新中學文庫

數學全書

第一册 算術

韋柏 著
鄭太朴 譯

商務印書館發行

中華民國二十三年五月初版
中華民國三十六年四月四版

(55784A)

數學全書 第一册 算術

Enzyklopädie der Elementarmathematik
Erstes Buch, Arithmetik

定價國幣捌元
印刷地點外另加運費

原著者 Von H. Weber
譯述者 鄭太朴
發行人 朱經農
上海河南中路
印刷所 商務印書館印刷廠
發行所 商務印書館
各地

(本書校對者楊靜盦)

目　次

第一章

簡易羣論　自然數

第二章

加乘減　整數

第三章

除法　有理數

第四章

無理數

第五章

可量之量 比及比例

第六章

方數與對數

第七章

複數

第八章

組合論

第九章

二項式及多項式定理　算術級數

第十章

等餘式　冪餘數　平方餘數

第十一章

二次式　二次無理數　循環連分

數學全書

第一册 算術

第一章 簡易羣論 自然數

§1. 引言

1. 奈塞曼之代數學史論(Nesselmann, Kritische Geschichte der Algebra)內,謂

"數目之概念,實爲單純者,且係吾人精神之所固有;故欲爲之作一科學的定義,亦猶求證歐几里得(Euclid)之基本定理,總必失敗."

按之事實,無論古代或中世紀,吾人未聞對於數目概念之暗昧的起源,有能啓示之者.其由皮他谷拉斯(Pythagoras)及其學派所傳及今人者,均係數目之神秘的遊戲,其中固含有算術上之眞理,但於數目概念本身,仍無所啓示.歐几里得所作之定義,亦猶其幾何定義,僅爲字義之解釋,實已先含其概念在其內也.

然吾人用以思想之精神,固不願有所自限,故凡有問題之處,必繼續研討之不已.對於向來已然之數目概念,近代

之探討,未嘗置之,且於研究此概念之發生上,不能謂毫無所得.在康德(Kant)之哲學內,論數目概念之處極少.[1] 蓋康德之系統內,數學雖佔重要地位,惟其所及,多以幾何學爲主.康氏將算術與時間相關.一如幾何學之與空間相關然[2];此種意見,主之者實多[3].然以吾人觀之,則此種見解在某種意義上言之,固有其理由,但究未能就其純粹性及普遍性上以得數目之概念也.海巴德(Herbart)於1824年時已論及此.

新近之數學,則由數目概念本身出發以研究之,高斯(Gauss)於其致培賽爾(Bessel)之信(1830年四月九日)內,謂數目與空間不同,係吾人精神之產物,故有將此概念之產生,歸之於更基本之思想動作者,卽事物之彼此聯結,以構成種屬概念及類(用柏拉圖Plato之意義)是.關於此之研究,其屬於數學性質者,實爲羣論之一部分,其中所論爲量論之基本問題,尋常數目則視爲較普遍的概念之一特例.

---

1. 參觀 Michælis, Über Kants Zahlbegriff. Progr. Charlottenburg 1884.
2. 參觀 Kant, Prolegomena. §10.
3. 海米爾敦(Sir W. R. Hamilton)亦以爲數目概念之起源,得自時間之概念(Dublin Transactions 17, 1837). 幷參觀 Hankel, Vorlesungen über die komplexen Zahlen, Leipzig, 1867, 第17頁. Cayley, British Assoc. 1883 (Works 11. Bull. des sciences mathém. 2, 8, 1884). Voss, Über das Wesen der Mathematik. Zweite Aufl. Leipzig 1913, 第33頁.

2. 欲將自然數之概念,依羣論以確立之,亦有重大之疑問可發生.蓋羣論之基本概念內,實先已含有反復及自然數列之觀念,故須於此二觀念中,求數學思想之最後基礎.[1] 事實上,新近關於算術基礎之敍述,多直接由自然數列出發. 但須承認者,則有限羣之概念,實較之數量之概念爲先有. 蓋動物已能識個別之羣,幷識其中之變化(例如鴨對於其鶵,牧犬對於其羊羣),而在各個人之發展過程中,則當一歲時,已可見其有同類事物所成羣之印象,且能將某種羣之印象作比較.[2] 但由開始的數目觀念[3] 2, 3, 4, …… 以達數列之認識, 則其間相去當遠. 故獲則一普遍的,與空間時間無關的比較羣,其中各元素之一切個別性質均經棄去,僅留其在序列中之位置性質,此則非先有發展較高之抽象能力不可.但迄此階段爲止之發展,可視爲"先數學"者,不若由哲學及心理學研究之爲妥也.

3. 吾人能自立於天地間,兼能與他人相了解,實賴吾人之有此能力,於紛然雜陳,倐起倐滅之印象,感覺,思想

1. H. Weyl, Das Kontinuum. Leipzig, 1918. 第 19, 37 頁. 幷參觀 Poincaré, L'enseignement math. 1 (1899), 160.

2. 參觀 D. Katz, Psychologie und mathematischer Unterricht. Abhandlungen über den math. Unterricht in Deutschland 3, 8. Leipzig 1913. E. Mach, Erkenntnis und Irrtum. Leipzig 1906. 第 323 頁.

3. "一"於開始時不視爲數目. 德洪 (Theon von Smyrna) 之言, 直至十六世紀時, 凡著作算書者均祖述之, 甚至 1740 年時, 布方 (Buffon) 猶於牛頓微分算法之法文譯本內, 作"一非數目"之語.

中,能取出其或種羣屬,視之爲"事物,""單位,""思想之對象." 欲將一個別事物之一切特徵統行列出,此爲絕對不可能之事.故所謂事物者,實吾人感覺及思想內之某種極大限度(密集處所)而已. 許多事物之總,吾人視之爲一新事物,名之曰"羣"(Menge),例如學校內之一級,爲學生之羣,城市爲其中居民或房屋之羣,一團兵爲士兵之羣,森林爲樹之羣,等等.

4. 本書之初版及二版內,曾以廣義的羣之概念,爲研究數目本性及其目的之基礎,且按談德金(Dedekind)氏之定義,將羣別爲有限的與無限的二者.此種方法,驟觀之固似自然,但其所用定理,謂恆有事物不在已知之羣內,則不能免於困難. 蓋"一切事物所成之羣,"顯然無此屬性而談氏之證明無限羣之存在,亦卽以此爲根據.[1]

此項矛盾,及與此相似之矛盾,見於廣義的羣之概念內者,倘吾人視羣爲其一切元素之內涵,則將成爲不可解.觀於所謂"羅素氏之矛盾"[2](Russell's Widerspruch),益可見此. 羅氏矛盾如下:—

羣有不將其自己本身包含入內者,尋常之羣均係如此,故羣之本身與其成分視爲相異者;然亦有將自己本

---

1. R. Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen. Braunschweig 1888. No. 66.

2. B. Russell, The Principles of Mathematics. Cambridge 1903.

身一并包含入內之羣,例如一切事物所成之羣是,凡用否定賓詞所確定之概念,例如"非人"之概念,尤多如此.今試將一切不含自己本身之羣 m, 作爲一羣 M. 倘 M 羣不含自己本身,則此羣亦爲一 m, 故必須含入 M 內,是卽 M 不含自己本身時,必須含自己本身也;仿此,倘 M 含自己本身,則又必不能含自己本身.

從可知由羣之普通的定義內,可引出自相矛盾之概念,"一切事物之羣"一概念,其尤著者也.

康德於"純粹理性之矛盾"內,指出萬有概念之矛盾,蓋已有見及此;所謂萬有者,與一切事物之羣何以異?

初等數學對於無限羣方面所發生之困難,固不能論列,但完全不論其基礎之起源,則亦不可.故於此初等數學之開卷處,略述簡易之羣論,惟無限之概念,則自始卽力避之,僅以有限羣爲限.[1] 用此方法,不難由經驗之立場出發,以獲得普遍的數目概念之說明.

5. 輓近所盛行之趨向,在用公理(Axiom)以樹立數學各部門之基礎,對於其對象,概不加以定義,卽吾人不問此項對象之爲何,祗假定其存在,因卽對於其間之關係及連結法,爲立一公理之系統,於是以此爲出發,純恃概念,用論

1. 參觀 E. Zermelo, über die Grundlagen der Arithmetik. Atti del IV. congresso intern. matematici. Rom 1909. Acta math. 32 (1909). A. Schoenflies, Akad. Amsterdam 1920. Math. Ann. 83 (1921).

理的推論以建立全部門.[1] 希爾白(Hilbert)首用此法以建立幾何學之基礎,繼之卽有算術之公理系統,一切實數之內涵以及適用於此之加乘定律,卽由此推得.[2] 亦有僅對於自然數作一公理之系統者,皮亞諾(Peano)實爲其首.[3] 以此爲出發,亦可漸次擴大以推得其餘各種數目.

§2. 已整列之羣

1. 對於一羣內二不同之元素,倘能按照一規定,指出其孰者爲較小,且將此法應用於羣內三元素 a, a', a'' 時,能得如次之結果: 設 a 小於 a', a' 小於 a'', 則亦 a 小於 a''; 則此羣謂之已整列者(geordnet).

倘有一羣,可如是整列之,則此羣謂之可整列者.

設 a 小於 a', 則吾人亦可云: a' 大於 a.

於解釋此項定義時,有可說明者如下:

吾人之選取"大於,""小於"二語,蓋爲簡單計; 倘用"先於,""後於,""高於,""低於,""左於,""右於,"或任何其他

1. 參觀 A. Schoenflies, Jahresb. d. Deutsch. Math.—Ver. 20 (1911).

2. D. Hilbert, Jahresb. d. Deutsch. Math.—Ver. 8 (1900) 重印於其所著"幾何學之基礎,"第二版內(按此書已有中文譯本,商務印書館出版——譯者註). E. V. Hungtington, A set of postulates of real algebra. Trans. Amer. Math. Soc. 6 (1905). 并參閱 Löwy, Lehrb. d. Algebra 1, Leipzig 1915.

3. G. Peano, Arithmetices principia. Turin 1889. K. Grelling, Die Axiome der Arithemetik, Diss. Göttingen 1910. K. Boehm, Heidelberg. Akad. 1911 參觀 Hilbert, Über die Grundlagen der Logik und Arithmetik. Verhandl. d. III. Intern. Mathematikerkongresses Heidelberg 1904 ("幾何學基礎"第四版, 1913, 附錄 VII). C. Carathéodory, Vorl. über reelle Funktionen. Leipzig 1918.

相似之語,均無不可.吾人固不必因此而想及實體方面之較大及較小也.

於表明大小之整列上,尋常用如下之符號:

設 A 爲一羣,a 與 a' 爲其二元素,則

(1) $$a<a',\ a'>a$$

所表者同其意義,即 a 小於 a',a' 大於 a 是也.倘 a'' 爲 A 之又一元素,則由

$$a<a',\ a'<a''$$

當得 $$a<a''.$$

於是吾人可云 a' 在 a 與 a'' 之間.通常所稱整列之大小性質,實已包含在此數式內.

設 A 爲一羣,尙未將其整列計及者,則吾人可用 $\overline{A}$ 表此相同之羣,惟已有一定之整列.

由吾人之經驗,可知確有可以整列之羣存在,且整列之法可不一,例如手之五指,一直線段上之點,等等.得此數例,已足證明.至於不能整列之羣之有無,此則屬於超絕羣論範圍內之問題,非此處所能論及.

2. 倘 B 羣內之每一元素 B,同時即爲 A 羣內之元素,則 B 羣爲 A 羣之部分;如 A 內至少有一元素,爲 B 內所無者,則 B 名爲 A 之眞部分.

羣之由單獨一元素所成者,無有眞部分.其他之羣均可有眞部分.

設 A' 爲 A 之部分, A'' 又爲 A' 之部分,則 A'' 亦爲 A 之部分. 如 A' 爲 A 之眞部分,或 A'' 爲 A' 之眞部分,或二者均爲眞部分,則 A'' 亦爲 A 之眞部分.

設 B 爲 A 之眞部分,則凡屬於 A 而不屬於 B 之元素,亦祇有此項元素,另屬於一其他羣 C, 此羣名爲 B 對於 A 之補充. 爲表明此關係,吾人可寫作

$$A=B+C \text{ 或 } A=C+B.$$

故 C 亦爲 A 之眞部分, B 卽其補充.

設 B 與 C 爲二羣,則可作一羣,以 $A=B+C$ 表之,凡在 B 或 C 內(或二者內均有)之元素,均取入之,但亦祇能取入此項元素. 倘 B 與 C 無有相同之元素,則 B 與 C 均爲 A 之眞部分,互爲補充.

3. 凡可整列之羣,其部分均爲可整列者.

蓋如 $\overline{A}$ 爲一已整列之羣, B 爲 A 之部分,則 B 亦必爲已整列者,因 B 中任何二元素 B, B', 必有適用於 $\overline{A}$ 中之大小關係也. 於是吾人可云, B 係按照 $\overline{A}$ 而整列者.

4. 設 $\overline{B}$ 與 $\overline{C}$ 爲已整列之羣,無有共同之元素,則 $A=B+C$ 亦爲可整列之羣.

蓋如 A 內之二元素 a, a', 本屬於同一之部分,例如 B, 則在 $\overline{B}$ 內旣已整列,在 A 內自必可同樣整列之(事例 a).

若 a 原屬於 B, a' 原屬於 C, 則可使 $a<a'$ (事例 b).

今試證明，將 A 如是整列時，大小性質仍可保而不失．試於 A 中取三個不同之元素 a, a', a''，并設 $\overline{A}$ 中之整列法爲

(2) $$a<a', a'<a''.$$

則當證明其結果，必得

(3) $$a<a''.$$

於此，吾人可分爲四個事例以論之：

1. a 屬於 C．則因 (b) 之關係，a' 與 a'' 亦屬於 C，按 $\overline{C}$ 之整列法卽可得 (3)．

2. a 屬於 B，a' 屬於 C．則因 (2) 及 (b) 之關係，a'' 亦必屬於 C，故按 (b) 可得 (3)．

3. a 屬於 B，a' 屬於 B，但 a'' 屬於 C．如是則由 (b) 又可得 (3)．

4. a'' 屬於 B．如是則 a 與 a' 亦必均屬於 B，而 (3) 可由 $\overline{B}$ 中之整列法以得之．

§3. 有限羣

1. 將已整列之羣 $\overline{A}$，分成爲二部分 $B+C$，并使 B 之每一元素小於 C 之每一元素，謂之一"切"(Schnitt)．B 與 C 二部分，名爲 $\overline{A}$ 之下分與上分 (der untere und der obere Abschnitt) "切"之符號，吾人用

(1) $$A=B\,|\,C$$

以表之.

2. 倘已整列之羣 $\overline{A}$ 內,有一元素 a_0,對於 A 內任何其他元素 a,均

$$(2) \qquad a_0 < a,$$

則 a_0 名爲 $\overline{A}$ 內之最小元素. 最小元素不能多於一個;蓋如 a_0' 亦爲一最小元素,而按(2)既有 $a_0 < a_0'$,則必不能同時復有 $a_0' < a_0$.

仿此,倘 $\overline{A}$ 內有一元素 a_1,對於 A 內之任何其他元素 a 均

$$a < a_1,$$

則 a_1 爲其中之最大元素. 最大元素亦不能多於一個.

已整列之羣內,倘有一最大元素及一最小元素,則此羣謂之閉合(geschlossen)者.

3. 倘能將 A 羣如是整列之,俾 $\overline{A}$ 本身及 $\overline{A}$ 之每個切之上下分均爲閉合者,則 A 名爲有限羣.[1]

如是確定之有限羣概念,可不致有矛盾,此則不難由經驗以知之.

僅由單獨一元素所成之羣,本身已爲已整列者,且因該元素同時爲最大元素及最小元素,故此羣亦爲閉合者.如

1. 此有限羣之定義肇自 Stäckel, 爲 Jahresh. d. Deutsch. Math.—Ver 16, 425 (1907).