权威　实用　经典

2013 人大考研

2013年

考研数学

高分复习全书（数学一、二）习题详解

曹显兵　刘喜波／编著

赠

中国人民大学出版社

2013年
考研数学高分复习全书(数学一、二)习题详解

曹显兵　刘喜波　编著

中国人民大学出版社
·北京·

目　录

第一部分 高等数学

第一章 函数、极限与连续

习题精选一

一、填空题

1. $(ab)^{\frac{3}{2}}$.

【分析】 此题为未定式"1^{∞}"型.

【详解】 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{x}\left(\frac{a^x+b^x}{2}-1\right)}=\mathrm{e}^{\frac{3}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x+b^x-2}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{3}{2}\lim\limits_{x\to 0}(a^x\ln a+b^x\ln b)}$

$$=\mathrm{e}^{\frac{3}{2}(\ln a+\ln b)}=(ab)^{\frac{3}{2}}.$$

2. $-\dfrac{3}{2}$.

【详解】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}ax^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\dfrac{2}{3}a.$

由题意知$-\dfrac{2}{3}a=1$,所以$a=-\dfrac{3}{2}$.

3. $10\ln 3$.

【详解】 因为$\lim\limits_{x\to 0}(3^x-1)=0$,所以$\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin 2x}\right)=0$,故$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sin 2x}=0$.

由 $\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin 2x}\right)\sim\dfrac{f(x)}{\sin 2x}$,$3^x-1=\mathrm{e}^{x\ln 3}-1\sim x\ln 3$,得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{\sin 2x}}{x\ln 3}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x^2\ln 3}=5,$$

故

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=10\ln 3.$$

4. $\dfrac{1}{2}$.

【分析】 作变量替换 $u=xt$,然后求极限.

【详解】 令 $u = xt$，则

$$\int_{\frac{x}{2}}^{x} \frac{e^{xt}-1}{t}dt = \int_{\frac{x^2}{2}}^{x^2} \frac{e^u-1}{u}du,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin x^2}\int_{\frac{x}{2}}^{x} \frac{e^{xt}-1}{t}dt = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_{\frac{x^2}{2}}^{x^2} \frac{e^u-1}{u}du = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\left(2x\frac{e^{x^2}-1}{x^2} - x\frac{e^{x^2/2}-1}{x^2/2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-e^{x^2/2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2/2}(e^{x^2/2}-1)}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^{x^2/2}-1)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

5. $\alpha = 1,\ \beta = \frac{1}{2}$.

【详解】 由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-(\alpha+\beta\sin x)}{\sin^2 x}$ 存在知

$$\lim_{x\to 0}[\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-(\alpha+\beta\sin x)] = 0,$$

解得 $\alpha = 1$. 由泰勒公式得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-(\alpha+\beta\sin x)}{\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{2}(\sin x+\sin^2 x)-\frac{1}{8}(\sin x+\sin^2 x)^2-(1+\beta\sin x)+o(\sin^2 x)}{\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\sin x+\frac{3}{8}\sin^2 x}{\sin^2 x}$$

存在. 从而 $\beta = \frac{1}{2}$.

故 $\alpha = 1,\ \beta = \frac{1}{2}$.

二、选择题

1. (B)

【分析】 利用无穷小量阶的比较.

【详解】 $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin^2 x)\cos x}{3x^2+4x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{3x^2+4x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2+4x^3} = \frac{1}{3}.$$

所以 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的同阶但非等价的无穷小. 故答案应选(B).

2. (C)

【详解】 $$F(x) = \int_0^x (x^2-t^2)f(t)dt = x^2\int_0^x f(t)dt - \int_0^x t^2 f(t)dt,$$

$$F'(x) = 2x\int_0^x f(t)dt + x^2 f(x) - x^2 f(x) = 2x\int_0^x f(t)dt.$$

因为 $F'(x)$ 与 x^k 是同阶无穷小，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F'(x)}{x^k}$ 存在且不为零，用洛必达法则可得

$$\lim_{x\to0}\frac{F'(x)}{x^k}=\lim_{x\to0}\frac{2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x^{k-1}}=\lim_{x\to0}\frac{2f(x)}{(k-1)x^{k-2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2f'(x)x}{(k-1)(k-2)x^{k-3}}=2f'(0)\lim_{x\to0}\frac{1}{(k-1)(k-2)x^{k-3}}$$

存在且不为零，从而 $k-3=0$，即 $k=3$. 故答案应选(C).

3. (A)

【详解】 函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的间断点是 $x=0,\pm\frac{\pi}{2},1$，而

$$\lim_{x\to0^+}\frac{(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+\mathrm{e})\tan x}{x(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e})}=1,\quad \lim_{x\to0^-}\frac{(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+\mathrm{e})\tan x}{x(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e})}=-1,$$

故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点. 但

$$\lim_{x\to\pm\frac{\pi}{2}}\frac{(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+\mathrm{e})\tan x}{x(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e})}=\infty,\quad \lim_{x\to1}\frac{(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+\mathrm{e})\tan x}{x(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e})}=\infty,$$

故答案应选(A).

4. (C)

【详解】 由 $f(x),g(x)$ 可导知，$f(x),g(x)$ 连续. 于是有：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)$. 又 $f(x_0)<g(x_0)$，所以有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)<\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$. 故选(C).

【评注】 本题也可用排除法. 取 $f(x)=x,g(x)=x+1$，则 $f(x)<g(x),x\in(-\infty,+\infty)$. (A),(B),(D) 不成立，故选(C).

5. (C)

【详解】 由 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$，即 $\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)}{x}=2$，因而 $g(0)=0$，$g'(0)=2$. 故答案应选(C).

三、解答题

1.【详解】 用洛必达法则有

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{1-\cos x+\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{-2x}{(1+x)(1-x)}}{\sin x+2\sin x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{-2}{(1+x)(1-x)(1+2\cos x)}=-\frac{2}{3}.$$

2.【详解】 由泰勒公式

$$\sqrt{1+x^2}=1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2),\qquad \sqrt[3]{1+2\sin^2 x}=1+\frac{2}{3}\sin^2 x+o(x^2),$$

所以

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt[3]{1+2\sin^2 x}}{\tan^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(1+\frac{1}{2}x^2\right)-\left(1+\frac{2}{3}\sin^2 x\right)+o(x^2)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}\sin^2x}{x^2}=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{6}.$$

3.【详解】 $$\lim_{x\to0}(3e^{\frac{x}{x-1}}-2)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{3e^{\frac{x}{x-1}}-3}{x}},$$

而 $$\lim_{x\to0}\frac{3e^{\frac{x}{x-1}}-3}{x}=3\lim_{x\to0}e^{\frac{x}{x-1}}\frac{-1}{(x-1)^2}=-3,$$

故 $$\lim_{x\to0}(3e^{\frac{x}{x-1}}-2)^{\frac{1}{x}}=e^{-3}.$$

4.【详解】 由洛必达法则

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{-\sin(x-1)}{\cos(x-1)}}{-\left(\cos\frac{\pi}{2}x\right)\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to1}\frac{-\sec^2(x-1)}{\frac{\pi}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right)\frac{\pi}{2}}=\frac{-1}{\frac{\pi^2}{4}}=-\frac{4}{\pi^2}.$$

5.【分析】 作代换 $t=\frac{1}{x}$,转化"$\infty-\infty$"型为"$\frac{0}{0}$"型.

【详解】 令 $t=\frac{1}{x}$,用洛必达法则

$$\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{t\to0}\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\ln(1+t)\right]=\lim_{t\to0}\left[\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}\right]$$

$$=\lim_{t\to0}\left[\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}\right]=\lim_{t\to0}\frac{1}{2(1+t)}=\frac{1}{2}.$$

6.【详解】 由泰勒公式 $\ln(1+ax)=ax-\frac{a^2x^2}{2}+o(x^2)$,故

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{a}{x}-\left(\frac{1}{x^2}-a^2\right)\ln(1+ax)\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{a}{x}-\left(\frac{1}{x^2}-a^2\right)\left(ax-\frac{a^2x^2}{2}+o(x^2)\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{a}{x}-\frac{a}{x}+a^3x+\frac{a^2}{2}-\frac{a^4x^2}{2}\right]=\frac{a^2}{2}.$$

【评注】 本题可通分直接利用洛必达法则,但较烦琐且易出错.

7.【详解】 $$\lim_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=(-1)^{n+1}\lim_{n\to\infty}\sin(n\pi-\pi\sqrt{n^2+1})$$

$$=(-1)^{n+1}\lim_{n\to\infty}\sin\pi\frac{1}{n+\sqrt{n^2+1}}=0.$$

8.【分析】 应注意极限 $\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}}$ 不存在情形的处理(要考虑左、右极限).

【详解】 $$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=1,$$

$$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=2-1=1.$$

所以 原式 $=1$.

9.【详解】 当 $x<0$ 时,$e^{tx}\to0$,故 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{x+e^{tx}}{1+e^{tx}}=x$.

当 $x=0$ 时，$\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+e^{tx}}{1+e^{tx}}=\dfrac{1}{2}$.

当 $x>0$ 时，$e^{tx}\to+\infty$，故 $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+e^{tx}}{1+e^{tx}}=1$.

所以 $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+e^{tx}}{1+e^{tx}}=\begin{cases}x, & x<0,\\ \dfrac{1}{2}, & x=0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$

【评注】　含参量的极限一定要考虑参数的取值范围.

10.【详解】　$f(x)$ 的间断点为 $x=-k\pi-\dfrac{\pi}{2}\quad(k=0,1,2,\cdots)$，$x=0$，$x=1$.

因为 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\sin1$，故 $x=0$ 为跳跃间断点；

因为 $x\to1$ 时，$f(x)$ 的左、右极限均不存在，故 $x=1$ 为第二类间断点；

因为 $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}f(x)=\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\dfrac{x(\pi+2x)}{2\cos x}=-\dfrac{\pi}{2}$，故 $x=-\dfrac{\pi}{2}$ 为可去间断点；

因为 $\lim\limits_{\substack{x\to-k\pi-\frac{\pi}{2}\\ k=1,2,\cdots}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-k\pi-\frac{\pi}{2}\\ k=1,2,\cdots}}\dfrac{x(\pi+2x)}{2\cos x}=\infty$，故 $x=-k\pi-\dfrac{\pi}{2}(k=1,2,\cdots)$ 为第二类间断点.

11.【详解】　由于 $2x-1<[2x]\leqslant 2x$ 成立，故当 $x\neq0$ 时，有

$\dfrac{2x-1}{x}<\dfrac{[2x]}{x}\leqslant\dfrac{2x}{x}$，即 $2-\dfrac{1}{x}<\dfrac{[2x]}{x}\leqslant 2$，或 $\dfrac{2x-1}{x}>\dfrac{[2x]}{x}\geqslant\dfrac{2x}{x}$，即 $2-\dfrac{1}{x}>\dfrac{[2x]}{x}\geqslant 2$.

由夹逼原理得 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{[2x]}{x}=2$.

因为 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{[2x]}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-1}{x}=\infty$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{0}{x}=0$，

所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在.

第二章　导数与微分

习题精选二

一、填空题

1. $-\dfrac{101!}{100}$.

【详解】 由于 $f(1)=0$,则

$$f(x)=f(x)-f(1).$$

由导数的定义有

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left[(x+2)(x-3)(x+4)\cdots(x+100)\right]$$

$$=3\cdot(-2)\cdot 5\cdot(-4)\cdots(-98)\cdot 101=-\frac{101!}{100}.$$

2. $\frac{f'(0)}{2}$.

【详解】 用导数的定义.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1-\cos x)}{\tan^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{f\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{\tan^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{f\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right)\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right)-f(0)}{2\sin^2\frac{x}{2}-0}\cdot\frac{\cos^2 x\cdot 2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2 x}\right]=\frac{f'(0)}{2}.$$

3. $\frac{1}{(x+1)^2}\ln\frac{2x-1}{x+1}$.

【详解】 令 $u=\frac{2x-1}{x+1}$,则 $u'(x)=\frac{3}{(x+1)^2}$.

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)\cdot u'(x)=\ln u^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{3}{(x+1)^2}=\left(\ln\frac{2x-1}{x+1}\right)\frac{1}{(x+1)^2}.$$

4. e.

【详解】 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+f(x)\right]^{\frac{1}{\ln(1+x)}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[1+f(x)\right]^{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{f(x)-f(0)}{\ln(1+x)-\ln 1}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\cdot\frac{x}{\ln(1+x)-\ln 1}\right]}$

$$=e^{f'(0)\frac{1}{\ln'(1+x)}\big|_{x=0}}=e.$$

5. $3\sqrt{3}$.

【详解】 $g''(y)=(g'(y))'=\left(\frac{1}{f'(x)}\right)'_y=-\frac{f''(x)}{f'^2(x)}\cdot\frac{dx}{dy}=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2}\cdot\frac{1}{f'(x)}$.

当 $y=2$ 时,$x=1$, $f'(1)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $f''(1)=1$, 故

$$g''(2)=\frac{1}{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}=3\sqrt{3}.$$

二、选择题

1. (A)

【详解】 函数可能的不可导点为 $x=\pm\pi$,因为

$$y'_-(\pi)=\lim_{x\to\pi^-}\frac{(\pi^2-x^2)\sin^2 x}{x-\pi}=0,$$

$$y'_+(\pi)=\lim_{x\to\pi^+}\frac{-(\pi^2-x^2)\sin^2 x}{x-\pi}=0,$$

所以 y 在 π 处可导.

又 $$y'_-(-\pi)=\lim_{x\to-\pi^-}\frac{-(\pi^2-x^2)\sin^2x}{x+\pi}=0,$$

$$y'_+(-\pi)=\lim_{x\to-\pi^+}\frac{(\pi^2-x^2)\sin^2x}{x+\pi}=0,$$

所以 y 在 $-\pi$ 处可导.

故 y 无不可导点.

【评注】 本题可利用如下结论:设 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ ∃,则 $g(x)|x-x_0|$ 在 x_0 处可导的充分必要条件为 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$.

2. (C)

【详解】 由于 $-f(x)=f(-x)$,所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为奇函数,故曲线 $y=f(x)$ 关于 $(0,0)$ 中心对称,又当 $x\in(0,+\infty)$ 时 $f'(x)>0$,$f''(x)>0$,故当 $x\in(-\infty,0)$ 时 $f'(x)>0$,$f''(x)<0$.

3. (C)

【详解】 由于 $f(x)$ 为奇函数,故 $f(0)=0$.

对 $f(x)$ 在以 $0,x$ 为端点的区间上用拉格朗日中值定理有

$$|f(x)|=|f(x)-f(0)|=|f'(\xi)||x-0|\leqslant M\cdot 1.$$

故对 $\forall x\in[-1,1]$,$|f(x)|\leqslant M$.

4. (C)

【详解】 根据泰勒公式有

$$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+o(x^5),\quad \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5),$$

$$\tan x-\sin x=\frac{x^3}{2}+\frac{1}{8}x^5+o(x^5),$$

而 $$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)x^2}{2!}+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots,$$

由题意知 $\lim\limits_{x\to0}F(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{f(x)}=1$,即当 $x\to0$ 时,$f(x)$ 与 $\tan x-\sin x$ 为等价无穷小量,故

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=0,\qquad \frac{f'''(0)}{3!}=\frac{1}{2},$$

故 $f'''(0)=3$,而 $f^{(4)}(0)$ 任意.

5. (D)

【详解】 由于 $F(x)=\displaystyle\int_0^x(x^2-t^2)f'(t)\mathrm{d}t=x^2\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t-\int_0^x t^2f'(t)\mathrm{d}t$,

所以 $$F'(x)=2x\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t+x^2f'(x)-x^2f'(x)=2x\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t,$$

由题意知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F'(x)}{x^2}=1$,即

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{2x\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t}{x}=2\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=2f'(0),$$

故 $f'(0)=\dfrac{1}{2}$.

三、解答题

1.【详解】 (1) 当 $x\neq 0$ 时,$f(x)$ 显然连续.

当 $x=0$ 时, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=a=f(0)$,

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x(1+\sqrt{1+x})}=\frac{1}{2},$$

故当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时,$f(x)$ 处处连续.

(2) 当 $x\neq 0$ 时,$f(x)$ 显然可导.

当 $x=0$ 时,

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=b,$$

$$\begin{aligned}f'_-(0)&=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}\\&=\lim_{x\to 0^-}\frac{\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}-\dfrac{1}{2}}{x}\\&=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\sqrt{1-x}}{4x\sqrt{1-x}}\\&=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{2}x}{4x}\\&=\frac{1}{8}.\end{aligned}$$

所以当 $b=\dfrac{1}{8}$ 时,$f(x)$ 处处可导.

2.【分析】 这是参数方程所确定的函数求导问题,可直接用公式计算.

【详解】 将两式分别求微分,得

$$\begin{cases}\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2},\\ \mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y-\dfrac{\cos t}{1+t^2}\mathrm{d}t=0,\end{cases}\quad 即 \quad \begin{cases}\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2},\\ \mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-y^2}\dfrac{\cos t}{1+t^2}\mathrm{d}t.\end{cases}$$

于是 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{-y^2}\cos t$,且

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}&=-2\mathrm{e}^{-y^2}y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cos t-\mathrm{e}^{-y^2}\sin t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\\&=-2\mathrm{e}^{-2y^2}y\cos^2 t-\mathrm{e}^{-y^2}(1+t^2)\sin t\end{aligned}$$

$$= -\mathrm{e}^{-2y^2}\left[2y\cos^2 t + \mathrm{e}^{y^2}(1+t^2)\sin t\right].$$

【评注】　参数方程所确定的函数求导问题，是一元函数微分学的重要内容之一，本题将参数方程与由变限积分所确定的隐函数求导相结合，要求能将求导方法综合使用.

3.【详解】　当 $x\neq a$ 时，$g'(x)=\dfrac{f'(x)(x-a)-f(x)}{(x-a)^2}$；

当 $x=a$ 时，

$$\begin{aligned}g'(a)&=\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\\&=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)}{x-a}-f'(a)}{x-a}\\&=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f'(a)(x-a)}{(x-a)^2}\\&=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{2(x-a)}=\frac{1}{2}f''(a).\end{aligned}$$

故

$$g'(x)=\begin{cases}\dfrac{f'(x)(x-a)-f(x)}{(x-a)^2}, & x\neq a.\\[2mm] \dfrac{1}{2}f''(a), & x=a.\end{cases}$$

又由于

$$\lim_{x\to a}g'(x)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)(x-a)-f(x)}{(x-a)^2}=\frac{1}{2}f''(a)=g'(a),$$

所以，$g'(x)$ 在 $x=a$ 处连续.

4.【详解】　由于 $f(x+1)=2f(x)$，则 $f(x+2)=2f(x+1)=2^2f(x)$.

一般式为 $f(x+n)=2f(x+n-1)=\cdots=2^nf(x)$，则 $f(n)=2^nf(0)=2^n$. 所以

$$f'(n)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x+n)-f(n)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2^nf(x)-2^nf(0)}{x}=2^nf'(0).$$

5.【证明】　当 $0<|x-a|<\delta$ 时，$|f(x)|\geqslant|g(x)|$.

又 $f(a)=g(a)=0$，则

$$|f(x)-f(a)|\geqslant|g(x)-g(a)|,$$

即

$$\frac{|f(x)-f(a)|}{|x-a|}\geqslant\frac{|g(x)-g(a)|}{|x-a|}.$$

令 $x\to a$，则有

$$\lim_{x\to a}\frac{|f(x)-f(a)|}{|x-a|}\geqslant\lim_{x\to a}\frac{|g(x)-g(a)|}{|x-a|}$$

即

$$|f'(a)|\geqslant|g'(a)|.$$

6.【详解】　由莱布尼茨公式

$$f^{(n-1)}(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{C}_{n-1}^{k}\left[(x-a)^n\right]^{(n-1-k)}\varphi^{(k)}(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{C}_{n-1}^{k}\frac{n!}{(k+1)!}(x-a)^{k+1}\varphi^{(k)}(x),$$

显然　$f^{(n-1)}(a)=0$，　所以

$$f^{(n)}(a)=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}n!\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{C}_{n-1}^{k}\frac{1}{(k+1)!}(x-a)^k\varphi^{(k)}(x)=n!\varphi(a).$$

7.【详解】　由泰勒公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)(x-0)+\frac{f''(\xi(x))}{2}(x-0)^2=\frac{f''(\xi(x))}{2}x^2,$$

其中 $\xi(x)$ 介于 $0,x$ 之间,且 $\lim\limits_{x\to 0}\xi(x)=0$.

同时 $f(u)=\frac{1}{2}f''(\xi(u))u^2$,其中 $\xi(u)$ 介于 $0,u$ 之间,而

$$u=x-\frac{f(x)}{f'(x)},\qquad 且\qquad \lim_{x\to 0}u=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{f'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{f''(x)}=0,$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\xi(u)=0,$$

故

$$\lim_{x\to 0}\frac{xf(u)}{uf(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}xf''(\xi(u))u^2}{\frac{1}{2}uf''(\xi(x))x^2}=\frac{f''(0)}{f''(0)}\lim_{x\to 0}\frac{u}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{u}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{f(x)}{f'(x)}}{x}=1-\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{xf'(x)}=1-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f''(\xi(x))x}{f'(x)}$$

$$=1-\frac{1}{2}f''(0)\lim_{x\to 0}\frac{x}{f'(x)}=1-\frac{1}{2}f''(0)\lim_{x\to 0}\frac{1}{f''(x)}=\frac{1}{2}.$$

8.【详解】 一般有如下结论:$f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上一个连续的周期函数,周期为 p,则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{p}\int_0^p f(t)\,\mathrm{d}t.$$

事实上,对 $\forall x>0$, $\exists n$ 及 $x'\in[0,p)$,使 $x=np+x'$,由周期函数积分性质,

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{np+x'}\int_0^{np+x'}f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{np+x'}\left[\int_0^{np}f(t)\,\mathrm{d}t+\int_{np}^{np+x'}f(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{n}{np+x'}\int_0^p f(t)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{np+x'}\int_0^{x'}f(t)\,\mathrm{d}t.$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{np+x'}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{p+\frac{x'}{n}}=\frac{1}{p},$$

$$\left|\frac{\int_0^{x'}f(t)\,\mathrm{d}t}{np+x'}\right|\leqslant\frac{\int_0^{x'}|f(t)|\,\mathrm{d}t}{np+x'}\leqslant\frac{\int_0^p|f(t)|\,\mathrm{d}t}{np+x'}\to 0(n\to\infty),$$

所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{np+x'}\int_0^p f(t)\,\mathrm{d}t+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{np+x'}\int_0^{x'}f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{p}\int_0^p f(t)\,\mathrm{d}t+0=\frac{1}{p}\int_0^p f(t)\,\mathrm{d}t.$$

由于 $|\sin t|$ 的周期为 π 且连续,则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x|\sin t|\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi|\sin t|\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}.$$

9.【证明】 $f(x)g(x)=1$,则

$$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=0,\qquad ①$$

即

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{g'(x)}{g(x)}.\qquad ②$$

对 ① 两边求导得

$$f''(x)g(x)+2f'(x)g'(x)+f(x)g''(x)=0,$$

即

$$f''(x)+2\frac{f'(x)g'(x)}{g(x)}+\frac{f(x)g''(x)}{g(x)}=0,$$

$$\frac{f''(x)}{f'(x)}+\frac{2f'(x)g'(x)}{f'(x)g(x)}+\frac{f(x)g''(x)}{f'(x)g(x)}=0,$$

由 ① 得

$$\frac{f''(x)}{f'(x)}+\frac{2g'(x)}{g(x)}-\frac{f(x)g''(x)}{g'(x)f(x)}=0,$$

则

$$\frac{f''(x)}{f'(x)}+\frac{2g'(x)}{g(x)}=\frac{g''(x)}{g'(x)},$$

又由 ② 得

$$\frac{f''(x)}{f'(x)}-\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{g''(x)}{g'(x)}-\frac{g'(x)}{g(x)}.$$

10.【证明】 由于

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}},$$

两边对 x 求导

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}=-\frac{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}}{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^3},$$

故

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=-\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^3\cdot\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\left(\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}\right)^3\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2},$$

又

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3,$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=-\frac{1}{\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3}\left[-\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3\right]=1.$$

第三章　微分中值定理与导数的应用

习题精选三

一、填空题

1. $(-\infty,-1)$，$(0,1)$.

【详解】 由已知得 $y' = 2x - \dfrac{2}{x} < 0$.

当 $x < 0$ 时,解得上述不等式的解集为$(-\infty, -1)$;

当 $x > 0$ 时,解得上述不等式的解集为$(0,1)$.

所以函数 $y = x^2 - \ln x^2$ 的单调减区间为$(-\infty, -1)$ 和$(0,1)$.

2. $a = 4$, $b = 5$.

【详解】
$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b,$$
由题设知
$$f'(-1) = 3 - 2a + b = 0, \quad ①$$
$$f(-1) = -1 + a - b = -2, \quad ②$$
联立①,②解得 $a = 4, b = 5$.

3. $-\dfrac{1}{\ln 2}$.

【详解】 由 $f'(x) = 2^x(1 + x\ln 2) = 0$,得驻点为 $x = -\dfrac{1}{\ln 2}$,而
$$f''(x) = 2^x[2\ln 2 + x(\ln 2)^2], \quad f''\left(-\frac{1}{\ln 2}\right) > 0.$$
所以函数 $y = x \cdot 2^x$ 在 $x = -\dfrac{1}{\ln 2}$ 时取得极小值.

4. $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$.

【详解】 $a = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{2x+1} = \dfrac{1}{2}$, $b = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - ax] = -\dfrac{1}{4}$,

所以斜渐近线方程为 $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$.

5. $\sqrt{2}$.

【详解】 $k = \left|\dfrac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|$,代入数值得$\sqrt{2}$.

二、选择题

1. (D)

【详解】 因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}} = \infty$,所以 $x = 0$ 为垂直渐近线;又$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}} = 1$,所以 $y = 1$ 为水平渐近线.

2. (A)

【详解】 由于 $f(x_0) > 0, f'(x_0) = 0$,有
$$f''(x_0) - 2f'(x_0) + 4f(x_0) = f''(x_0) + 4f(x_0) = 0,$$
所以有 $f''(x_0) < 0$,即 $f(x)$ 在 x_0 点处取得极大值.

3. (A)

【详解】 由 $f''(x) + f'(x)g(x) + f(x)x = e^x - 1, f(0) = 1, f'(0) = 0$,得 $f''(0) = 0$.
$f''(x) + f'(x)g(x) + f(x)x = e^x - 1$ 两边对 x 求导有
$$f'''(x) + f''(x)g(x) + f'(x)g'(x) + f'(x)x + f(x) = e^x, \quad ①$$

从而有 $f'''(0)=0$，① 两边对 x 求导得

$f^{(4)}(x)+f'''(x)g(x)+f''(x)g'(x)+f''(x)g'(x)+f'(x)g''(x)+f''(x)x+2f'(x)=\mathrm{e}^x$，

可得 $f^{(4)}(0)=1>0$，因此 $f(0)=1$ 为 $f(x)$ 的极小值．

4. (A)

【详解】　令 $x-t=u$，则 $t=x-u$，故

$$F(x)=\int_0^x (x-u)f(u)\mathrm{d}u=x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u.$$

由于 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 单调递增，即对任意的 $x\in(0,+\infty)$，$f(x)>f(0)=0$. 从而有：

$F'(x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u>0$，$F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增；

又 $F''(x)=f(x)>0$，所以 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内是凹弧．

5. D

【详解】　对 $f'^2(x)$ 与 $f^2(x)$ 运用柯西中值定理可知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f'^2(b)-f'^2(a)}{f^2(b)-f^2(a)}=\frac{2f'(\xi)f''(\xi)}{2f(\xi)f'(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{f(\xi)}.$$

要使 $f''(\xi)+f(\xi)=0$，即 $\dfrac{f''(\xi)}{f(\xi)}=-1$，从而有 $\dfrac{f'^2(b)-f'^2(a)}{f^2(b)-f^2(a)}=-1$，整理得到

$$f'^2(a)-f^2(b)=f'^2(b)-f^2(a).$$

三、解答题

1.【证明】　因为 $f(x)$ 不恒为常数且 $f(a)=f(b)$，故至少存在一点 $c\in(a,b)$，使得

$$f(c)\neq f(a)=f(b).$$

若 $f(c)>f(a)$，则在 $[a,c]$ 上 $f(x)$ 满足拉格朗日中值定理条件，因此至少存在一点 $\xi\in(a,c)\subset(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}>0.$$

若 $f(c)<f(a)=f(b)$，则在 $[c,b]$ 上应用拉格朗日中值定理可知，至少存在一点 $\xi\in(c,b)\subset(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}>0.$$

综上所述命题得证.

【评注】　本题也可用反证法进行证明，即假设对 $\forall x\in(a,b)$，有 $f'(x)\leqslant 0$，于是 $f(x)$ 单调不增，因此有 $f(a)\geqslant f(x)\geqslant f(b)$，而 $f(a)=f(b)$，故有 $f(a)=f(x)=f(b)$，即 $f(x)$ 为常数. 这与题设矛盾．

2.【证明】　作辅助函数 $F(x)=f(x)-x$，由题设 $0<f(x)<1$，得 $F(0)=f(0)>0$，而 $F(1)=f(1)-1<0$，根据连续函数介值定理知在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $F(\xi)=0$，即

$$f(\xi)-\xi=0.$$

下面用反证法证唯一性．

设 $0<x_1<x_2<1$，且 $f(x_1)=x_1$，$f(x_2)=x_2$，即 $F(x_1)=F(x_2)=0$.

由罗尔定理知存在 $x_0\in(x_1,x_2)\subset(0,1)$，使得 $F'(x_0)=0$，即 $f'(x_0)=1$，这与题设