

概率论 与数理统计

第三版

○ 金炳陶 编著



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书在第二版基础上,从高职高专院校教学的特点出发,在内容编排上突出重点,分散难点;在理论方面坚持以“必需够用”为度,并注意与实践相结合。

全书共七章,内容包括随机事件与概率计算,随机变量及其分布,随机变量的数字特征,样本与统计量分布,参数估计,假设检验,方差分析与回归分析等。

本书可作为高等专科学校、高等职业学校、成人高等学校和本科院校举办的二级职业技术学院各专业基础课教材,也可供工程技术人员学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/金炳陶编著.—3版.—北京:高等教育出版社,2011.7

ISBN 978-7-04-032715-1

I. ①概… II. ①金… III. ①概率论-高等职业教育-教材 ②数理统计-高等职业教育-教材 IV. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 098868 号

策划编辑 邓雁城
责任校对 刘 莉

责任编辑 崔梅萍
责任印制 刘思涵

封面设计 王凌波

版式设计 范晓红

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印 刷 北京明月印务有限责任公司
开 本 787×960 1/16
印 张 14
字 数 250 000
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landraco.com>
<http://www.landraco.com.cn>
版 次 2000 年 8 月第 1 版
2011 年 7 月第 3 版
印 次 2011 年 7 月第 1 次印刷
定 价 21.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物 料 号 32715-00

第三版前言

本书第二版出版以来,被许多院校选为概率论与数理统计课程的教材或参考书。为了适应教育大众化的发展趋势,满足人才培养的新需要,编者根据自身教学实践,结合同行和读者反映的教学实际情况,在第二版基础上对全书做了整体的修订。

这次修订做了少量段落的删节、部分内容或结构的调整以及若干文字的修饰,为的是更便于阅读和理解。此外,为激发学生学习兴趣、扩展知识视野,修订中添加了涉及概率统计方面的简要史料及其相关内容,从而体现以学生为本的修订宗旨。具体修订将从如下四个方面入手。

1. 对于第1章(随机事件与概率计算)在删去全概率公式的同时对习题1的编排作了技术性处理,将所有拟保留的题目划分为基本练习题(A类)与备选思考题(B类)两类。其他各章大体也是如此,少量题目因结构或内容的变更而被删外,余下题目中凡富有思考性、计算方面相当繁难或有较高技巧的划入B类,供有兴趣的学生选做或供教师筛选后作为例题讲解;多数题目列入A类,供课外练习之用。

习题按难易繁简程度分类处理,贯彻了因材施教的原则。编者曾对习题做过分类尝试,结果令人欣喜,深受学生好评。

2. 第2章(一维随机变量及其分布)的修订:首先,随机变量的概念,采用学生感知层面能触及的直观叙述方式,替代了理论上有一定深度的实值集函数的定义方式;其次,删去了二项分布与超几何分布之间联系的一段并不显而易见的文字;此外,连续型分布中的 Γ 分布,涉及反常积分方面的知识,有一定的难度,考虑到它在继续学习和应用实践中的特殊作用,拟用加“*”号的办法予以保留,其结论供需要时查阅,至于其中的来龙去脉不必深究,这对高职高专学生尤为重要;同时将第3章(多维随机变量及其分布)删节后保留应用面广的§3.4(二维连续型随机变量及其分布密度)并入第2章作为§2.6。因而第2章标题中的“一维”两字随之删去。

所有这些,使得修订后的第三版在降低理论要求、突出实际应用、学生可接受性等方面有所进展,这正是此次修订的本意。

3. 第4章(随机变量的数字特征)由于结构调整,在本版中作为第3章列出。本章的一大特点是计算量大,涉及面广,不少地方要用到较为复杂的积分或特殊级数的求和,考虑到读者受数学基础的限制,将第二版中涉及的繁琐计算以及有关例题、习题都作了必要的调整。

第5章(大数定律与中心极限定理)相当部分内容的表述与数字特征有关,在修订中并入第3章列为§3.5,考虑到内容有一定深度,作了加“*”号处理,保留第二版中所有计算实例,正是为了突出学科应用性特点。涉及§3.5的若干定理,修订后都略去了推导过程而直接给出结论,也许这样更适合于非理科专业学生的实际情况。从应用的需要出发把握结论往往要比掌握论证过程更为重要。有时为了顺利学习后文,暂时放弃有较高理论要求部分的阅读。反过来,在应用中促使对这部分内容的逐步了解,之后如有机会再读这部分内容时,自然就更易于理解。这是学习任何一门新知识、新课程应该采取的辩证策略。

4. 关于第二版数理统计所列举的内容已经是最重要、最基本的部分,故此次修订中无多大变动。考虑到专业要求的不同、教学时数的差别,为方便教师组织教学,将其中有的段、有的节、有的章加“*”号列为机动内容,供选读或选讲。即使这样,对高职高专学生来讲可能仍面临数学基础欠缺与计算甚为繁琐的两大情况,为此提出两项应对策略供参考。

(1) 涉及理论部分,一般先不要去深究,重要的要切实把握应用时所需的结论、熟悉归纳在各个课题综合表中的方法要点,如能正确地用于解决应用中的实际问题,算是学有所得了。

(2) 计算繁琐是难以避免的,为此提倡在教师指导下,掌握计算器上若干统计功能键进行计算。只要使用得当,教材中列举的课题都能解决,切实把握方法原理与要点,借助计算器完成计算,这是初学者必不可少的基础训练。如果软件学习到了一定阶段,几乎所有课题编程都是可以解决的,再说在未来实际工作中,一些常用课题都可以使用现成软件完成计算。

限于编者水平以及时间仓促,书中难免有不妥,甚至是错误之处,敬请读者指正批评。

编 者

2011年元月于南京工业大学

第二版前言

本书首版在 2000 年出版发行以来,荣幸地被众多高职高专院校工科、财经、管理等专业选作教材。历经数年教学实践,得到广大读者的厚爱。对于关心和使用本书的师生以及提出宝贵意见与建议的读者表示衷心感谢。

我国高等教育正处在从精英教育向大众化教育过渡的变革时期,本书作为高职高专的基础课教材,理应主动适应当前教学实际。为此,遵照教育部高等教育司、高等教育出版社的安排,拟对首版作一次全面修订。

本次修订再版,在基本保留原有框架的前提下,适当紧缩篇幅、删减超纲内容、突出三基训练、强化实践应用,以服从于高职高专教育培养高等技术应用型专门人才的目标。修订中变动较大的有如下六个方面。

1. 将首版中的 § 3.6(若干重要分布及其临界值)移后并入 § 6.3(统计量及其分布)。这一合并不仅压缩了篇幅、减少了重复,而且使得蕴含其间的理论有所淡化,并与统计应用尽快结合,从而改善了理论与应用脱节的弊端。

2. 为突出重点、强调应用、便于不同专业的选择,把分散在首版 § 8.2 及 § 8.3 中的单侧假设检验抽出来单独成节。

3. 删去首版中带有 * 号超纲的大部分内容,而对于少量起着承上启下作用的有 * 号的段落,考虑到教学和阅读的方便仍予保留,但所占篇幅不多。

4. 为使读者尽快了解各章概貌,把握重点,每章末增加了一个概括该章基本概念及其相互联系、运算法则与常用公式等的内容概要。

5. 精简了例习题中少量偏重理论或计算甚繁的题目。对于某些综合性应用性例题,在示范求解之后给出了涉及思路分析、方法技巧等方面的简要评述,引导读者积极思考,正确规范解题。为方便教学,习题保持相对稳定,数量有减无增,难度有所降低。

6. 对于首版中某些段落的文字作了必要的改动,从而使得概念表述更为确切,行文更为流畅。同时对首版中遗留的疏漏做了订正。

本书的修订工作是编者应聘担任三江学院数学学科组组长期间完成的。承担本书审稿的是南京气象学院数学系吕纯濂教授。吕教授以其渊博学识,认真细致地审阅了再版书稿,并提出了很多中肯意见,在此表示真诚

的谢意。

限于编者水平,书中难免会有错误和不妥,敬请读者批评指正。

编 者

2003 年 12 月于南京工业大学

第一版前言

本书是高等专科教育、高等职业教育、成人高等教育(以下统称高职高专教育)工科类专业的基础课教材之一。本书依据教育部最新制定的《高职高专教育概率论与数理统计课程教学基本要求》,结合作者长期从事本学科科研和教学的体会编写而成,旨在培养学生运用概率统计独特的思维方式以及分析问题和解决问题的能力,并为后续课程的学习和未来的工作实践,提供必备的随机数学基础。

全书从高职高专教育及其工科教学的特点出发,取材与编排紧扣教学基本要求,坚持必需够用为度,遵循由易到难逐步加深的原则,突出重点,分散难点,强化应用,并注意理论与实际的结合。教材的概率论部分以随机变量及其分布为主体,对分布的讨论一维、多维单独成章,并在多维场合充分顾及引入统计方法的需要。而包括矩在内的数字特征,又将一维、多维汇集在随机变量函数的数学期望概念之下统一处理。数理统计侧重介绍参数估计、假设检验中的基本内容,对于具体的统计方法,重点介绍在科技领域中有着广泛应用的分布拟合与检验、一元回归分析及单因素方差分析。此外,对于与工科专业有较多联系且又体现概率统计独特思路的段落,逐一给出简要的辩证分析;对于在教材中先后出现又有内在联系的部分,适时加以归纳提炼;对于可能出现繁琐的纯理论推导之处,在保全学科体系以及“三基”内容落实的前提下进行适当删节,必要时指明参考书目;对于概率计算,除少量基本题外,多数例题与实际应用联系较为紧密,并充分揭示隐含于演算过程中的综合性技巧。所有这些将有利于启发学生积极思考,引导学生掌握教材要点,促进数学修养的提高。

书稿内容简明扼要,文字简详得当,特别适合于初学者阅读。例题求解强调思路分析,书写有序规范。习题大多与实际应用有关,数量充足,难易适中,其中少量习题作为正文补充而选入。书末给出了全部习题的答案或提示。教材中凡标有“*”号的部分,包括相应的例习题,可供教师选讲或有余力的学生课外阅读。按照从紧安排的原则,除标有“*”号部分外,本书所列基本内容可以在36学时内完成。建议概率论部分大致安排20学时,数理统计部分大致安排16学时。

由于编写所依据的教学基本要求有较宽的适用面,故本书作为基础课教材,对于工科以外的管理专业、财经专业以及非数学类的理科专业等也都适用。

本书由东南大学应用数学系陈浩球教授主审。陈教授以严谨的治学态度认真审查了书稿,提出了很多有价值的意见和建议,编者在此表示衷心的感谢。

由于编者水平所限,加上时间仓促,书中难免会有不当之处,敬请读者不吝赐教。

编 者

2000年2月于南京建筑工程学院

目 录

第 1 章 随机事件与概率计算	1
§ 1.1 随机试验与样本空间	1
1.1.1 随机现象及其统计规律性	1
1.1.2 随机试验与随机事件	1
1.1.3 样本空间及其构成特征	2
§ 1.2 随机事件的概率	3
1.2.1 概率概念的引入	3
1.2.2 概率的统计定义	3
1.2.3 概率的古典定义	5
§ 1.3 概率的加法公式	7
1.3.1 事件间的关系与运算	7
1.3.2 互不相容事件概率的加法公式	11
1.3.3 任意事件概率的加法公式	12
§ 1.4 概率的乘法公式	13
1.4.1 条件概率	13
1.4.2 乘法公式及其推广	14
§ 1.5 事件的独立性与相应的概率计算	15
1.5.1 事件的独立性概念	15
1.5.2 独立事件概率的乘法公式	17
1.5.3 伯努利概型与二项公式	18
内容概要 1	19
习题 1	20
第 2 章 随机变量及其分布	24
§ 2.1 随机变量的概念与分类	24
2.1.1 随机变量的引入	24
2.1.2 随机变量的分类	25
§ 2.2 一维离散型随机变量的分布列	26
2.2.1 分布列及其基本性质	26

2.2.2 常用的离散型分布	28
§ 2.3 一维连续型随机变量及其分布密度	30
2.3.1 分布密度及其基本性质	30
2.3.2 常用的连续型分布	32
§ 2.4 一维随机变量的分布函数	35
2.4.1 分布函数及其基本性质	35
2.4.2 分布列与分布函数的互求	36
2.4.3 分布密度与分布函数的互求	37
2.4.4 正态分布的概率计算	39
§ 2.5 一维随机变量函数的分布	40
2.5.1 随机变量函数的含义	40
* 2.5.2 离散型场合下的对应列举法	41
2.5.3 连续型场合下的分布函数转化法	42
§ 2.6 二维连续型随机变量及其分布密度	44
2.6.1 n 维随机变量及其分类	44
2.6.2 二维随机变量的分布函数	45
2.6.3 二维连续型随机变量及其独立性	46
2.6.4 三个重要的二维连续型分布	50
内容概要 2	52
习题 2	54
第 3 章 随机变量的数字特征	58
§ 3.1 数学期望及其运算法则	58
3.1.1 数学期望的实际背景	58
3.1.2 数学期望的定义与计算实例	58
3.1.3 随机变量函数的数学期望	60
3.1.4 数学期望的运算法则	62
§ 3.2 方差及其运算法则	64
3.2.1 方差的概念与计算实例	64
3.2.2 方差的运算法则	66
§ 3.3 常用分布的数学期望与方差	68
§ 3.4 协方差与相关系数	71
3.4.1 原点矩与中心矩	71
* 3.4.2 协方差及其运算法则	72
* 3.4.3 相关系数及其基本性质	73
* § 3.5 大数定律与中心极限定理	75
3.5.1 大数定律	75

3.5.2 中心极限定理	76
内容概要 3	79
习题 3	82
第 4 章 样本与统计量分布	85
§ 4.1 总体与样本	85
4.1.1 简单随机样本	85
4.1.2 统计推断与样本信息	86
4.1.3 样本的联合分布	86
§ 4.2 样本矩与数字特征	88
4.2.1 样本的原点矩与样本均值	88
4.2.2 样本的中心矩与样本方差	89
4.2.3 样本矩、总体矩及其相互联系	89
§ 4.3 统计量及其分布	91
4.3.1 统计量与抽样分布	91
4.3.2 标准正态分布及其临界值	92
4.3.3 χ^2 分布及其临界值	94
4.3.4 t 分布及其临界值	96
4.3.5 F 分布及其临界值	97
内容概要 4	102
习题 4	103
第 5 章 参数估计	106
§ 5.1 点估计及其优良性准则	106
5.1.1 点估计及其意义	106
5.1.2 矩估计法	106
5.1.3 最大似然估计法	108
5.1.4 估计量的优良性准则	113
§ 5.2 正态总体参数的区间估计	114
5.2.1 区间估计的意义	114
5.2.2 正态总体均值的区间估计	115
5.2.3 正态总体方差的区间估计	117
内容概要 5	119
习题 5	120
第 6 章 假设检验	123
§ 6.1 假设检验的基本思想	123
6.1.1 问题的提出	123

6.1.2 假设检验的规范做法	123
6.1.3 假设检验的概率论依据	124
6.1.4 假设检验中的两类错误	125
§ 6.2 正态总体均值的假设检验	126
6.2.1 方差已知时的均值检验(U 检验法)	126
6.2.2 方差未知时的均值检验(t 检验法)	128
§ 6.3 正态总体方差的假设检验	130
6.3.1 一总体的方差检验(χ^2 检验法)	130
6.3.2 二总体的方差检验(F 检验法)	132
§ 6.4 单侧假设检验	134
6.4.1 双侧假设检验的回顾	134
6.4.2 单侧假设检验的适用范围	135
6.4.3 单侧检验中若干问题的探讨	135
6.4.4 单侧检验的实例	136
* § 6.5 总体分布的假设检验	140
6.5.1 分布检验的基本做法	141
6.5.2 分布拟合与检验的实例	142
内容概要 6	146
习题 6	148
* 第 7 章 方差分析与回归分析	152
§ 7.1 单因素方差分析	152
7.1.1 单因素试验及其数学表述	152
7.1.2 单因素方差分析及其显著性检验	154
7.1.3 实例演算	159
§ 7.2 一元回归分析	161
7.2.1 一元线性回归的原理和方法	161
7.2.2 非线性问题的线性化处理	167
内容概要 7	172
习题 7	173
习题答案或提示	177
附表	185
附表 1 泊松分布数值表	186
附表 2 标准正态分布函数数值表	190

附表 3 χ^2 分布临界值表	192
附表 4 F 分布临界值表	194
附表 5 t 分布临界值表	204
附表 6 相关系数显著性检验表	205
参考书目	206

第1章 随机事件与概率计算

随机事件与它的概率是本课程的两个基础性概念,所有与此有关的内容都是全书各章以及相关学科立论之本.

本章首先在扼要阐述概率统计研究对象的同时,给出了概率的定义、性质及其计算要点;然后从事件间的关系与运算入手,讨论概率运算的各种法则;最后引入事件的独立性概念以及相应的概率计算公式.

§ 1.1 随机试验与样本空间

1.1.1 随机现象及其统计规律性

人们在社会实践中经常会遇到这样一类现象,它们在给定条件下其结果能否发生是不可预言的.例如,打靶练习中,正在进行的一次射击可否中靶以及可能命中的环数都是事先不能预料的;一批新产品投放市场是畅销还是滞销,经营者往往难以把握.所有这些揭示的是条件与结果之间的非确定性联系,其数量规律无法用函数关系描述,这种现象统称为随机现象.它与人们熟知的确定性现象有着本质的区别.实践表明,随机现象在少数次观测中表现出结果的不确定性,然而在大量重复试验中有规律可循.例如,在某公交车站上候车的人数,对于某一固定时刻,往往是不确定的,但车站附近每一天行人流量的峰或谷,却有明显的规律性,公交公司将据此制定行车时刻、确定班次密度,以保证居民出行的方便.通常把在大量观测中呈现出来的规律性,称为随机现象的统计规律性.

概率论与数理统计便是以随机现象的统计规律性为研究对象的近代数学学科,它与其他学科有着紧密的联系,并在国民经济各个领域具有广泛应用.

1.1.2 随机试验与随机事件

从广泛意义上讲,对自然现象或社会现象的一次观测,可以看作在给定条件下的试验.如果某个试验符合以下特征:

- 1) 试验在相同条件下可以重复进行;
- 2) 每次试验的可能结果不止一个,而且所有可能结果事先是明确的;
- 3) 正在进行的试验当最终结果揭晓前,无法预言会发生哪一个可能结果,那么,这类具有特定含义的试验称为随机试验.本书此后凡提到试验都是指随机试验.通常把试验的每个可能结果称为随机事件,并用 $A, B, C, \dots$ 或 $A_1, A_2, \dots$ 大写拉丁字母表示.

例1 已知一批产品共30件,内含正品26件、次品4件,进行从中一次取出5件的试验,则

A_i = “被取的5件中恰有*i*件次品”, $i=0, 1, 2, 3, 4$,

B = “被取的5件中最多有3件次品”,

C = “被取的5件中正品不超过2件”

等都是随机事件.它们具有在一次试验中可能发生也可能不发生的特点.

下面讨论随机事件的分类.

例1中的随机事件 $A_0, A_1, \dots, A_4$ 都是试验的直接结果.像这样一类随机事件称为题设试验中的基本事件.

随机事件 B 与 C 都不是试验的直接结果,它们都可以看作是由若干基本事件组合而成的.例如,随机事件 B 必定与基本事件 A_0, A_1, A_2, A_3 之一同时发生,记为 $B = \{A_0, A_1, A_2, A_3\}$.仿上,有 $C = \{A_3, A_4\}$.类似于 B 与 C 这样的随机事件,称为复合事件.

另外,在例1的题设下,若记

D = “被取的5件中至少有1件是正品”, E = “被取的5件都是次品”,

则它们与上面提到的随机事件有所不同. D 是包括所有基本事件的复合事件,它在任一次试验中一定发生,像 D 这类复合事件特别称它为必然事件,用希腊字母 Ω 表示,即 D 就是 Ω .此外,由于题设中次品一共只有4件,故 E 不包括任何基本事件,它在任一次试验中一定不发生,像 E 这类情形特别称它为不可能事件,并用记号 $\emptyset$ 表示,即 E 就是 $\emptyset$.

综上所述,必然事件与不可能事件实际上同属确定性范畴,都不应是随机事件.但为了方便将它们作为随机事件的极端情形予以统一处理,同时把随机事件简称为事件.

1.1.3 样本空间及其构成特征

给定试验下全部基本事件的集合,称为样本空间.事实上,样本空间也可以看成是一个事件,其构成表明它等同于必然事件,故样本空间也用 Ω 表示.构成样本空间的基本事件也称为样本点,因而任一事件实际上都是样本点的集合.于

是,从集合论观点看,凡随机事件都是样本空间的子集.

样本空间的构成可以比较简单,也可以相当复杂.它按所含基本事件的数目,可划分为有限样本空间和无限样本空间,无限场合又可分为无限可列和无限不可列两种.

样本空间的存在总是联系着某个试验.因而面对被考察的随机试验,对于相应样本空间的构成应该给出明确描述,这是继续讨论中首先需要解决的问题.

§ 1.2 随机事件的概率

1.2.1 概率概念的引入

随机事件在一次试验中发生与否往往事先无法预言.但是,在大量重复试验中,其发生可能性的大小是客观存在的,是事件本身的固有属性.为此,把度量事件 A 在试验中发生可能性大小的数叫做概率,并记为 $P(A)$. 这样,较大的概率 $P(A)$ 预示着相应事件 A 发生的可能性较大.反之,则发生的可能性较小.

对于给定的事件,如何定义并求得概率,通常与试验条件有关.下面只给出在实际中用得较多的统计定义和古典定义.至于几何定义与公理化定义本书不再涉及,有兴趣的读者可查阅参考书目[1]或[4]中的有关章节.

1.2.2 概率的统计定义

统计定义是以大量重复试验为前提的.为此,首先引入频率及其稳定性概念.

(1) 频率的稳定性与统计概型

定义 1 在 N 次重复试验中,事件 A 发生的次数 M (频数)与试验次数 N 的比 M/N ,称为事件 A 的频率,并记为 $f_N(A)$. 于是, $f_N(A) = M/N$.

容易验证,频率 $f_N(A)$ 具有如下基本性质,即对于任一事件 A ,有 $0 \leq f_N(A) \leq 1$. 极端场合下,有 $f_N(\Omega) = 1$, $f_N(\emptyset) = 0$.

实践表明,当试验次数 N 逐渐增大时,频率 $f_N(A)$ 虽然不尽相同,但却稳定在某数附近.表 1-1 中的硬币“正面朝上”(设为事件 A) 的频率 $f_N(A)$ 呈现出来的稳定趋势充分说明这一点.

表 1-1 匀称硬币在投掷中正面朝上的频率表

试验序号	$N=5$		$N=50$		$N=500$	
	M	$f_N(A)$	M	$f_N(A)$	M	$f_N(A)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512

正是频率的稳定性为概率概念的量化提供了可行途径. 所谓统计概型就是以大量重复试验为前提, 以频率的稳定性事实为依据, 给概率以数量刻画的随机试验模型.

(2) 统计定义及其概率的基本性质

定义 2(概率的统计定义) 在相同条件下进行的大量重复试验中, 如果随着试验次数 N 的增加, 事件 A 的频率 $f_N(A)$ 始终围绕某一常数 p 作稳定而微小的摆动, 则称事件 A 有概率, 常数 p 就是事件 A 的概率, 即 $P(A) = p$.

由统计定义求得的概率简称为统计概率.

在统计概型下, 概率是作为频率的稳定值而引入的. 因而, 概率也应当具备频率的基本性质. 即对于任一事件 A , 有 $0 \leq P(A) \leq 1$. 极端场合下, 有 $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$.

(3) 用统计定义求概率的步骤

统计定义主要用于测量和了解某个事件发生的概率, 原则上按两步进行:

- 1) 做试验取得频率 $f_N(A) = M/N$;
- 2) 以频率作为概率的近似, 即认定 $P(A) = M/N$.

定义中的大量试验往往难以办到, 实际操作时可以用一定数量试验下的频率作为概率的近似. 例如, 在表 1-1 中由于 $N=500$ 时, 频率出现了稳定趋势, 于是便可认定 $P(A) = 0.5$.

概率的统计定义最初是人们在实践中积累起来的感性认识, 它为探索事件发生的概率提供了可行方法. 对于这方面的理论探讨最终由伯努利家族中的雅各布第一·伯努利于 1705 年前完成. 伯努利家族是瑞士巴塞尔的数学和自然科学家的大家族. 祖孙三代在 17~18 世纪, 仅数学家就出了 10 多位. 雅各布第一·伯努利是该家族中最有影响的 3 位名家之一.

在这里应该注意到, 运用统计定义即使是相同条件下的不同试验, 其结果也往往有较大差异. 所以在应用中希望获得概率的唯一值时, 需要另行讨论. 在特定条件下引入的古典定义可以弥补此不足.