要求，旨在总结农林类专业理科基础课程教育教学改革经验，规范农林类专业理科基础课程教学工作，全面提高教育教学质量。此次农林类专业数理化基础课程教学基本要求的研制，是迄今为止参与院校和教师最多、研讨最为深入、时间最长的一次教学研讨过程，使教学基本要求的制定具有扎实的基础，使其具有很强的针对性和指导性。通过“推荐示范教材”的使用推动教学基本要求的试行，既体现了“基础课教指委”对推行教学基本要求的决心，又体现了对“推荐示范教材”的重视。

二、规范课程教学与突出农林特色兼备 长期以来各高等农林院校数理化基础课程在教学计划安排和教学内容上存在着较大的趋同性和盲目性，课程定位不准，教学不够规范，必须科学地制定课程教学基本要求。同时由于农林学科的特点和专业培养目标、培养规格的不同，对相关数理化基础课程要求必须突出农林类专业特色。这次编制的相关课程教学基本要求最大限度地体现了各校在此方面的探索成果，“推荐示范教材”比较充分反映了农林类专业教学改革的新成果。

三、教材内容拓展与考研统一要求接轨 2008 年教育部实行了农学门类硕士研究生统一入学考试制度。这一制度的实行，促使农林类专业理科基础课程教学要求作必要的调整。“推荐示范教材”充分考虑了这一点，各门相关课程教材在内容上和深度上都密切配合这一考试制度的实行。

四、多种辅助教材与课程基本教材相配 为便于导教导学导考，我们以提供整体解决方案的模式，不仅提供课程主教材，还将逐步提供教学辅导书和教学课件等辅助教材，以丰富的教学资源充分满足教师和学生的需求，提高教学效果。

乘着即将编制国家级“十二五”规划教材建设项目之机，“基础课教指委”计划将“推荐示范教材”整体运行，以教材的高质量和新型高效的运行模式，力推本套教材列入“十二五”国家级规划教材项目。

“推荐示范教材”的编写和出版是一种尝试，赢得了许多院校和老师的参与和支持。在此，我们衷心地感谢积极参与的广大教师，同时真诚地希望有更多的读者参与到“推荐示范教材”的进一步建设中，为推进农林类专业理科基础课程教学改革，培养适应经济社会发展需要的基础扎实、能力强、素质高的专门人才做出更大贡献。

中国农业大学出版社

2009 年 8 月

内 容 提 要

本书是教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会推荐示范教材《高等数学》(多学时，王来生、卢恩双主编)的配套辅导教材。本书每一章首先给出本章的内容要点，根据知识点分类总结，给出基本概念、重要定理与常用公式，很方便学生的学习。在典型例题的选择上，相当一部分典型例题综合性较强并具有一定的深度，目的是帮助学生正确理解和掌握基本的数学概念、理论和方法，培养学生综合分析和解决问题的能力。对于教材中习题给出了比较详细的解答，可供教师和学生使用《高等数学》教材时参考。

前　　言

在教育部高教司的立项支持下，教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会组织全国高等农林院校的广大教师、专家编制了《普通高等学校农林类专业数理化基础课程教学基本要求》(简称《教学基本要求》)。为配合《教学基本要求》的实施，教指委统一领导组织编写了“教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会推荐示范教材”。2008 年教育部实行了农学门类硕士研究生公共基础课程统一入学考试，对农林类专业高等数学教学提出了新的要求。为进一步推进《教学基本要求》的落实，配合教指委推荐示范教材《高等数学》(多学时，王来生、卢恩双主编)的使用，帮助学生复习好农学门类硕士研究生数学基础课程统一入学考试有关内容，我们编写了这本《高等数学学习指导》。

本书每一章首先给出本章的内容要点，根据知识点分类总结，给出基本概念、重要定理与常用公式，很方便学生的学习。在典型例题的选择上，相当一部分典型例题综合性较强并具有一定的深度，目的是帮助学生正确理解和掌握基本的数学概念、理论和方法，培养学生综合分析和解决问题的能力。对于教材中习题给出了比较详细的解答，可供教师和学生使用《高等数学》教材时参考。

本书的编写分工为：主编是杨丽明(中国农业大学)；副主编为吴国荣(内蒙古农业大学)，李国辉、曾善玉(中国农业大学)；参加编写的还有郭运瑞、白春阳(河南科技学院)，吕雄(内蒙古农业大学)，汪宏喜、岳超慧(安徽农业大学)，张阚、关驰(沈阳农业大学)，郭英、于晓娟(黑龙江八一农垦大学)。

编者感谢中国农业大学出版社对本书的出版给予的大力支持。

由于编者水平有限，书中缺点和错误在所难免，敬请读者指正。

编者

2009 年 9 月

目录 CONTENTS

Chapter 1 第 1 章

函数与极限

Function and Limit

一、内容要点

(一)函数

设 D 是实数集 $\mathbf{R}$ 的子集，f 是一个对应法则. 如果对于 D 中的每一个 x，按照对应法则 f，都有唯一确定的实数 y 与之对应，则称 f 为定义在 D 上的函数.

集 D 称为函数 f 的定义域，一般记为 D_f，与 D 中 x 相对应的 y 称为 f 在 x 的函数值，记作 $y=f(x)$. 全体函数值的集

$$R_f=\{y|y=f(x),\quad x\in D\}$$

称为函数 f 的值域，称 x 为自变量，y 为因变量.

1. 函数的性质

有界性 若存在正数 K，使对一切 $x\in D$ 有 $|f(x)|\leqslant K$，则称 $f(x)$ 在 D 上有界. 否则称 $f(x)$ 在 D 上无界.

单调性 设函数 $f(x)$ 在集 D 上有定义，如果对 D 中任意两个数 x_1、x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有

$$f(x_1)<f(x_2)\quad (\text{或 } f(x_1)>f(x_2)),$$

则称 $f(x)$ 在集 D 上单调增加(或单调减少).

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

奇偶性 设 $y=f(x)$，$x\in D$，其中 D 关于原点对称，即当 $x\in D$ 时有 $-x\in D$. 如果对任意 $x\in D$，总有

$$f(-x)=-f(x)\quad (\text{或 } f(-x)=f(x)),$$

则称 $f(x)$ 为奇函数(或偶函数).

周期性 设函数 $y=f(x)$，$x\in D$. 若存在常数 $l\neq 0$，使对任意 $x\in D$，总有 $f(x+l)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，l 称为 $f(x)$ 的一个周期.

2. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W. 若对 W 中每一值 y_0，D 中必有一个值 x_0，使 $f(x_0)=y_0$，则令 x_0 与 y_0 相对应，便可在 W 上确定一个函数，称此函数为函数 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，$y\in W$.

相对于反函数 $x=f^{-1}(y)$ 来说，原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数.

3. 复合函数

已知两个函数

$$y=f(u),\quad u\in U,$$
$$u=\varphi(x),\quad x\in D.$$

如果 $D_1=\{x\mid\varphi(x)\in U, x\in D\}\neq\varnothing$，则对每个 $x\in D_1$，通过函数 $u=\varphi(x)$ 有确定的 $u\in U$ 与之对应，又通过函数 $y=f(u)$ 有确定的实数 y 与 u 对应，从而得到一个以 x 为自变量、y 为因变量、定义在 D_1 上的函数，称它为由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，记作

$$y=f[\varphi(x)],\quad x\in D_1,$$

其中 u 称为中间变量.

4. 初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数等五种函数统称为基本初等函数.

由基本初等函数和常数经过有限次的四则运算与有限次的函数复合所产生并且能用一个解析式表示的函数称为初等函数.

(二)函数的极限

1. 数列的极限

设 $\{a_n\}$ 是一个数列，a 是一个确定的数，若对任给的正数 ε，相应地存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，总有

$$|a_n-a|<\varepsilon,$$

则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a，a 称为它的极限，记作

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a \quad 或 \quad a_n\to a \quad (n\to\infty).$$

如果数列 $\{a_n\}$ 没有极限，则称它是发散的或发散数列.

2. 函数的极限

自变量趋于无穷大时函数的极限 设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义，A 是一个确定的数. 若对任给的正数 ε，总存在某一个正数 X，使得当 $|x|>X$ 时，就有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时以 A 为极限，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)=A \quad (x\to\infty).$$

自变量趋于有限值时函数的极限 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域内有定义，A 是一个确定的数. 若对任给的正数 ε，总存在某一正数 δ，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，就有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时以 A 为极限，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \quad (x\to x_0).$$

3. 函数极限的性质

唯一性 若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则它是唯一的.

局部有界性 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则存在 x_0 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$，使得 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0)$ 内有界.

局部保号性 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)>0$（或 <0），则对任意正数 $r(0<r<|A|)$，存在 x_0 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$，使对一切 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$，总有 $f(x)>r>0$（或 $f(x)<-r<0$）.

保不等式性 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 皆存在，且在 x_0 的某去心邻域内 $\mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 总有 $f(x)\leqslant g(x)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\leqslant\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.

4. 函数的左、右极限

如果函数 $f(x)$ 当 x 从 x_0 的左侧（即 $x<x_0$）趋于 x_0 时以数 A 为极限，则 A 称为 $f(x)$ 在 x_0 的左极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A \quad 或 \quad f(x_0-0)=A.$$

如果函数 $f(x)$ 当 x 从 x_0 的右侧（即 $x>x_0$）趋于 x_0 时以数 B 为极限，则 B 称为 $f(x)$ 在 x_0 的右极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=B \quad 或 \quad f(x_0+0)=B.$$

左极限与右极限统称为单侧极限.

5. 函数极限与单侧极限的关系

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充要条件是 $f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$.

（三）极限运算法则

1. 函数极限的四则运算法则

若当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，极限 $\lim f(x)$ 与 $\lim g(x)$ 皆存在，则 $f(x)\pm g(x)$，

$f(x)\cdot g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}(\lim g(x)\neq 0)$极限也存在，且

(1)$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$；

(2)$\lim f(x)\cdot g(x)=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$；

(3)$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}\ [\lim g(x)\neq 0]$.

2. 复合函数的极限运算法

设函数 $u=\varphi(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限存在且等于 a，即 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，但在点 x_0 的某去心邻域内 $\varphi(x)\neq a$，又 $\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$，则复合函数 $f[\varphi(x)]$ 当 $x\to x_0$ 时的极限也存在，且

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=A.$$

(四)极限存在准则与两个重要极限

1. 极限存在准则

准则Ⅰ(夹逼准则)　如果存在 x_0 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta_0)$，使对一切 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_0)$，总有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，则

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A.$$

准则Ⅰ′(夹逼准则)　如果数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$ 满足 $x_n\leqslant y_n\leqslant z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则

$$\lim_{n\to\infty}y_n=a.$$

准则Ⅱ　单调有界数列必收敛.

2. 两个重要极限

(1)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；　　(2)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

(五)无穷小与无穷大

1. 无穷小

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，则称函数 $f(x)$ 为 $x\to x_0$ 时的无穷小；设函数 $f(x)$ 在 $|x|$ 大于某一正数时有定义，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$，则称函数 $f(x)$ 为 $x\to\infty$ 时的无穷小.

无穷小的性质

性质 1　有限个无穷小的代数和是无穷小.

性质 2　有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

性质 3　常数与无穷小的乘积是无穷小.

性质 4　有限个无穷小的乘积是无穷小.