



张宇考研数学系列丛书

全国著名考研辅导机构推荐用书

最新版

考研数学 线性代数10讲

主 编 姜晓千 张 宇

副主编 杨 超 张 伟

总策划 海天培训学校

全国一线教学名师倾力打造的最给力的考研数学辅导书

重概念，讲想法，娓娓道来，**破解重点疑点**，贴近学生

重实战，讲方法，精心编制，洞悉题源，**与考研无缝接轨**

本书将使**考研学生**在数学基本素养和考研应试能力上有质的提高

同时，本书也是**在校本科生**学习数学极好的辅导用书

 **北京理工大学出版社**
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

0151.2/459

2012



■ 张宇考研数学系列丛书

■ 全国著名考研辅导机构推荐用书

最新版

考研数学 线性代数10讲

■ 主 编 姜晓千 张 宇

■ 副主编 杨 超 张 伟

■ 总策划 海天培训学校

北方工业大学图书馆



C00273333

 **北京理工大学出版社**
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

版权专有 侵权必究

图书在版编目 (CIP) 数据

考研数学线性代数 10 讲 / 姜晓千, 张宇主编. — 北京: 北京理工大学出版社, 2012.2
ISBN 978-7-5640-5058-0

I. ①考... II. ①姜... ②张... III. ①线性代数—研究生—入学考试—自学参考资料
IV. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 172522 号

出版发行 / 北京理工大学出版社

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010) 68914775 (总编室) 68944990 (批销中心) 68911084 (读者服务部)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 北京旺鹏印刷有限公司

开 本 / 787 毫米 × 1092 毫米 1/16

印 张 / 11.25

字 数 / 220 千字

版 次 / 2012 年 2 月第 1 版 2012 年 2 月第 1 次印刷

定 价 / 20.00 元

图书出现印装质量问题, 本社负责调换



考研之路似苍茫
俱向往深思量
甚囂尘上请君莫
彷徨
北风啸杀掠考场
身似铁心如钢
雄关不惧成败自
含香

张宇二零一二年春
与考研学子共勉

【注】有一考研学生将苏轼《江城子》的词句改写为：“考研成败两茫茫，不思量，自难忘，寒窗孤影，无处话凄凉。北风啸杀掠考场，纵使十年八年也不惧，身似铁，心如钢。”文采极好，但略显悲观，于是，我也改词一首，送给考研学子，希望同学们雄关不惧，因为成败自含香。

总 序

摆在大家面前的《考研数学高等数学 18 讲》、《考研数学线性代数 10 讲》和《考研数学概率论与数理统计 8 讲》这三本书是专门为参加 2013 年全国硕士研究生入学统一考试的考生们编写的复习指导用书,供考生在考研复习的全过程中使用.这三本书的编写具有以下特点:

第一,从考试中来,到考试中去.

面对考试,首先要做到“知彼”,就是要懂得这门考试到底要考什么.对于考研来说,只有一本官方文件:《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》(以下简称《考试大纲》),教育部考试中心严格按照《考试大纲》命题,那么这三本书也严格按照《考试大纲》编写,与《考试大纲》无缝接轨.科学、严谨、新颖的内容设计,对《考试大纲》的所有知识点做了权威且详实的诠释.

第二,从学生中来,到学生中去.

面对考试,还要做到“知己”,就是要懂得考生自己到底什么水平.哪里是考生熟悉的、简单的考点,哪里是考生陌生的、不易掌握的难点.这三本书的作者们都是考研教学一线上的辅导专家,对于考生们需要什么了如指掌,所以书的内容文笔鲜活,娓娓道来,讲重点讲难点,贴近考生,无论是作为辅导班的教材,还是考生自学,都是难得的辅导资料.

第三,重视数学思维的讲解与训练.

一般认为,数学题型很重要.给出一种题型,掌握这种题型的解题步骤,然后去套这个步骤就可以了.对于考试,我不否认这种说法有一定的合理之处,但我也不完全赞同它.

要想真正掌握数学知识,达到较高的数学解题水平,必须在复习的过程中,重视每个概念、定理和结论背后的数学思维方法,甚至可以在老师的引导下去欣赏和体味这思维背后的哲学涵义.这个过程,是学习数学不可或缺的,我坚持这一观点不动摇.这里可以给考生举个例子:

在刚刚过去的 2012 年考研中,有一道全国共用考题:

【例 1】设 $f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)$, 求 $f'(0)$.

在复习过程中,我给考生举过这样一个例子:

【例 2】设 $f(x) = \left(\tan \frac{\pi x}{4} - 1\right) \left(\tan \frac{\pi x^2}{4} - 2\right) \cdots \left(\tan \frac{\pi x^{100}}{4} - 100\right)$, 求 $f'(1)$.

当时,我说,本题的研究对象 $f(x)$ 是多因式相乘,如果直接对其使用导数定义或者先求导再代值,都比较麻烦.本题希望考生发现,当把 $x = 1$ 代入每个因式后,只有第一项 $\left(\tan \frac{\pi x}{4} - 1\right) = 0$,而其余所有项都不等于 0,抓住第一项这个“特立独行”的主要矛盾,则

记 $g(x) = \left(\tan \frac{\pi x^2}{4} - 2\right) \cdots \left(\tan \frac{\pi x^{100}}{4} - 100\right)$, 于是 $f(x) = \left(\tan \frac{\pi x}{4} - 1\right) \cdot g(x)$.

$$f'(1) = \frac{\pi}{4} \sec^2 \frac{\pi x}{4} \Big|_{x=1} \cdot g(1) = -\frac{\pi \cdot 100!}{2}.$$

事实上,如果考生读懂了这个【例 2】的解答,对于【例 1】,就可以轻而易举解决了.

可能有人会说,这个【例 1】还可以用导数定义做,等等,在这里我们暂且不去探讨这个题的多种解法,请注意下面这个事实:在考试结束的时候,很多考生与我联系,他们看到这个题目后,立即想到了四个字——“主要矛盾”,然后自然很顺利地解决了问题.

做事情,要学会抓主要矛盾,这就是思想,这才是有价值的东西,导数定义你们以后可以忘记(只要不在相关领域工作,基本上都会忘记),但是,你们能够记住“主要矛盾”这种思想方法,这才是学习的真谛.

第四,重视经典好题的分析与解答.

2012 年的考卷,像我在考前说的一样,吸取 2011 年“难度控制”的成功经验,继续保持“中等难度”,整张试卷没有真正的难题.但是很明显,题目新颖程度增加,计算量增加,如果考生只会套题型,计算能力不强,很多考生可能做不完、考不好,考后全国的考生给我的反馈也是如此.

这里要详细阐述两点:

第一,关于考研数学题的新颖性.

举个例子,在微分方程一讲中,我们知道,若 $y = y(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ 是 n 阶微分方程 $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) \equiv 0$ 在区间 I 上的解,其中 $C_1, C_2, \dots, C_n$ 为 n 个独立的任意常数, $x \in I$, 则称它为该微分方程的通解.

一般地,确定通解中常数的条件就是初始条件,如给出

$$y(x_0) = a_0, y'(x_0) = a_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1},$$

其中, $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ 为 n 个给定的数,这是考生比较容易掌握的,但是如果题目出得比较新颖,还可以把初始条件给成“极限形式”等,比如这样一个例子:

【例 3】求微分方程 $xy' + (1-x)y = e^{2x} (0 < x < +\infty)$ 满足 $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = 1$ 的特解.

首先化其为标准形式, $y' + \frac{1-x}{x}y = \frac{1}{x}e^{2x}$, 于是其通解为

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \frac{1-x}{x} dx} \left[\int \frac{1}{x} e^{2x} e^{\int \frac{1-x}{x} dx} dx + C \right] = e^{-\ln x + x} \left[\int \frac{1}{x} e^{2x} \cdot e^{\ln x - x} dx + C \right] \\ &= \frac{1}{x} e^x \left[\int e^x dx + C \right] = \frac{1}{x} e^x [e^x + C]. \end{aligned}$$

由 $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = 1$, 即 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} e^x [e^x + C] = 1$, 得 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + C}{x} = 1$, 故 $C = -1$, 所以原方程满足条件 $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = 1$ 的特解为 $y = \frac{1}{x} e^x (e^x - 1)$.

考生读完此题发现,事实上,题目并不困难,只是增加了极限计算的工作量.这里想提醒大家,数学题出得新颖,并不意味着一定难,求解它的过程,仍然是基本且经典的.考生在平时的复习过程中,不要只会套题型,可以多见识一些新颖的提法,或者自己思考一下,这种问题如果换个说法怎么出等,这对于培养数学能力不无裨益.

第二,关于考研数学题的计算量.

考研数学的绝大多数问题,都是通过计算才能得出结论的.所以,考好数学必须要有扎实的计算基本功,必须要有雄厚的计算能力.这一点,请所有考生重视,坚持每天做计算,手不能生,细水长流,才能水到渠成.

现举个例子请考生做题并体会.我想提醒大家,千万不要眼高手低,要踏实做题,踏实计

算,要做就做到底.

【例4】计算 $I = \iint_D \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}} dx dy$, 其中 $D = \{(x,y) | x+y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.

【分析与解答】本题考查二重积分的计算,是一道计算量较大的难题. 答案: $\frac{16}{15}$, 你做做看? 能做出来吗?

首先,由 x 与 y 的轮换对称性,有

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}} dx dy = \iint_D \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{x}{y}\right)}{\sqrt{1-x-y}} dx dy, \\ 2I &= \iint_D \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}} dx dy + \iint_D \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{x}{y}\right)}{\sqrt{1-x-y}} dx dy \\ &= \iint_D \frac{(x+y)\ln \frac{(x+y)^2}{xy}}{\sqrt{1-x-y}} dx dy \\ &= 2 \iint_D \frac{(x+y)\ln(x+y)}{\sqrt{1-x-y}} dx dy - 2 \iint_D \frac{(x+y)\ln x}{\sqrt{1-x-y}} dx dy, \\ I &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{(x+y)\ln(x+y)}{\sqrt{1-x-y}} dy - \int_0^1 \ln x dx \int_0^{1-x} \frac{x+y}{\sqrt{1-x-y}} dy. \end{aligned}$$

令 $x+y=u$ (视 x 为常数), 得 $I = \int_0^1 dx \int_x^1 \frac{u \ln u}{\sqrt{1-u}} du - \int_0^1 \ln x dx \int_x^1 \frac{u}{\sqrt{1-u}} du$.

交换积分次序,得

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 du \int_0^u \frac{u \ln u}{\sqrt{1-u}} dx - \int_0^1 \frac{u}{\sqrt{1-u}} du \int_0^u \ln x dx \\ &= \int_0^1 \frac{u^2 \ln u}{\sqrt{1-u}} du - \int_0^1 \frac{u}{\sqrt{1-u}} du \int_0^u \ln x dx \\ &= \int_0^1 \frac{u^2 \ln u}{\sqrt{1-u}} du - \int_0^1 \frac{u}{\sqrt{1-u}} (u \ln u - u) du \\ &= \int_0^1 \frac{u^2}{\sqrt{1-u}} du = \frac{16}{15}. \end{aligned}$$

本书的例题既注重了题目的新颖性,又把握了题目的计算量,例题丰富、贴近考研,考生一定要把这三本书中的例题好好吃透.

考生如果严格按照以上几点去使用本书,并且坚持每天做题和总结,就能够形成比较系统全面的知识结构和解题能力,从而顺利通过考试,并取得高分.

感谢教学团队中各位多年从事考研数学命题研究工作和教学工作的专家们,他们治学严谨、功底深厚,对考研命题规律把握准确、对考生备考现状了若指掌. 相信这三本书一定能够给广大考生的考研复习提供极大帮助! 预祝广大考生考试成功!

张 宇

2012 年春 于北京

本书前言

本书严格按照教育部考试中心《考研数学考试大纲》编写,对于数一、数二、数三的同学具有普适性.

本书是多位考研一线专家老师集体智慧的结晶,写作过程中充分结合了同学需求及授课效果.为此本书共设十讲,每讲分为五部分:导语、考试大纲、知识体系、考试内容分析、典型例题分析.

(1)导语.对本讲内容的主要概括以及本讲在考试中的地位的说明.

(2)考试大纲.让同学们清楚地知道考研数学到底“考什么”,知道哪些内容只需了解,哪些内容则要重点掌握,这样在复习备考过程中才能真正做到有的放矢.

(3)知识体系.通过逻辑框架将本讲所有知识点完美呈现,简洁明了.

(4)考试内容分析.对考研数学的每个考点都做了全面细致地讲解,同时每个考点都紧跟经典题目供同学们强化练习,正所谓“光说不练假把式,光练不说真把式,连说带练全把式”.

(5)典型例题分析.本书提供了 230 道左右的线性代数经典好题,囊括了历年真题、大学数学竞赛试题、各大名校期末试题等.相信同学们若能把这部分题目做好吃透,那么考研数学线性代数得满分指日可待.

最后,祝福所有为了梦想而努力拼搏的考研学子们,祝大家梦圆考研!

作 者

2012 年春 于北京

海天教育图书一览表

海天考研图书

分类	书名	作者	出版社	定价	出版时间
考研政治					
海天名师系列	精品教材	考研政治考点解析	陆卫明 常红利 韩鹏杰 廖仕梅	人民大学	48 元 6 月
		考研政治专项试题	陆卫明 常红利 韩鹏杰 廖仕梅	人民大学	40 元 6 月
		考研政治形势与政策	常红利 陆卫明	人民大学	15 元 11 月
		考研政治重点剖析 28 题	陆卫明 常红利 韩鹏杰 廖仕梅	人民大学	12 元 12 月
	经典教辅	考研政治 互联提纲与考点提示	常红利	人民大学	24.8 元 9 月
		考研政治 真题分析与演练（试卷版）	常红利	人民大学	21 元 3 月
海天鲲鹏系列	考研 360	海天鲲鹏团队	人民大学	20 元 3 月	
	考研政治 ABC	海天鲲鹏团队	人民大学	25 元 3 月	
	考研政治全攻略（全 4 册）	海天鲲鹏团队	人民大学	40 元 6 月	
	考研政治沙场点兵（全 4 册）	海天鲲鹏团队	人民大学	36 元 6 月	
	考研政治考点狂背	海天鲲鹏团队	人民大学	16 元 10 月	
	考研政治形势与政策精讲	海天鲲鹏团队	人民大学	15 元 11 月	
	考研政治 1 号文件	海天鲲鹏团队	人民大学	15 元 12 月	
海天高级辅导系列	考研政治 360° 分类解读真题	马延臣	人民大学	32 元 3 月	
	考研政治 高频考点背诵金版	马延臣 蔡桂娟	人民大学	12 元 9 月	
	考研政治 形势与政策满分金鉴	马延臣	人民大学	16 元 9 月	
	考研政治点睛 5 套卷	马延臣 蔡桂娟	人民大学	15 元 11 月	

续表

考研英语					
我要 考 研 系 列		我要考研——考研英语 大纲词汇考点突破	宫东风	人民大学	49.8 元 3 月
		我要考研——考研英语 真题长难句突破	宫东风	人民大学	22 元 3 月
		我要考研——考研英语 基础阅读突破	宫东风	人民大学	19.8 元 3 月
		我要考研——考研英语 写作基础词汇	宫东风 王 军	人民大学	15 元 3 月
海天 旗舰 系列	精品 教材	考研英语 词汇 60 天记忆风暴	白子墨	人民大学	35 元 3 月
		考研英语阅读基本功 ——疑难句解构式突破	白子墨	人民大学	12 元 3 月
		考研英语语法重难点精解	王国清	人民大学	21.8 元 3 月
		考研英语专项高分密码 ——英语知识应用、 新题型、英译汉	王国清	人民大学	22 元 3 月
		考研英语写作高分背诵	丁雪明	人民大学	15 元 3 月
		考研英语美文赏析记单词	丁雪明	人民大学	35 元 3 月
		考研英语词汇宝典 ——攻克 5500	丁雪明	人民大学	26 元 3 月
		考研英语 作文热点预测 28 篇	惠新华	人民大学	12 元 12 月
	经典 教辅	考研英语 360° 分类解读真题	惠新华	人民大学	39.8 元 4 月
		考研英语点睛 5 套卷	赵南望	人民大学	20 元 11 月

续表

考研数学						
海天 灯塔 系列	精品 教材	考研高等数学 18 讲	张宇 杨超	北京理工	30 元	3 月
		考研数学线性代数 10 讲	姜晓千 张宇	北京理工	20 元	3 月
		考研数学 概率论与数理统计 8 讲	张伟 张宇	北京理工	20 元	3 月
	经典 教辅	考研数学 题源探析经典 1000 题	张宇	北京理工	30 元	4 月
		考研数学 10 年 真题分析与演练 (数一)	张宇 姜晓千 刘晓燕	北京理工	30 元	4 月
		考研数学 10 年 真题分析与演练 (数二)	张宇 姜晓千 刘晓燕	北京理工	30 元	4 月
		考研数学 10 年 真题分析与演练 (数三)	张宇 姜晓千 刘晓燕	北京理工	30 元	4 月
		考研数学点睛 5 套卷	张宇	北京理工	15 元	11 月
		考研数学通关攻略 28 招	张宇	北京理工	15 元	11 月
海天三 剑客 系列	精品 教材	考研数学新干线 (高等数学)	武忠祥	人民大学	24 元	3 月
		考研数学新干线 (线性代数)	张永怀	人民大学	16 元	3 月
		考研数学新干线 (概率统计)	张卓奎	人民大学	18 元	3 月
		考研数学 冲刺 5 套卷 (数一)	武忠祥 张永怀 张卓奎	人民大学	15 元	10 月
		考研数学 冲刺 5 套卷 (数二)	武忠祥 张永怀 张卓奎	人民大学	15 元	10 月
		考研数学 冲刺 5 套卷 (数三)	武忠祥 张永怀 张卓奎	人民大学	15 元	10 月

海天司法考试图书

书名	作者	出版社	定价	出版时间
司法考试考点精读教材——刑法学	杨艳霞 徐光华 王晓伟	人民大学	55 元	3 月
司法考试考点精读教材——民法学	钟秀勇	人民大学	56 元	3 月
司法考试考点精读教材——行政法	王旭	人民大学	30 元	3 月
司法考试考点精读教材——理论法学	杨帆	人民大学	34 元	3 月
司法考试考点精读教材——刑事诉讼法	左宁	人民大学	30 元	3 月
司法考试考点精读教材——民事诉讼法	杨秀清	人民大学	26 元	3 月
司法考试考点精读教材——商经法	张海峡	人民大学	35 元	3 月
司法考试考点精读教材——三国法	杨帆	人民大学	30 元	3 月
国家司法考试法律法规深度汇编(全 5 册)	刘东根 岳文松	人民大学	120 元	3 月
国家司法考试历年真题解析	海天国律	人民大学	80 元	3 月

海天医学考试图书

书名	作者	出版社	定价	出版时间
考研西医综合考点集萃	李睿	人民大学	68 元	3 月
临床执业医师通关宝典	海天医师 资格研究院	人民大学	120 元	3 月
临床执业助理医师通关宝典	海天医师 资格研究院	人民大学	100 元	3 月

购书热线: 010—62165738 QQ: 1440534736

海天教育图书网: <http://book.bjhaitian.com>

海天教育图书淘宝店: <http://shop58861408.taobao.com>

官方微博: <http://weibo.com/htbook> (海天图书)

目 录

第 1 讲 行列式	1
1.1 考试内容分析	2
1.1.1 行列式的定义	2
1.1.2 行列式的性质	3
1.1.3 矩阵运算的行列式性质	5
1.1.4 按行(列)展开定理	7
1.1.5 几个重要行列式	10
1.1.6 克莱姆法则	14
1.2 典型例题分析	16
1.2.1 数字行列式的计算	16
1.2.2 抽象行列式	23
第 2 讲 矩阵	26
2.1 考试内容分析	27
2.1.1 矩阵运算	27
2.1.2 矩阵的秩	30
2.1.3 可逆矩阵	31
2.1.4 伴随矩阵	33
2.1.5 初等变换、初等矩阵	34
2.1.6 分块矩阵	36
2.2 典型例题分析	37
2.2.1 矩阵秩的计算与证明	37
2.2.2 矩阵逆的计算与证明	39
2.2.3 与伴随矩阵有关的命题	42
2.2.4 初等变换与初等矩阵	45
第 3 讲 求矩阵高次幂	47
3.1 矩阵乘法的结合律	47
3.2 归纳法	48
3.3 二项式展开定理	49

3.4	分块矩阵法	50
3.5	相似对角化	52
第4讲	解矩阵方程	55
4.1	求逆法	55
4.2	解方程组法	59
第5讲	向量	60
5.1	考试内容分析	61
5.1.1	向量运算	61
5.1.2	线性组合、线性表示	63
5.1.3	线性相关、线性无关	64
5.1.4	极大线性无关组、秩	66
5.2	典型例题分析	67
5.2.1	线性表示	67
5.2.2	线性相关性	72
5.2.3	极大线性无关组与秩	78
第6讲	向量空间(数一专题)	81
6.1	考试内容分析	81
6.2	典型例题分析	83
第7讲	线性方程组	85
7.1	考试内容分析	86
7.1.1	表达形式	86
7.1.2	解的判定	87
7.1.3	解的性质	89
7.1.4	解的结构	89
7.2	典型例题分析	94
7.2.1	线性方程组解的判定	94
7.2.2	齐次线性方程组的基础解系与通解	97
7.2.3	非齐次线性方程组的通解	102
第8讲	公共解与同解	107
8.1	考试内容分析	107
8.2	典型例题分析	108
第9讲	特征值与特征向量	113
9.1	考试内容分析	114
9.1.1	特征值、特征向量	114
9.1.2	相似矩阵、相似对角化	117

9.1.3 实对称矩阵	120
9.2 典型例题分析	123
9.2.1 求数字矩阵的特征值与特征向量	123
9.2.2 抽象矩阵特征值和特征向量的计算与证明	126
9.2.3 相似矩阵与相似对角化	129
9.2.4 实对称矩阵的性质	134
第 10 讲 二次型	139
10.1 考试内容分析	140
10.1.1 表达形式	140
10.1.2 标准形	141
10.1.3 惯性定理	144
10.1.4 合同矩阵	144
10.1.5 二次型正定、正定矩阵	145
10.2 典型例题分析	147
10.2.1 化二次型为标准形	147
10.2.2 合同矩阵	155
10.2.3 二次型正定与正定矩阵	156
后 记	161

第1讲 行列式

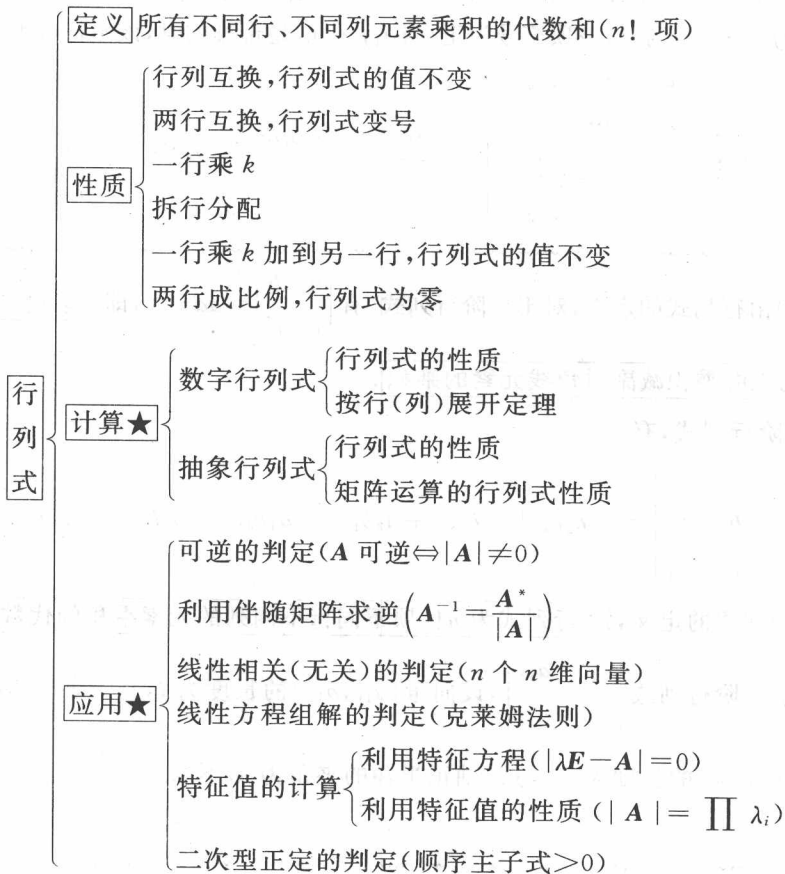
导语

行列式是矩阵最基本的运算之一,有着广泛的应用.考试中直接考查的行列式并不多,往往结合行列式的应用.例如,判定矩阵可逆、求矩阵的逆、判定线性相关性、判定线性方程组的解、计算特征值、判定二次型的正定等.

大纲要求

- (1) 了解行列式的概念,掌握行列式的性质.
- (2) 会用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式.

知识体系



1.1 考试内容分析

1.1.1 行列式的定义

定义 1.1 在一个排列中, 如果一个大的数排在小的数之前, 就称这两个数逆序, 一个排列的逆序总数称为逆序数, 用 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 表示. 如果一个排列的逆序数是偶数, 则称这个排列为偶排列, 否则为奇排列.

例如, 在排列 54321 中, 有逆序 54, 53, 52, 51, 43, 42, 41, 32, 31, 21, 逆序数为 10, 即 $\tau(54321)=10$, 从而排列 54321 是偶排列.

定义 1.2 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为所有不同行不同列的 n 个元素乘积 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 的代数数和, 其中 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列. 当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是偶排列时, 该项符号为正; 当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是奇排列时, 该项符号为负, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

【注】(1) 由行列式的定义, 对于 2 阶行列式, 有 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$, 即 2 阶行列式等于

主对角线元素的乘积减副对角线元素的乘积.

对于 3 阶行列式, 有

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1.$$

(2) 由行列式的定义, 知行列式为 $n!$ 项不同行不同列的元素乘积的代数数和.

(3) 对于 2 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, 设向量 (a_{11}, a_{12}) 的长度为 l , 与 x 轴正半轴的夹角

为 α , 向量 (a_{21}, a_{22}) 的长度为 m , 与 x 轴正半轴的夹角为 β , 不妨设 $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, 如下图
所示: