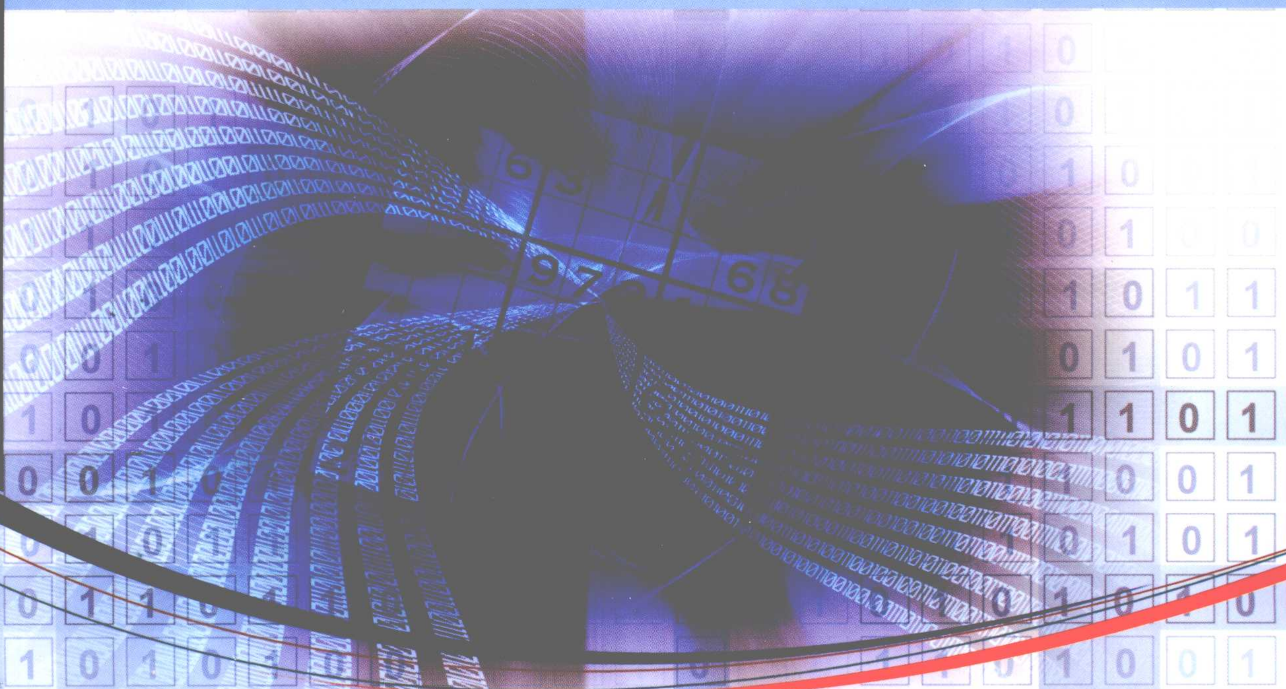
文化课系列

XIANXING DAISHU

线性代数

主　编◎高克权



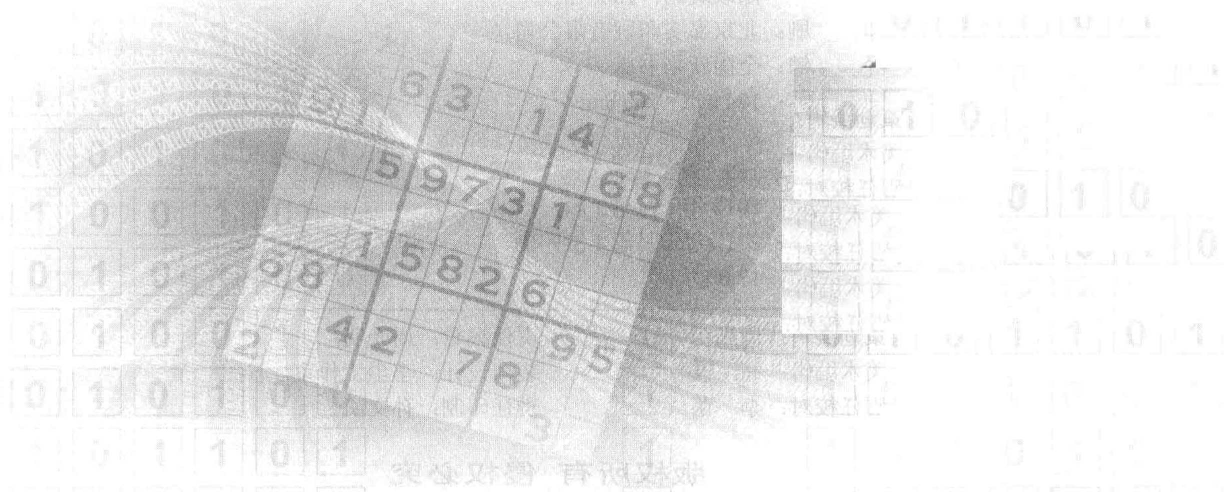
北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

文化课系列

XIANXING DAISHU

线性代数

主　编◎高克权
参　编◎李小申　封平华　胡正波　许丽萍　马慧萍



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数／高克权主编．—北京：北京师范大学出版社，2012.1

ISBN 978-7-303-13094-8

Ⅰ．①线…　Ⅱ．①高…　Ⅲ．①线性代数—高等学校—教材　Ⅳ．①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第149552号

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京新街口外大街19号
邮政编码：100875
印　　刷：北京嘉实印刷有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：184 mm×260 mm
印　　张：8
字　　数：165千字
版　　次：2012年1月第1版
印　　次：2012年1月第1次印刷
定　　价：19.00元

策划编辑：周光明　　责任编辑：周光明
美术编辑：高　霞　　装帧设计：李尘工作室
责任校对：李　菡　　责任印制：孙文凯

前　言

作为大学数学基础课程的线性代数，是中学代数的继续和提高，要注意到它与中学代数有着很大的不同，这种不同不仅表现在内容的深度上，更重要的是表现在观点和方法上，在学习这门课程时，要熟悉其基本概念、基本理论和基本方法，并在抽象思维、逻辑推理等方面得到一些训练，这一点读者在学习过程中要逐渐体会.

本书主要介绍线性代数的一些基本知识，共分六章. 第一章介绍行列式的概念、性质与计算方法，注意到了与中学教学内容的衔接，简单介绍了二阶和三阶行列式，需要一提的是，本书将克莱姆（Cramer）法则放在了第二章与矩阵的逆一起做了简单介绍. 第二章首先给出了少量关于矩阵及其运算的实际背景的内容，引入矩阵这一十分有用的工具，介绍了矩阵的概念与运算，并在讨论矩阵的逆时轻而易举地得出克莱姆法则，提高矩阵运算能力和利用矩阵方法解决实际问题的能力在本章和后面各章中得到充分体现. 第三章引入了矩阵的初等变换和秩的概念，借此进一步解决计算矩阵的逆和确定矩阵的秩的问题. 第四章以矩阵为工具，用读者容易理解的方法得出线性方程组有解的充分必要条件并解决了线性方程组求解的问题. 第五章借助于矩阵和线性方程组的理论，主要讨论向量组的线性相关性这一抽象的不易理解的内容，并进一步讨论了线性方程组解的结构. 第六章内容是相似矩阵与二次型，简要介绍了矩阵特征值理论与实二次型的理论. 读者只要有初等数学的基础知识就可阅读本书，学习完本书内容，可为读者学习后继课程及进一步扩大知识面奠定必要的数学基础.

我们曾在各类专业和班级中不止一次地使用过这本书的原稿，这次在内容的编写上，我们力求做到由浅入深，深入浅出，化难为易，前后呼应，对一些比较困难的概念，表述尽可能通俗，尽量多举例子，并且体现了适用性，以基本够用为度控制篇幅内容，对一些复杂的证明不作高的要求，读者只需记住结论、弄清含义、会用就可以了. 各章都配有不少习题可供选用，书末附有习题答案，读者在练习时要注意先自己独立思考，让这些题型在大脑中不断的加工、体会，形成自己对这类题型的理解，如果遇到困难，再参看答案.

本书第一章由李小申老师编写，第二、五章由河南教育学院封平华老师编写，第三章由华豫学院胡正波老师编写，第四章由许丽萍老师编写，第六章由马慧萍编写，李小申编写了全部习题解答，全书由高克权统稿. 本书在编写过程中参考了一些相关的教材并从中选用了部分例题和习题，在教学过程中得到了各位老师们的关心和支持，在此一并表示感谢！

希望得到同行与读者对本书的建议和指正.

编　者

2011 年 12 月

目录

第一章　行列式

行列式是许多学科和生产实践中有广泛应用的一个有力工具，本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质及其计算方法.

1　行列式的定义

一、二阶行列式和三阶行列式

由 4 个数 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 构成两行两列，并在左右两边各加一条竖线，规定

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

我们称之为二阶行列式，其中 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 称为这个二阶行列式的元素，横排称为行，竖排称为列，从左上角到右下角的对角线称为行列式的主对角线，从右上角到左下角的对角线称为行列式的次对角线.

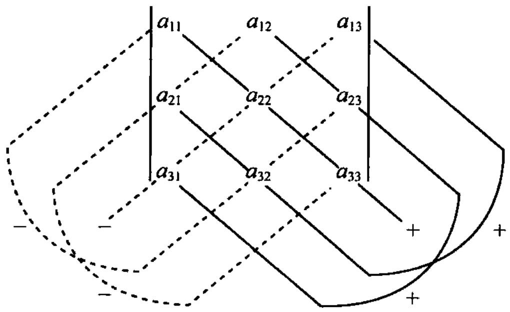
也就是说，二阶行列式由两行两列共 4 个元素构成，其右端为二阶行列式的展开式，是由左端主对角线元素相乘取正、次对角线元素相乘取负构成的表示式，或者说，二阶行列式是由这样的对角线方法确定的一个数.

类似的，引入记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，也用对角线方法，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

我们称之为三阶行列式.

三阶行列式是由三行三列共 9 个元素构成的，它的展开式中有 6 个乘积项，每个乘积项由来自不同行、不同列的三个元素相乘得到，且带正号和负号的项各一半，可用下图表示：



例 1 计算下列各行列式：

(1) $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

解：(1) $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = (-3)\times 2 - 4\times(-2) = 2$；

(2) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 6+6+0-4-0-45 = -37.$

二、*n* 阶行列式

由 n^2 个数组成 n 行 n 列，并在左右两边各加一竖线，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称之为 n 阶行列式.

我们知道，二阶行列式、三阶行列式可用对角线方法来进行，但是，对于四阶行列式及四阶以上行列式，对角线法不适用，需要采用另外的方法给出定义.

为此，我们先引入余子式和代数余子式的概念：

定义 1 在 D 中把元素 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列划去后留下的 $n-1$ 阶行列式，称为元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}，并称 $(-1)^{i+j}M_{ij} = A_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式.

例如，在以下四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

中，元素 $a_{32}=-1$ 的余子式为

$$M_{32}=\begin{vmatrix}2&-2&4\\3&1&1\\2&5&1\end{vmatrix}=2-4+60-8+6-10=46$$

代数余子式为

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2&-2&4\\3&1&1\\2&5&1\end{vmatrix}=-46.$$

为了统一起见，我们从一阶行列式开始探讨：

当 $n=1$ 时，规定一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$，注意等号左端不是绝对值符号，而是行列式符号.

当 $n=2$ 时，定义二阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}$$

其中 A_{11}，A_{12} 为元素 a_{11}，a_{12} 的代数余子式.

当 $n=3$ 时，定义三阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

其中 A_{11}，A_{12}，A_{13} 为元素 a_{11}，a_{12}，a_{13} 的代数余子式.

可见，现在的定义与前面所述对角线法得到的结果完全相同.

在此基础上可以用此展开法定义四阶行列式，以此类推，假设已定义了 $n-1$ 阶行列式，则将 D 按第一行展开，我们定义 n 阶行列式为

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$$

其中，A_{1j} 为 a_{1j} $(j=1,2,\cdots,n)$ 的代数余子式 .

例 2 计算下列四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}2&1&-2&4\\3&0&1&1\\0&-1&2&3\\2&0&5&1\end{vmatrix}$$

解：由以上所述定义，将 D 按第一行展开，有

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$4 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -8 + 37 + 2 + 52 = 83.$$

实际上，行列式可以按任一行展开，即可用任一行的展开式来定义 n 阶行列式：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, (i = 1, 2, \cdots, n)$$

下面我们还可以看到，行列式可以用任一列展开.

2　行列式的性质与计算

先介绍转置行列式的概念：

把行列式 D 中的行与列依次互换后，得到的新行列式，我们称之为 D 的转置行列式，记为 D^{T}（或 D'），即

$$\text{设 } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{ 则 } D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

显然 D 也是 D^{T} 的转置行列式.

性质 1　行列式 D 与它的转置行列式 D^{T} 的值相等，即 $D = D^{\mathrm{T}}$.

性质 1 表明，在行列式中，行和列的地位是对称的，也就是说，凡是对行成立的性质，对列也同样成立.

我们也可以用任一列的展开式来定义 n 阶行列式，即有

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}, (j = 1, 2, \cdots, n)$$

这样一来，在利用定义计算行列式时，如果该行列式的某一行(或列)元素中零元素较多，可以按该行(或列)展开，计算会简单些.

例 1 计算下列四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}2 & 1 & -2 & 4\\ 3 & 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 5 & 1\end{vmatrix}$$

解：第二列零元素较多，我们按第二列展开，有

$$\begin{aligned}D&=a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}+a_{42}A_{42}\\ &=1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 1\end{vmatrix}+0+(-1)(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & -2 & 4\\ 3 & 1 & 1\\ 2 & 5 & 1\end{vmatrix}+0\\ &=37+46=83.\end{aligned}$$

有时会遇到某些特殊的行列式，而当阶数较高时，利用性质把阶数较高的行列式化为阶数较低的行列式再求值的方法，即所谓的“降阶法”，也是一种常用的方法.

例 2 计算下列各 n 阶行列式：

(1)对角形行列式 $D=\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$

(2)上三角形行列式 $D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$

(3)下三角形行列式 $D=\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$

解：(1)由定义，易得 $D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$；

(2)依次按第一列展开，得

$$D=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix}a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n}\\ 0 & a_{44} & \cdots & a_{4n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\cdots$$

$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$；

(3)同理，可得 $D = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

此题的结论以后可以作为公式直接使用，而利用性质把行列式化为三角行列式并进行计算，即所谓的"化三角形法"，也是一种常用的方法.

我们继续介绍行列式的性质：

性质 2 将行列式的任意两行(或列)互换，行列式的值改变符号.

性质 3 行列式中两行(或列)对应元素全部相同时，行列式的值为零.

因为由性质 2，交换了行列式 D 的两行后行列式 D 改变符号，所以有 $D=-D$，于是 $D=0$.

性质 4 行列式一行(或列)的公因子可以提到行列式记号的外面.

性质 5 如果行列式中有一行(或列)的全部元素都是零，那么这个行列式的值是零.

性质 6 如果行列式中某一行(或列)的每一个元素可以写成两数之和，如第 i 行 $a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}$，$(i,j=1,2,\cdots,n)$，那么此行列式等于两个行列式之和，这两个行列式的第 i 行的元素分别是 $b_{i1},b_{i2},\cdots,b_{in}$ 和 $c_{i1},c_{i2},\cdots,c_{in}$，其他各行(或列)的元素与原行列式相应各行(或列)的元素相同.

例如，二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c+d & e+f \end{vmatrix} = a(e+f)-b(c+d)=(ae-bc)+(af-bd)$$

$$= \begin{vmatrix} a & b \\ c & e \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ d & f \end{vmatrix}$$

性质 7 如果行列式中有两行(或列)对应元素成比例，那么这个行列式的值为零.

性质 8 行列式中任意一行(或列)的元素与另一行(或列)对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即 $a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0(i\neq j)$.

性质 9 如果把行列式中某一行(或列)所有元素的倍数加到另一行(或列)对应的元素上去，则行列式的值不变.

这是最主要的一条性质.

在进行行列式的计算时，要细心观察，首先看行列式的各行(或各列)元素的特点，然后选择利用哪一条性质能把行列式的计算简化，有时还可以在计算时注意到尽量避免分数运算.

例 3 利用行列式的性质计算下列四阶行列式的值：

(1) $D=\begin{vmatrix}2&1&-2&4\\3&0&1&1\\0&-1&2&3\\2&0&5&1\end{vmatrix}$； (2) $D=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}$.

解： 我们可以将 D 化为对角形行列式，然后计算此行列式的值.

(1)利用行列式的性质，得

$$D=-\begin{vmatrix}1&2&-2&4\\0&3&1&1\\-1&0&2&3\\0&2&5&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2&2&4\\0&1&3&1\\-1&2&0&3\\0&5&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2&2&4\\0&1&3&1\\0&0&2&7\\0&5&2&1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&-2&2&4\\0&1&3&1\\0&0&2&7\\0&0&-13&-4\end{vmatrix}=\frac{1}{26}\begin{vmatrix}1&-2&2&4\\0&1&3&1\\0&0&26&91\\0&0&-26&-8\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{26}\begin{vmatrix}1&-2&2&4\\0&1&3&1\\0&0&26&91\\0&0&0&83\end{vmatrix}=83.$$

(2)计算行列式有时需要先观察其中元素之间有什么规律性，我们在这里注意到：D 的各行(或列)元素之和都是 6，把第 2 列、第 3 列、第 4 列都加到第 1 列上去，即可得

$$D=\begin{vmatrix}6&1&1&1\\6&3&1&1\\6&1&3&1\\6&1&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix}=48.$$

例 4 计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}x&a&a&\cdots&a\\a&x&a&\cdots&a\\a&a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$

解： 仿上例的方法，即得

$$D=\begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & x & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+(n-1)a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

例 3 是例 4 的特殊情况.

例 5 证明 n 阶范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(a_i-a_j)$$

其中“$\prod$”是表示全体同类因子的乘积.

该题可用数学归纳法证明，从略.

这是一个常用的行列式，要记住该行列式的结论，会使用它，例如

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix}=(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_2-a_1);$$

$$D_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \end{vmatrix}$$

$$=(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_2-a_1);$$

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 16 \\ 27 & -8 & 1 & 64 \end{vmatrix}=(4-3)(4+2)(4-1)(1-3)(1+2)(-2-3)$$

$$=-540.$$

习题一

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$；(2) $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$；(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$；(4) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 4 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$；(6) $\begin{vmatrix} a-5 & -2 & 4 \\ -2 & a-2 & 2 \\ 4 & 2 & a-5 \end{vmatrix}$.

2. 求行列式 D 中元素 -1，2，-3 的余子式及代数余子式，其中

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

3. 计算下列四阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$；(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 7 & 2 \end{vmatrix}$；(3) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$；(5) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -3 & -3 \\ -3 & 2 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & 2 & -3 \\ -3 & -3 & -3 & 2 \end{vmatrix}$；

(6) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

4. 计算下列五阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 \\ a_5 & b & c & d & e \end{vmatrix}$；(2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

5. 计算 $n+1$ 阶行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}.$$

6. 解下列方程组：

(1) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}=0$；(2) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & x+2 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & x+4 & -9 \\ 1 & -2 & x & 9 \end{vmatrix}=0.$

第二章 矩阵及其运算

矩阵是线性代数的主要研究对象之一，在矩阵的理论中，矩阵的运算起着重要的作用，在这一章里我们将要介绍矩阵的概念、特殊矩阵、矩阵的基本运算、矩阵的初等变换、方阵的行列式、逆矩阵的概念及其求法.

1 矩阵的基本概念与运算

一、矩阵的概念

矩阵是从大量的实际问题中抽象出来的数学概念，在许多实际问题中，我们会碰到由若干个数排成行与列的长方形阵列，在研究问题时常常把这样的一个阵列当作一个整体来考虑.

例 1 某公司要将某种抗震救灾物资从三个产地运往三个受灾地区（单位:t）的运输量列表如下：

运输量 灾区 / 产地	A_1	A_2	A_3
1	203	21	24
2	156	0	16
3	224	40	23

上述表格可以简单记为：

$$A=\begin{pmatrix}203 & 21 & 24\\ 156 & 0 & 16\\ 224 & 40 & 23\end{pmatrix}$$

请问：它是行列式吗？不是!

例 2 张三和李四到附近一家小吃店去吃早饭，张三要了两个包子、一个面包和一杯牛奶，李四要了四个包子和两杯牛奶，已知包子的价格是 5 角，面包的价格是 2 元，牛奶的价格是 1 元，简单列成表格，即为

	包子	面包	牛奶
张三	2	1	1
李四	4	0	2