GONGCHENG LIXUE YAODIAN YU JISUAN

工程力学要点与计算

理论力学、材料力学

张志清 王贵增◎编著

北京工业大学出版社

工程力学要点与计算

理论力学、材料力学

张志清　王贵增　编著

北京工业大学出版社

内 容 提 要

本书采用图表的形式将理论力学和材料力学的理论知识、解题方法及经验总结展现在读者面前，内容主要包括：静力学、运动学、动力学、杆件的内力计算与变形、梁的内力计算与变形、应力状态分析与强度理论、压杆稳定计算及实验应力测定和分析方法等。书中抓住了工程力学中的知识要点，并从工程角度出发，以例题、说明等方式，提纲挈领，使知识条理化，利于读者加深理解并快速掌握工程力学的知识要点和解题方法，内容详尽而全面。

本书可作为工科院校相关专业《工程力学》课程的辅助教材，也可供从事与结构工程相关的专业技术人员学习或参考。

图书在版编目（CIP）数据

工程力学要点与计算．理论力学、材料力学/张志清，王贵增编著．—北京：北京工业大学出版社，2012.7

ISBN 978-7-5639-3125-5

Ⅰ.①工…　Ⅱ.①张…②王…　Ⅲ.①工程力学-高等学校-教学参考资料②理论力学-高等学校-教学参考资料③材料力学-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.①TB12

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 091715 号

工程力学要点与计算（理论力学、材料力学）

编　　著： 张志清　王贵增
责任编辑： 魏　娜　初旭新
封面设计： 王玉龙
出版发行： 北京工业大学出版社
（北京市朝阳区平乐园 100 号　100124）
010-67391722（传真）　bgdcbs@sina.com
出 版 人： 郝　勇
经销单位： 全国各地新华书店
承印单位： 徐水宏远印刷有限公司
开　　本： 787mm×1 092mm　1/16
印　　张： 10
字　　数： 228 千字
版　　次： 2012 年 7 月第 1 版
印　　次： 2012 年 7 月第 1 次印刷
标准书号： ISBN 978-7-5639-3125-5
定　　价： 19.00 元

前　　言

“工程力学”是工科院校学生的必修课程，而我们经常听到的是“力学难”的感叹，面对的是大量学生补考不及格的尴尬。究其原因是因为力学知识深奥，还是学习不得法？为了解决这一困扰和难题，几位具有教学和工程实践经验的同行经过多年的积累、总结与思考，编著了这本《工程力学要点与计算》。

本书本着简明、实用、速成的宗旨，从工程角度出发，对工程力学中的理论知识，以表格的形式进行了系统的概括和总结，同时配有工程实践中的典型例题，有助于培养学生应用理论知识解决工程实际问题的能力。本书既有总体论述又不漏掉细节，粗中有细，层次分明，在强调知识整体性的同时，可以培养学生对理论知识的概括和总结能力，进一步加深其对理论知识的理解，使学生在学习时少走弯路，可以提高学习效率和强化复习效果。

本书将工程力学中不同类别的解题方法用图表的形式进行比较，找出其联系和区别，对于知识要点附加例题和注意点进行说明，便于学生加深理解和迅速掌握。全书抓住了工程力学中的知识要点，将其内容通过表格的形式罗列出来，并注意相关知识点的归纳和比较，其中，合理的注释有助于学生学习和理解工程力学中的知识要点。

本书系统总结了工程力学的基础理论及实践应用，充分体现了编著者教学和实践兼顾的学术背景特点，特别是对相关理论的深入研究，使本书具有系统性与学术性兼顾的特色。

书中采用来自实践中的典型例题，受力以吨（t）为单位表示，相应力矩也以吨米(t·m)表示。

本书在编著过程中，由东南大学徐赵东教授对全书进行了详细审阅，并提出了许多宝贵意见，在此表示衷心的感谢！也特别感谢老前辈吴志安先生提供的创意和实例！

由于编著者水平有限，书中难免有不妥之处，敬请读者批评、指正。

编　　者

2012 年 5 月

目　　录

第一章　理论力学内容综述

<table>
<tr><td>理论力学的研究目的</td><td colspan="3">理论力学主要介绍物体的机械运动的形式、原因，物体平衡条件等问题。学习理论力学的目的主要是：一方面，为今后学习材料力学、结构力学打基础；另一方面，理论力学本身在工程上也有其独立应用的意义</td></tr>
<tr><td>必须掌握的基础知识</td><td colspan="3">(1) 力、力的三要素、物体的平衡、力的平衡力系、等效力系、合力、分力、约束反力、受力图等概念。力的合成和分解。
(2) 了解时间、空间的概念，参考系、轨迹、质点的运动(速度、加速度、运动方程)、物体的运动、运动的合成和分解等。
(3) 质点、质点系、刚体、质量等</td></tr>
<tr><td rowspan="2">理论力学的主要内容</td><td>静力学</td><td>运动学</td><td>动力学</td></tr>
<tr><td>(1) 静力学主要研究物体受力分析的基本方法、力系的简化以及物体在力系的作用下的平衡条件。
(2) 静力学是全部工程力学的基础，要想分析机械或建筑物构件的受力大小必须要用静力学知识，另外在解决动力学问题时也必须用到静力学知识</td><td>(1) 运动学就是要了解物体在空间的位置随时间变化的几何性质，诸如点的运动轨迹、运动规律、速度和加速度等。
(2) 运动学按研究对象的不同可分为两类：一是点的运动学，二是刚体的运动学。点的运动学主要研究质点的运动规律，如直线运动、曲线运动及其运动速度、加速度，运动的合成和分解问题等；刚体的基本运动主要是平动和转动以及由这两个基本运动合成的运动，如平面运动、牵连运动等，研究这些运动速度、加速度的合成、分解规律等</td><td>(1) 动力学主要研究机械运动及其作用于其上的力之间的关系，简言之，就是研究运动和力的关系。
(2) 按解决动力学的基本方法来分，动力学可分为如下四个大部分：
① 把动力学基本定律写成微分方程的形式；
② 质点和质点系的动力学基本原理；
③ 动静法基础和分析力学初步；
④ 动力学的几个问题——振动和碰撞及其作用。
动力学的全部内容以几个基本定律为基础。牛顿在开普勒发现行星运动定律和伽利略发现惯性定律的基础上概括和发展了力学的几个基本定律，这几条定律在很大的范围内正确地揭示了物质机械运动的普遍规律</td></tr>
</table>

第二章　静　力　学

第一节　静力学问题综合表

	平面	空间
主要基本概念	静力学：静力学是研究物体受力作用下平衡条件的科学。 力：任何使物体产生加速度或发生形变的别的物体的作用都称为力。 物体的平衡：物体受到几个力的作用仍保持静止或匀速直线运动状态或匀速转动状态，我们说物体处于平衡状态，简称物体的平衡。 平衡条件：要使物体保持平衡状态，作用在物体上的力或力矩应满足一定的条件，这个条件叫做平衡条件	
汇交力系	（1）平面汇交力系的合成； （2）力的分解； （3）平面汇交力系的平衡条件	（1）空间汇交力系的合成； （2）空间汇交力系的平衡条件
力偶系	（1）平面力偶定义及其量度； （2）平面力偶的性质； （3）平面力偶系的平衡条件及其合成方法； （4）平面力偶等效定理	（1）力偶矩用矢量表示的法则； （2）空间力偶的合成定理及其平衡条件； （3）空间力偶等效定理
平行力系	（1）两个同向（或反向）平行力的合成法则； （2）平面平行力系的平衡条件	（1）平行力系中心的求法，物体的重心； （2）求物体重心的几种方法
任意力系	（1）平面任意力系向一点简化的结果； （2）平面任意力系的平衡条件； （3）平面任意力系平衡问题的解法； （4）几个物体组成的系统的平衡问题； （5）静定与静不定问题； （6）关于任意力系的图解方法	（1）力对点之矩用矢量表示的法则； （2）力对轴之矩、力对点之矩与力对于通过该点的轴之矩之间的关系； （3）空间任意力系的平衡方程； （4）具有两个不动点的刚体的平衡； （5）空间刚体约束的基本类型

第二节　力和约束类型

1　力的公理

	内容	应用注意点
二力平衡公理	如果作用在刚体上的两个力互相平衡，则这两个力必须是大小相等、方向相反，并且作用在一条直线上	(1) 应注意作用力与反作用力的区别，本公理所指两力是作用于同一刚体上的一对平衡力； (2) 牵涉三个物体，力的性质不一定相同，一个力消失时，另一个力不一定变化、消失
三力平衡公理	如果作用在刚体上的三个力互相平衡，则这三个力中的任意两个力的合力与第三个力必然是大小相等、方向相反，并且作用在同一条直线上	(1) 这三个力不一定是平面力系，也适用于空间的三个力； (2) 本公理与二力平衡公理联合使用可以解决一类有关“二力杆”与“三力杆”问题
增减平衡力系公理	如果物体上有某一个力系在作用，则可以在该力系加上任意的平衡力系或从该力系中除去任意平衡力系而不改变物体的状态	(1) 本公理仅适用于刚体的外效应，材料力学中计算杆件内力时不适用此公理； (2) 本公理对于刚体外效应的计算可以起到一定的技巧作用。有的结构物往往通过增减适当的平衡力系使计算工作简化
力的可传性定理	作用在物体上的力可以沿其作用线任意移动而不改变刚体的状态，因此，在静力学中力可以被认为是滑动矢量	(1) 本定理只适用于刚体，在材料力学中不适用； (2) 本定理是由二力平衡公理和增减平衡力系公理两个公理得到的
力的平行四边形法则	作用于物体上同一点的两个力 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$，可以合成一个合力 $\boldsymbol{R}$，合力 $\boldsymbol{R}$ 也作用在该点，其大小和方向是以 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 为邻边所组成的平行四边形的对角线	(1) 这个法则说明：力的合成不能简单地用算术的办法相加，而必须用矢量运算的几何相加，即 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$； (2) 用这个法则也可以将一个力分解为与之等效的两个力
作用力与反作用力定律	作用力和反作用力是同时存在的，它们大小相等，方向相反，沿同一作用线分别作用在两个物体上，这就是作用力与反作用力定律	(1) 此定律牵涉两个物体，它们分别是施力物和受力物； (2) 力的性质一定相同； (3) 作用力与反作用力各有各的效果； (4) 同时产生、同时消失、成对出现

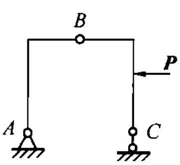
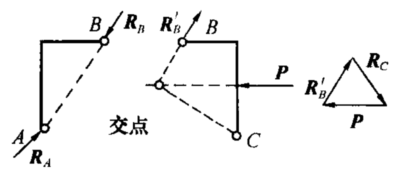
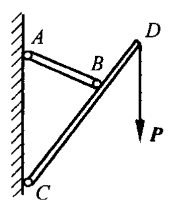
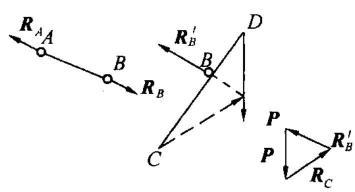
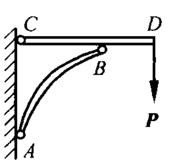
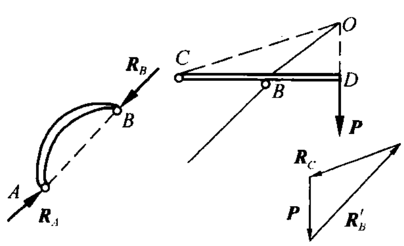
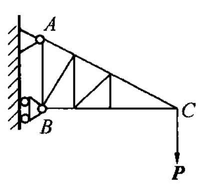
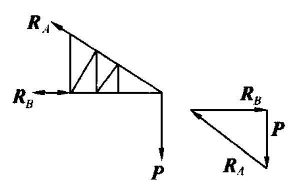
2 内力与外力

<table>
<tr><th></th><th>内力</th><th>外力</th></tr>
<tr><td>意义</td><td>物体系内部各个物体之间的相互作用力称之为内力</td><td>物体系受到的外部物体的作用力称之为外力</td></tr>
<tr><td>区别</td><td>(1) 内力一定不能使物体系的运动状态发生改变，即不能使整个物体系产生加速度，但它能使物体系中的某个物体的运动状态发生改变；
(2) 所有内力的矢量和一定为零；
(3) 所有内力对任意一点之矩的代数和一定为零</td><td>(1) 外力可能使物体系运动状态发生改变，也可能不改变；
(2) 所有外力的矢量和可能为零，也可能不为零；
(3) 所有外力对任意一点之矩的代数和可能为零，也可不为零</td></tr>
<tr><td>分类</td><td>由于内力、外力的划分取决于物体系，因此内力并没有什么严格的分类，就是外力的分类也不是十分严格，如体积力可以是永久力，也可以是暂时力。因此，内力的分类同外力一样没有什么重要区别</td><td>按力的作用特点分类
体积力(自重力、场力、惯性力等)
表面力(接触力)
分布力
集中力
按力的作用时间分类
永久力
暂时力(风力)
按力的作用性质分类
静荷载
动荷载
动静载
移动荷载</td></tr>
<tr><td>联系</td><td colspan="2">内力和外力的划分并没有严格的界限，具有一定的相对性。内力和外力的划分是针对一个确定的物体系来区别的。对同一个力来说，它对于这个物体系来说可能是内力，而对另一个物体系来说就可能是外力。如以整个太阳系为研究对象，则太阳和地球的引力是内力，但如果以地球和月亮为研究对象，那么太阳对它们的引力就是外力了</td></tr>
</table>

3　二力杆与三力杆

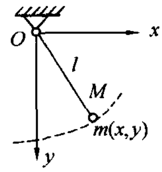
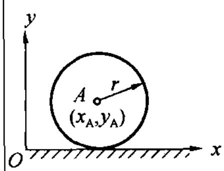
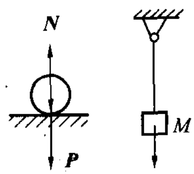
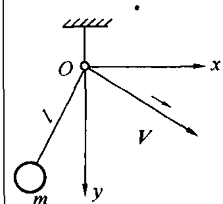
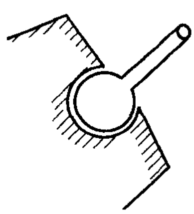
	二力杆	三力杆
概念	构件两端都是铰接，且构件自重忽略不计，这种只有两点受力的杆件称为二力构件，简称二力杆	构件两端铰接，且构件自重忽略不计的条件下有第三力作用于杆件的某一点，这种只有杆端及杆上某点受力的构件称为三力构件，简称三力杆
受力特点	根据二力平衡公理： 这两个力必然大小相等，方向相反，且作用线作用在两端铰链中心的连线上	根据三力平衡公理： (1) 这三个力必相交于一点； (2) 任意两个力的合力与第三个力大小相等、方向相反； (3) 力的三角形封闭
注意点	(1) 二力杆与三力杆是工程结构中经常遇到的两种杆件，掌握了它们的受力特点，对于迅速地画出受力图有着重要的作用； (2) 二力杆与三力杆可能是直杆，也可能是曲杆，也可能是一个构件	

二力杆、三力杆示例

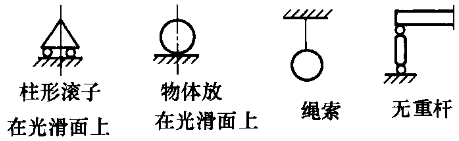
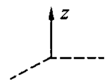
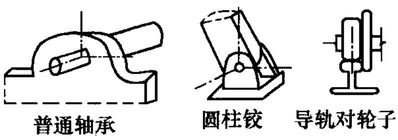
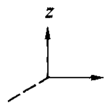
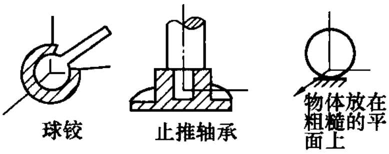
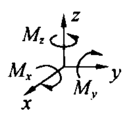
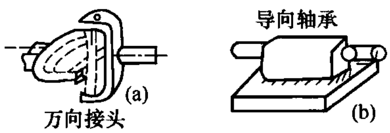
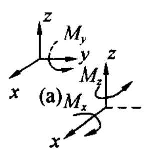
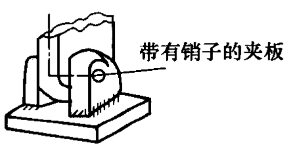
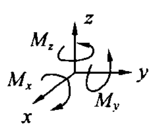
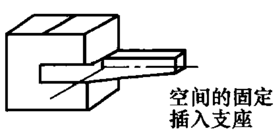
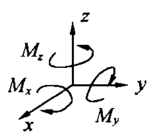
构件	受力图	构件	受力图
	二力杆：AB，三力杆：BC 		二力杆：AB，三力杆：CD 
	二力杆：AB，三力杆：CD 		三力杆：整个构件 ABC 

4 约　　束

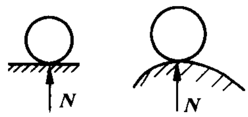
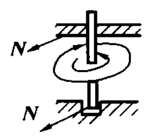
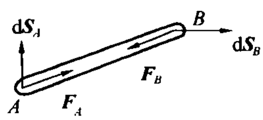
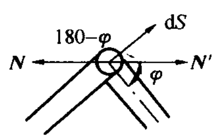
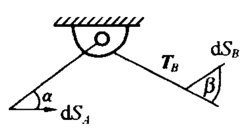
(1) 约束的分类

		说明	示例
按几何性质分类	几何约束	限制质点或质点系在空间的几何位置的条件称为几何约束	 如单摆 M 绕定轴 O 摆动，其约束方程如下： 固定面约束方程 $f(x, y, z)=0$； 单摆的约束为 $x^2+y^2=l^2$
	运动约束	除限制质点系的位置的几何条件外，还要限制质点系的运动情况的运动条件，这种约束称为运动约束	 如车轮沿直线轨道只滚不滑的条件是 $V_A-\omega r=0$, 即　$\dot{x}_A-\dot{\varphi}r=0$
按稳定性分类	稳定约束	质点系所述的约束条件不随时间的变化而变化，这种约束称为稳定约束	 如绳子悬挂重物 M 的约束，固定水平支承面上的约束等都可称为稳定约束
	非稳定约束	随时间而改变的约束条件称为非稳定约束，在约束方程中明显地包含着时间 t	 如匀速地拉一柔性绳，其约束方程为 $x^2+y^2=l^2=(l_0-bt)^2$
按约束能是否作功分类	理想约束	在质点系的任何可能位移中，约束的无功之和等于零，则这种约束为理想约束	详见第 7 页关于“理想约束之功”表
	非理想约束	在质点系的任何可能位移中 i 约束的无功之和并不等于零，这种约束称为非理想约束	 如左图所示方向铰具有摩擦接触面，在任何方向的可能位移中，由于摩擦而做功

(2) 空间约束种类

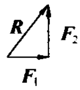
约束类型	空间维数	约束反力的个数
		1
		2
		3
		4
		5
		6

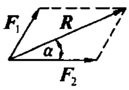
(3) 理想约束之功

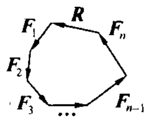
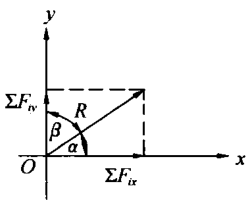
<table>
<tr><th>理想约束名称</th><th>理想约束之功</th><th>图形</th><th>约束之功为零的证明</th></tr>
<tr><td>支承质点的固定光滑平面</td><td rowspan="5">理想约束所做之功等于零，即 $d'A=0$</td><td>
</td><td>因约束反力 $\boldsymbol{N}\perp d\boldsymbol{S}$，故 $d'A=0$</td></tr>
<tr><td>支承刚体的固定铰链</td><td>
</td><td>因 $d'S=0$，故 $d'A=0$</td></tr>
<tr><td>连接两质点的无重刚杆</td><td>
</td><td>因 $\boldsymbol{F}_A=-\boldsymbol{F}_B$，$\boldsymbol{P}_{AB}\,d\boldsymbol{S}_A=\boldsymbol{P}_{AB}\,d\boldsymbol{S}_B=d\boldsymbol{S}$，故 $d'A=(\boldsymbol{F}_A+\boldsymbol{F}_B)d\boldsymbol{S}=0$</td></tr>
<tr><td>可连接两刚体的光滑铰链</td><td>
</td><td>因 $\boldsymbol{N}=-\boldsymbol{N}'$，且有同一dS，故 $d'A=\Sigma dA_i=(\boldsymbol{N}+\boldsymbol{N}')dS=0$</td></tr>
<tr><td>连接两质点可伸长的柔性绳</td><td>
</td><td>因 $\boldsymbol{T}_A=\boldsymbol{T}_B$，$P_{轴}\,d\boldsymbol{S}_A=P_{轴}\,d\boldsymbol{S}_B$，故 $\Sigma d'A=\boldsymbol{T}_A\cdot d\boldsymbol{S}_A+\boldsymbol{T}_B\cdot d\boldsymbol{S}_B=\boldsymbol{T}_A d\boldsymbol{S}_A\cos\alpha-\boldsymbol{T}_B d\boldsymbol{S}_B\cos\beta=0$</td></tr>
<tr><td>功率的计算</td><td colspan="3">$N=\frac{dA}{dt}=\frac{\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}}{dt}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{V}=XV_x+YV_y+ZV_z$
功率的单位：1 马力=75kg·m/s=0.736kW</td></tr>
</table>

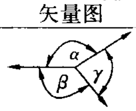
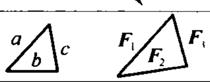
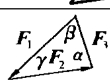
第三节 力 系

1 汇交力系

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td>平面汇交力系</td><td>空间汇交力系</td></tr>
<tr><td rowspan="2">汇交力系的合成法</td><td>矢量法</td><td>(1) 三角形法：$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$


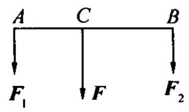
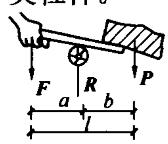
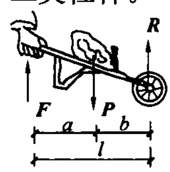
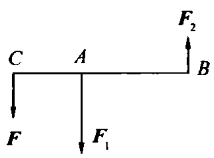
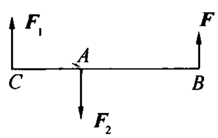
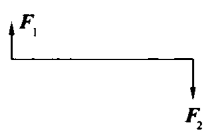
(2) 平行四边形法：$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$


$|\boldsymbol{R}|=\sqrt{\boldsymbol{F}_1^2+\boldsymbol{F}_2^2+2\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{F}_2\cos\alpha}$
(3) 多边形法：
$\boldsymbol{R}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i$

</td><td>合力 $\boldsymbol{R}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i$ 或应用平行六面体法则，先以 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，$\boldsymbol{F}_3$ 三力为边作平行六面体，引对角线即得 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，$\boldsymbol{F}_3$ 三个力的合力 $\boldsymbol{R}_1$，再以 $\boldsymbol{R}_1$ 为一个力，与 $\boldsymbol{F}_4$，$\boldsymbol{F}_5$ 三边再作平行六面体，且引对角线即得 $\boldsymbol{R}_1$，$\boldsymbol{F}_4$，$\boldsymbol{F}_5$ 三个力的合力 $\boldsymbol{R}_2$，依此类推，直至最后便可得 $\boldsymbol{R}$</td></tr>
<tr><td>解析法</td><td>

力的大小：
$\boldsymbol{R}=\sqrt{(\Sigma\boldsymbol{F}_{ix})^2+(\Sigma\boldsymbol{F}_{iy})^2}$
力的方向：$\cos\alpha=\dfrac{\Sigma\boldsymbol{F}_{ix}}{\boldsymbol{R}}$
$\cos\beta=\dfrac{\Sigma\boldsymbol{F}_{iy}}{\boldsymbol{R}}$
或 $\tan\gamma=\dfrac{\Sigma\boldsymbol{F}_{iy}}{\Sigma\boldsymbol{F}_{ix}}$</td><td>力的大小：
$\boldsymbol{R}=\sqrt{(\Sigma\boldsymbol{F}_{ix})^2+(\Sigma\boldsymbol{F}_{iy})^2+(\Sigma\boldsymbol{F}_{iz})^2}$
力的方向：$\cos\alpha=\dfrac{\Sigma\boldsymbol{F}_{ix}}{\boldsymbol{R}}$
$\cos\beta=\dfrac{\Sigma\boldsymbol{F}_{iy}}{\boldsymbol{R}}$
$\cos\gamma=\dfrac{\Sigma\boldsymbol{F}_{iz}}{\boldsymbol{R}}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">解决汇交力系平衡问题的具体方法</td><td colspan="2">(1) 适当地选择平衡物体；
(2) 分析物体的受力情况，解除约束，以约束反力代之，注意力的方向要画准确，画出受力图；
(3) 若用矢量法，应注意根据物体平衡时力的多边形是封闭的这一原理，求出未知力的方向，而未知力的大小，可从图中按比例量出。画图时，应根据需要选择适当的比例尺；用解析法时，应注意选择合适的坐标系，一般情况选择其中一个力的方向作为坐标系的一个轴，并且使其他力能尽量与坐标轴成特殊角度，并假定未知力的方向；
(4) 根据物体的平衡条件列出平衡方程式，并解出未知力的大小与方向</td></tr>
<tr><td colspan="2">物体仅受三力作用平衡时解题的几种方法</td><td colspan="2">(1) 物体仅受二力作用平衡时，力的作用线即为二力作用点连线；
(2) 物体仅受三力作用平衡时，应注意“三力平衡公理”的应用，一般解三力平衡有如下三种方法，如表 2-1 所示
表 2-1
<table>
<tr><td>基本方法</td><td>矢量图</td><td>计算公式</td></tr>
<tr><td>勒密原理</td><td>
</td><td>$\dfrac{F_1}{\sin\alpha}=\dfrac{F_2}{\sin\beta}=\dfrac{F_3}{\sin\gamma}$</td></tr>
<tr><td>相似三角形原理</td><td>
</td><td>$\dfrac{F_1}{a}=\dfrac{F_2}{b}=\dfrac{F_3}{c}$</td></tr>
<tr><td>正弦定理</td><td>
</td><td>$\dfrac{F_1}{\sin\alpha}=\dfrac{F_2}{\sin\beta}=\dfrac{F_3}{\sin\gamma}$</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

2 平行力系

(1) 平行力系的合成方法

<table>
<tr><td rowspan="8">平行力系的合成法及计算</td><td colspan="5">平面平行力系</td><td>空间平行力系</td></tr>
<tr><td colspan="5">(1) 仅有两个平行力的合成结果</td><td rowspan="4">空间平行力系可以看成是空间任意力系的特殊情况。
空间平行力系的平衡条件是：
$\begin{cases}\Sigma \boldsymbol{F}_{iz}=0\\ \Sigma M_x(\boldsymbol{F}_i)=0\\ \Sigma M_y(\boldsymbol{F}_i)=0\end{cases}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">两个力 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 不共线</td><td>合成结果</td><td>附图</td><td>实际应用</td></tr>
<tr><td colspan="2">同向平行力</td><td>合力：$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$
合力作用线
$\boldsymbol{F}_1\cdot AC=\boldsymbol{F}_2\cdot BC$</td><td></td><td rowspan="4">第一类杠杆：
固定轴在力与荷载的作用点之间的杠杆为第一类杠杆。

依图有 $\boldsymbol{F}\cdot l=\boldsymbol{P}\cdot b$
第二类杠杆：
力的作用点及荷载在固定轴的同侧的杠杆为第二类杠杆。

依图有 $\boldsymbol{F}\cdot l=\boldsymbol{P}\cdot b$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">异向平行力</td><td rowspan="2">当 $\boldsymbol{F}_1\neq\boldsymbol{F}_2$ 且 $\boldsymbol{F}_1>\boldsymbol{F}_2$ 时</td><td>合力
$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1-\boldsymbol{F}_2$
合力作用线
$\boldsymbol{F}_1\cdot AC=\boldsymbol{F}_2\cdot BC$</td><td></td></tr>
<tr><td>合力
$\boldsymbol{F}=-\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$
合力作用线
$\boldsymbol{F}_1\cdot BC=\boldsymbol{F}_2\cdot AB$</td><td></td><td rowspan="3">平行力系中所涉及到的物体的重心是根据平行力系的理论求得的；所谓物体的重心就是由组成物体质点的重力所组成的平行力系的中心；物体重心的求法往往根据物体形状的复杂情况决定，具体方法详见下节</td></tr>
<tr><td>当 $\boldsymbol{F}_1=\boldsymbol{F}_2$ 时</td><td>为一力偶，没有作用线</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5">(2) 两个平行力以上的平行力合成结果
合力 $\boldsymbol{R}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i$（代数和）或两两合成（遵照上面两个平行力的合成方法）。
合力作用线 $d=\Sigma \boldsymbol{F}_i d_i/\Sigma \boldsymbol{F}_i$。
$\boldsymbol{F}_i$ 为相应的平行力；
d_i 为 $\boldsymbol{F}_i$ 至某一矩心的距离；
d 为合力 $\boldsymbol{R}$ 到矩心的距离</td></tr>
</table>

(2) 物体重心的求法

方法	方法说明	示例
积分法	见下	见下

积分法

方法说明：

平面图形的重心坐标公式

$$x_c=\frac{\sum \Delta s_i x_i}{s},\quad y_c=\frac{\sum \Delta s_i y_i}{s}$$

当 $\Delta s \to 0$，$n\to\infty$时，便有

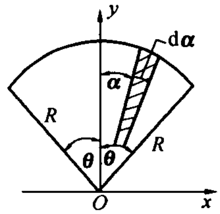
$$x_c=\frac{\int_s x\,\mathrm{d}s}{s},\quad y_c=\frac{\int_s y\,\mathrm{d}s}{s}$$

同理，对于物体的重心坐标公式(见下栏分割法)，当 $\Delta V\to 0$，$n\to\infty$时，便有

$$x_c=\frac{\int_V x_i\,\mathrm{d}V}{V},\quad y_c=\frac{\int_V y_i\,\mathrm{d}V}{V},$$

$$z_c=\frac{\int_V z_i\,\mathrm{d}V}{V}$$

示例：



如左图，试求半径为 R，圆心角为 2θ 的扇形薄板的重心。

解：把扇形分成许多微小的面积元素 $\mathrm{d}s$，则每个微小面积元素均为一三角形，其重心在距顶点的$\frac{2}{3}R$ 处，即

$$\mathrm{d}s=\frac{R^2}{2}\mathrm{d}\alpha,\quad y=\frac{2}{3}R\cos\alpha$$

代人左栏公式有

$$y_c=\frac{\int_s y\,\mathrm{d}s}{s}=\frac{\int_{-\theta}^{\theta}\frac{2}{3}R\cos\alpha\frac{R^2}{2}\mathrm{d}\alpha}{R^2\theta}=\frac{R}{3\theta}\int_{-\theta}^{\theta}\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha$$

$$=\frac{2}{3}\,\frac{R\sin\theta}{\theta}$$

组合法 — 分割法

方法说明：

在工程实际中，构件的形状往往比较复杂，但它们大多数都由一些简单形状的面积或体积组成(如矩形、三角形、圆、球体、柱体等)。对这类问题，可以用分割法把它分成若干简单形体，组成的图形体的重心是容易求得的，然后根据重心坐标公式求出整个形体的重心。重心坐标公式如下：

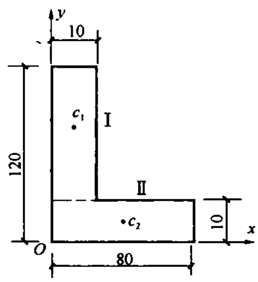
$$x_c=\frac{\sum p_i x_i}{p},\quad y_c=\frac{\sum p_i y_i}{p},$$

$$z_c=\frac{\sum p_i z_i}{p}$$

对于平面图形，其重心坐标公式如下：

$$x_c=\frac{\sum \Delta s_i x_i}{s},\quad y=\frac{\sum \Delta s_i y_i}{s}$$

示例：



如左图，试求角钢截面形心位置，尺寸见图。

解：将角钢分成两个矩形Ⅰ和Ⅱ，一般以列表的方法分别计算，如表 2-2 所示，这样清楚规整。

表 2-2

面积	Δs_i /mm²	x_i /mm	y_i /mm	$s_i x_i$ /mm³	$s_i y_i$ /mm³
Ⅰ	$s_{\mathrm{I}}=110\times10=1100$	$x_1=5$	$y_1=65$	5500	71500
Ⅱ	$s_{\mathrm{II}}=80\times10=800$	$x_2=40$	$y_2=5$	32000	4000
Σ	1900			37500	75500

依上表计算结果有

$$x_c=\frac{\sum s_i x_i}{\sum s_i}=\frac{37500}{1900}\approx 19.24(\mathrm{mm})$$

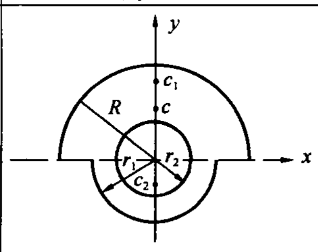
$$y_c=\frac{\sum s_i y_i}{\sum s_i}=\frac{75500}{1900}\approx 39.74(\mathrm{mm})$$

组合法 — 负面积法

方法说明：

如果物体或匀质薄板内挖去一部分(例如有空穴的物体)，求这类物体的重心时可用上述分割法的公式计算，只是切去部分的体积或面积应取负值称为负面积法

示例：



如左图，激振器中的偏心轮匀质等厚，各部分尺寸为 $R=10\text{cm}$，$r_2=1.3\text{cm}$，$r_1=3\text{cm}$，试确定偏心轮的重心位置。

解：取坐标原点与圆心重合，图形对称于 y 轴，故 $x_c=0$，因此只需求 y_c，计算过程详