SuiJi GuoCheng XiTi JieXi

陆传赉◎编著

随机过程习题解析

(第2版)

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

随机过程习题解析

（第 2 版）

陆传赉 编著

北京邮电大学出版社
www. buptpress. com

内 容 简 介

本书集编著者在随机过程学科对本科生与研究生30余年之教学实践，将工科、理科及经济或管理学科中常见的马尔可夫链、泊松过程与更新过程、二阶矩过程、平稳过程、高斯过程与布朗运动、窄带过程、马尔可夫过程，以及随机过程通过线性或非线性系统等内容中的典型例题加以解析论证或计算演释，通过读者学习理解，提高解题的论证思路和计算能力.

本书可作为高等学校本科生、研究生的教学辅导或参考书，也可作为相关工程技术人员的参考资料.同时对某些专业的考博学子本书也有一定的辅助作用.

图书在版编目(CIP)数据

随机过程习题解析/陆传赉编著.--2版.--北京:北京邮电大学出版社，2012.1

ISBN 978-7-5635-2852-3

Ⅰ.①随… Ⅱ.①陆… Ⅲ.①随机过程—高等学校—题解 Ⅳ.①O211.6-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 253533 号

书　　　名：随机过程习题解析(第2版)
著作责任者：陆传赉
责 任 编 辑：刘 颖
出 版 发 行：北京邮电大学出版社
社　　　址：北京市海淀区西土城路10号(邮编:100876)
发　行　部：电话:010-62282185　传真:010-62283578
E-mail：publish@bupt.edu.cn
经　　　销：各地新华书店
印　　　刷：北京联兴华印刷厂
开　　　本：787 mm×960 mm　1/16
印　　　张：29.75
字　　　数：662千字
印　　　数：1—3 000册
版　　　次：2004年10月第1版　2012年1月第2版　2012年1月第1次印刷

ISBN 978-7-5635-2852-3　　　　定　价：56.00元

再版前言

本书是在 2004 年北京邮电大学出版社出版的第 1 版的基础上加以修订后再版的，它可作为高等学校理工类、经济管理类的本科生及硕士与博士生的教学辅导或参考书，也可作为考博学子的考前辅导资料，更可作为相关的工程技术人员的参考资料.

本书自 2004 年出版以来，深受广大读者的欢迎与厚爱，早已脱销待再版. 作者根据读者的希望和建议，在再版中除改进了第 1 版中某些笔误和不当之处外，在第 1 版中的第 1、2、3、5、6 各章中均增加了一定数量的计算例题或证明例题. 其中有些题目还是近些年来相关专业的热门试题. 增加的内容将拓宽广大读者的解题思路和方法，相信它对读者更好地理解随机过程各章内容必大有裨益.

再版时提供了与本书密切相关的参考书目，以方便广大读者寻根究源.

作 者

2011 年 9 月

目　　录

第 1 章　随机过程的基本概念

1.1　内容提要

1.1.1　随机过程的定义

定义 1-1　设随机试验 E 的样本空间为 Ω，若对每一个 $\omega\in\Omega$，总有一个参数 $t(\in T)$ 的函数 $X(t,\omega)$ 与之对应. 于是，对于全体的 $\omega\in\Omega$，应有一族参数 t 的函数与之对应，将这一族函数称为随机过程，记为 $X_T=\{X(t,\omega),t\in T\}$. 若 $\omega\in\Omega$ 固定时，则称 $X(t,\omega)$ 为随机过程 X_T 的样本函数（或规道，或实现）. 其中 T 是一个参数集.

定义 1-2　已给概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 及参数集 T，若对每一 $t\in T$，$X(t,\omega)$ 是定义在概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的随机变量（或可测函数），则称随机变量族 $X_T=\{X(t,\omega),t\in T\}$ 是定义在 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的一个随机过程. 通常简记为 $\{X(t),t\in T\}$ 或 $\{X(t)\}$ 或 X_T.

注　*参数集 T 可以是时间、高度、长度、重量以及向量等集合. 一般认为 T 是作为时间的集合. 若 $T\triangleq\mathbf{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 或 $T\triangleq\mathbf{Z}^+=\{0,1,2,\cdots\}$，此时的随机过程称为随机变量序列或离散时间的随机过程. 若 $T=[a,b]$ 或 $T\triangleq\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$，则称 X_T 为连续时间的随机过程.*

将随机过程 X_T 的取值区域，即一族随机变量 $X(t)(t\in T)$ 所有可能取值的集合称为该过程的状态空间，记为 $\boldsymbol{E}$（或 $\boldsymbol{I}$）. $\boldsymbol{E}$ 中元素称为状态. 状态空间中元素可以是有限或无限多个. $\boldsymbol{E}$ 可以是 $\mathbf{R}^n(n\geqslant1)$ 中某一集合，也可以是某个函数空间或其他抽象空间. 当 $\boldsymbol{E}$ 是复数集合时，称相应的随机过程 X_T 为复随机过程.

1.1.2　随机过程的分布及其数字特征

1. 随机过程的分布

已给随机过程 $X_T=\{X(t),t\in T\}$，称

$$F_X(t,x)=P(X(t)\leqslant x),\quad x\in\mathbf{R} \tag{1-1}$$

为过程 X_T 在时刻 $t(\in T)$处的一维分布函数. 若存在非负的连续函数 $f_X(t,x)$,使得

$$F_X(t,x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t,u)\mathrm{d}u,\quad x\in\mathbf{R} \tag{1-2}$$

则称 $f_X(t,x)$是过程 X_T 在时刻 $t(\in T)$处的一维分布密度,并且在$f_X(t,x)$的连续点 x 处有

$$f_X(t,x)=\frac{\partial F_X(t,x)}{\partial x} \tag{1-3}$$

对任意的 $n\geqslant 1$ 及任意的 T 中的元 $t_k(1\leqslant k\leqslant n)$,$n$ 个随机变量$X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n)$的 n 维联合分布函数定义为

$$\begin{aligned}&F(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n)\\&=P(X(t_1)\leqslant x_1,X(t_2)\leqslant x_2,\cdots,X(t_n)\leqslant x_n)\end{aligned} \tag{1-4}$$

若存在 n 元非负函数 $f(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n)$,使满足

$$\begin{aligned}&F(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n)\\&=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} f(t_1,t_2,\cdots,t_n;u_1,u_2,\cdots,u_n)\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_n\end{aligned} \tag{1-5}$$

则称 $f(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n)$是相应的 n 维联合分布密度. 在其 n 维连续点$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$处有

$$f(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{\partial^n F(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n} \tag{1-6}$$

并称

$$\boldsymbol{F}\triangleq\{F(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad t_k\in T,1\leqslant k\leqslant n;n\geqslant 1\}$$

为随机过程 X_T 的有限维分布函数族. 它具有如下性质:

1° 对称性　对于$(1,2,\cdots,n)$的任一排列$(N_1,N_2,\cdots,N_n)$有

$$F(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n)=F(t_{N_1},t_{N_2},\cdots,t_{N_n};x_{N_1},x_{N_2},\cdots,x_{N_n}) \tag{1-7}$$

2° 相容性　对任一 $m<n$,有

$$\begin{aligned}&F(t_1,t_2,\cdots,t_m;x_1,x_2,\cdots,x_m)\\&=F\Big(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_m;\underbrace{\infty,\cdots,\infty}_{n-m}\Big)\end{aligned} \tag{1-8}$$

柯尔莫哥洛夫存在定理　已给参数集 T 及满足相容性条件的有限维分布函数族 $\boldsymbol{F}$,则必存在一个概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$及定义在其上的随机过程 $X_T=\{X(t),t\in T\}$,使 X_T 的有限维分布函数族与已给的有限维分布函数族相重合.

2. 随机过程的数字特征

先设随机过程 $X_T=\{X(t),t\in T\}$为实随机过程. 则可定义(当下述各项积分存在时):

均值(期望)函数

$$m_X(t)=EX(t)=\int_{\Omega}X(t,\omega)P(\mathrm{d}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x\mathrm{d}F(t,x)$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xf(t,x)\mathrm{d}x, & \text{如 } X(t) \text{ 是连续型随机变量}\\ \displaystyle\sum_k x_k P(X(t)=x_k), & \text{如 } X(t) \text{ 是离散型随机变量}\end{cases} \tag{1-9}$$

（自）相关函数

$$R_X(s,t)=EX(s)X(t)=\int_\Omega X(s,\omega)X(t,\omega)P(\mathrm{d}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\mathrm{d}F(s,t;x,y)$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(s,t;x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & \text{如}(X(s),X(t))\text{ 是连续型}\\ \displaystyle\sum_k\sum_j x_k y_j P(X(s)=x_k,X(t)=y_j), & \text{如}(X(s),X(t))\text{ 是离散型}\end{cases} \tag{1-10}$$

（自）协方差函数

$$\begin{aligned}C_X(s,t)&=E[X(s)-m_X(s)][X(t)-m_X(t)]\\&=R_X(s,t)-m_X(s)m_X(t)\end{aligned} \tag{1-11}$$

当 $s=t$ 时，有

$$R_X(t,t)=EX^2(t)=\Psi_X^2 \quad (\text{均方值}) \tag{1-12}$$

及

$$C_X(t,t)=R_X(t,t)-[m_X(t)]^2=DX(t)=\sigma_X^2(t) \quad (\text{方差}) \tag{1-13}$$

若 X_T 是复随机过程，则有

$$R_X(s,t)=EX(s)\overline{X(t)} \tag{1-14}$$

$$\begin{aligned}C_X(s,t)&=E[X(s)-m_X(s)][\overline{X(t)}-\overline{m_X(t)}]\\&=R_X(s,t)-m_X(s)\overline{m_X(t)}\end{aligned} \tag{1-15}$$

$$\sigma_X^2(t)=E|X(t)-m_X(t)|^2 \tag{1-16}$$

若 $X_T=\{X(t),t\in T\}$ 与 $Y_T=\{Y(t),t\in T\}$ 是定义在同一概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的两个实过程，对 $\forall s,t\in T$，记 $X(s)$ 与 $Y(t)$ 的联合分布函数与联合分布密度各为 $F_{XY}(s,t;x,y)$ 与 $f_{XY}(s,t;x,y)$，当 $E|X(s)Y(t)|<\infty$ 时，定义：

互相关函数

$$R_{XY}(s,t)=EX(s)Y(t)=\int_\Omega X(s,\omega)Y(t,\omega)P(\mathrm{d}\omega)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\mathrm{d}F_{XY}(s,t;x,y)$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf_{XY}(s,t;x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & \text{如}(X(s),Y(t))\text{ 是连续型}\\ \displaystyle\sum_k\sum_j x_k y_j P(X(s)=x_k,Y(t)=y_j), & \text{如}(X(s),Y(t))\text{ 是离散型}\end{cases} \tag{1-17}$$

互协方差函数

$$C_{XY}(s,t)=E[X(s)-m_X(s)][Y(t)-m_Y(t)]$$
$$=R_{XY}(s,t)-m_X(s)m_Y(t) \tag{1-18}$$

对$\forall s,t\in T$,当$R_{XY}(s,t)=0$时,称过程X_T与Y_T相互正交(即$X(s)\perp Y(t)$).

对$\forall s,t\in T$,当$C_{XY}(s,t)=0$时,称过程X_T与Y_T互不相关,此时有$R_{XY}(s,t)=m_X(s)\cdot m_Y(t)$.

显然,当且仅当$\forall s,t\in T$,$EX(s)$与$EY(t)$至少有一个为0时,则X_T与Y_T的互不相关性与相互正交性等价.

若$\forall n\geqslant 1$、$m\geqslant 1$及T中的$s_1,s_2,\cdots,s_n$与$t_1,t_2,\cdots,t_m$有

$$\begin{aligned}&F_{XY}(s_1,s_2,\cdots,s_n,t_1,t_2,\cdots,t_m;x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m)\\&=P(X(s_1)\leqslant x_1,\cdots,X(s_n)\leqslant x_n;Y(t_1)\leqslant y_1,\cdots,Y(t_m)\leqslant y_m)\\&=P(X(s_1)\leqslant x_1,\cdots,X(s_n)\leqslant x_n)P(Y(t_1)\leqslant y_1,\cdots,Y(t_m)\leqslant y_m)\\&=F_X(s_1,s_2,\cdots,s_n;x_1,x_2,\cdots,x_n)F_Y(t_1,t_2,\cdots,t_m;y_1,y_2,\cdots,y_m)\end{aligned} \tag{1-19}$$

则称两过程X_T与Y_T相互独立.

若X_T与Y_T相互独立,则必互不相关;反之未必成立.当且仅当X_T与Y_T是联合高斯过程时,它们的相互独立性与互不相关性等价.

对于复随机过程有类似的性质.

1.1.3 随机过程的特征函数

1. 一元特征函数

设$X_T=\{X(t),t\in T\}$是实随机过程,对固定的$t\in T$,若$X(t)$的分布函数与分布密度各为$F_X(t,x)$与$f_X(t,x)$,则称

$$\varphi_X(v)=E\mathrm{e}^{\mathrm{j}vX(t)}=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}vx}\mathrm{d}F_X(t,x)$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}vx}f_X(t,x)\mathrm{d}x\quad(\text{其中 }\mathrm{j}=\sqrt{-1}) \tag{1-20}$$

为$X(t)$的特征函数.

若$X(t)$有分布列为$p_k=P(X(t)=x_k)$,则可写

$$\varphi_X(v)=\sum_k p_k\mathrm{e}^{\mathrm{j}vx_k} \tag{1-21}$$

容易验证,$\varphi_X(v)$有下列性质:

1° $\varphi_X(v)$在$\mathbf{R}$上一致连续,且$|\varphi_X(v)|\leqslant\varphi_X(0)=1$,$\varphi_X(-v)=\overline{\varphi_X(v)}$.

2° 若$Y(t)=aX(t)+b$(a、b为常数),则

$$\varphi_Y(v)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}vb}\varphi_X(av) \tag{1-22}$$

3° 若$X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n)$是$n$个相互独立的随机变量,$t_k\in T$,$1\leqslant k\leqslant n$,则$\eta=$

$\sum_{k=1}^{n} X(t_k)$ 的特征函数为

$$\varphi_\eta(v) = \prod_{k=1}^{n} E\mathrm{e}^{\mathrm{j}vX(t_k)} = \prod_{k=1}^{n} \varphi_X(t_k) \tag{1-23}$$

4° 对固定 t，若 $E|X(t)|^n<\infty$，则 $X(t)$的特征函数$\varphi_X(v)$是$k(\leqslant n)$次可导的，且成立

$$E[X(t)]^k=(-\mathrm{j})^k\varphi_X^{(k)}(0),\quad k\leqslant n \tag{1-24}$$

5° 逆转公式：设对固定 t，$X(t)$的分布函数与特征函数分别为 $F_X(t,x)$与 $\varphi_X(v)$. 当 $x_1<x_2$ 为 $F_X(t,x)$的连续点时，有

$$F_X(t,x_2)-F_X(t,x_1) = \frac{1}{2\pi}\lim_{l\to\infty}\int_{-l}^{l}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}vx_1}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}vx_2}}{\mathrm{j}v}\varphi_X(v)\mathrm{d}v \tag{1-25}$$

特别地，若 $\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi_X(v)|\mathrm{d}v<\infty$，且 $\exists X(t)$的分布密度为$f_X(t,x)$，则对一切 $x\in\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$，有

$$f_X(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}vx}\varphi_X(v)\mathrm{d}v \tag{1-26}$$

2. 多元联合特征函数

设 $X_T=\{X(t),t\in T\}$是实随机过程，对 T 中固定的 $t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_n(n>1)$，$n$ 元随机变量 $X=(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n))$的 n 维联合分布函数为 $F(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则称

$$\begin{aligned}\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n;v_1,v_2,\cdots,v_n) &= E\left\{\exp\left[\mathrm{j}\sum_{k=1}^{n}v_kX(t_k)\right]\right\}\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\mathrm{j}\sum_{k=1}^{n}v_kx_k\right)\mathrm{d}F(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n)\end{aligned} \tag{1-27}$$

为 n 元随机变量 X 的 n 元联合特征函数. 当 X 有相应的 n 维联合分布密度 $f(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n)$时，则可写

$$\begin{aligned}&\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n;v_1,v_2,\cdots,v_n)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\mathrm{j}\sum_{k=1}^{n}v_kx_k\right)f(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\end{aligned} \tag{1-28}$$

它有如下一些性质：

1° $\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n;v_1,v_2,\cdots,v_n)$在 $\mathbf{R}^n$ 中一致连续，并且

$$\left.\begin{aligned}&\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n;-v_1,-v_2,\cdots,-v_n)=\overline{\varphi}(t_1,t_2,\cdots,t_n;v_1,v_2,\cdots,v_n)\\ &|\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n;v_1,v_2,\cdots,v_n)|\leqslant\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n;0,0,\cdots,0)=1\end{aligned}\right\} \tag{1-29}$$

2° 设$(X(t_{i_1}),X(t_{i_2}),\cdots,X(t_{i_k}))$是由 n 元随机变量$X=(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n))$的某 k 个分量组成的 $k(\leqslant n)$元随机变量，相应的 k 维联合分布函数为 $F(t_{i_1},t_{i_2},\cdots,t_{i_k};x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_k})$，它恰为 $F_X(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n)$对应于该 k 元随机变量$(X(t_{i_1}),X(t_{i_2}),\cdots,$

$X(t_{i_k})$)的边缘分布.其 k 元联合特征函数为

$$\varphi(t_{i_1},t_{i_2},\cdots,t_{i_k};v_{i_1},v_{i_2},\cdots,v_{i_k})$$
$$=\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n;u_1,u_2,\cdots,u_n)\Big|_{u_l=0,\text{其他的}l}^{u_l=v_l,\text{如}l=i_1,i_2,\cdots,i_k} \tag{1-30}$$

3° $X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n)$相互独立的充要条件是

$$\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n;v_1,v_2,\cdots,v_n)=\prod_{k=1}^{n}E\mathrm{e}^{\mathrm{j}v_kX(t_k)}=\prod_{k=1}^{n}\varphi(t_k;v_k) \tag{1-31}$$

4° 若对正整数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$,存在联合原点矩 $E[X^{k_1}(t_1)X^{k_2}(t_2)\cdots X^{k_n}(t_n)]$,则

$$E[X^{k_1}(t_1)X^{k_2}(t_2)\cdots X^{k_n}(t_n)]$$
$$=(-\mathrm{j})^{\sum\limits_{l=1}^{n}k_l}\frac{\partial^{k_1+k_2+\cdots+k_n}\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n;v_1,v_2,\cdots,v_n)}{\partial^{k_1}v_1\partial^{k_2}v_2\cdots\partial^{k_n}v_n}\Big|_{1\leqslant k\leqslant n}^{v_k=0} \tag{1-32}$$

5° 设 a_k、$b_k(1\leqslant k\leqslant n)$是非零常数,则 n 元随机向量$((a_1X(t_1)+b_1,\cdots,a_nX(t_n)+b_n))$的 n 元联合特征函数为

$$\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n;a_1v_1,a_2v_2,\cdots,a_nv_n)\exp\left(\mathrm{j}\sum_{l=1}^{n}b_lv_l\right) \tag{1-33}$$

6° 设 $a_k(1\leqslant k\leqslant n)$是非零常数,则随机变量 $\eta=\sum\limits_{l=1}^{n}a_lX(t_l)$ 的特征函数为

$$\varphi_\eta(v)=E\left\{\exp\left[\mathrm{j}\sum_{l=1}^{n}a_lX(t_l)v\right]\right\}$$
$$=\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n;a_1v,a_2v,\cdots,a_nv) \tag{1-34}$$

1.1.4 随机过程的分类

1. 按照状态和参数分类

(1) 若随机过程的状态连续,而参数也连续的,称其为连续随机过程.

(2) 若随机过程的状态离散,而参数连续的,称其为离散随机过程.

(3) 若随机过程的状态连续,而参数离散的,称其为连续随机变量序列.

(4) 若随机过程的状态离散,而参数也离散的,称其为离散随机变量序列.

2. 按照过程的性质分类

(1) 二阶矩随机过程

已给随机过程(复或实的)$X_T=\{X(t),t\in T\}$,若对每一 $t\in T$,均有 $E|X(t)|^2<\infty$,则称 X_T 是一个二阶矩过程.

例如,高斯(Gauss)过程、维纳(Wiener)过程,以及泊松(Poisson)过程、宽平稳过程等均是二阶矩过程(详见以后各章).

(2) 严平稳过程

已给过程 $X_T=\{X(t),t\in T\}$，若 $\forall n\geqslant 1$ 及 $t_i,t_i+\tau\in T(1\leqslant i\leqslant n)$ 使得随机向量 $(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n))$ 与 $(X(t_1+\tau),X(t_2+\tau),\cdots,X(t_n+\tau))$ 具有相同的 n 维分布，即

$$\begin{aligned}&F(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n)\\&=F(t_1+\tau,t_2+\tau,\cdots,t_n+\tau;x_1,x_2,\cdots,x_n)\end{aligned}\tag{1-35}$$

则称 X_T 是一个严(或狭义，或强)平稳过程.

(3) 独立增量过程、平稳增量过程和正交增量过程

已给过程 $X_T=\{X(t),t\in T\}$，若 $\forall n\geqslant 2$ 及 T 中任意的 $t_1<t_2<\cdots<t_n$，增量 $X(t_2)-X(t_1),\cdots,X(t_n)-X(t_{n-1})$ 是相互独立的，则称 X_T 是一个独立增量过程.

若对任意的 $t_i+\tau,t_i\in T(1\leqslant i\leqslant 2)$，使得 $X(t_2+\tau)-X(t_1+\tau)$ 与 $X(t_2)-X(t_1)$ 具有相同的概率分布，则称 X_T 是具有平稳增量的过程.

若 X_T 是二阶矩过程(复的或实的)，且对 T 中任意的 $t_1<t_2\leqslant t_3<t_4$，有

$$E[X(t_2)-X(t_1)][\overline{X(t_4)}-\overline{X(t_3)}]=0\tag{1-36}$$

则称 X_T 是正交增量过程.

(4) 马尔可夫(Markov)过程

在非独立的随机过程中，有一类很弱相关性的过程，其过程的“将来”状态特性仅仅依赖于“现在”状态而与“过去”状态无关. 这种性质称为马尔可夫性(或无后效性，或无记忆性)，具有此类性质的过程称为马尔可夫过程；而且按照状态是离散还是连续又可分为它是马尔可夫链或是马尔可夫过程. 详见第 2 章.

(5) 更新过程

若 $\{X_n,n=1,2,\cdots\}$ 是具有共同分布为 F 的非负独立随机变量列，约定 $F(0)=P(X_n=0)=0$，记

$$\mu=EX_n=\int_0^{\infty}x\mathrm{d}F(x)\tag{1-37}$$

由 $X_n\geqslant 0$ 及 $F(0)=0$，可知 $0<\mu\leqslant\infty$. 置

$$S_0=0,\quad S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad n=1,2,\cdots$$

及

$$N(t)=\sup\{n,S_n\leqslant t\},\quad t\geqslant 0\tag{1-38}$$

那么称计数过程 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 是一个更新过程.

(6) 鞅过程

先设参数集 $T=\{1,2,3,\cdots\}$，若随机变量序列 $X=\{X(n),n\in T\}$ 满足条件：

(a) $E|X(n)|<\infty,n\in T$；

(b) $E\{X(n+1)|X(1),X(2),\cdots,X(n)\}\overset{\text{a. e}}{=\!=}X(n),n\geqslant 1$，　(1-39)

注：$a.e$ 表示几乎处处，下同.

则称 X 是一个离散参数鞅.

当将条件(b)中的"="换成"≤"(或"≥")时,则称 X 为离散参数上鞅(或下鞅).

再设 $T=(0,\infty)$,若随机过程 $X=\{X(t),t\in T\}$满足条件:

(c) $E|X(t)|<\infty,t\in T$;

(d) $E\{X(s)|X(u),u\leqslant t\}\overset{\text{a.e}}{=\!=}X(t),s>t,$ (1-40)

则称 X 是一个连续参数鞅.

当将条件(d)中的"="换成"≤"(或"≥")时,则称 X 为连续参数的上鞅(或下鞅).

除上述几类过程外,尚有窄带过程、强马尔可夫过程、马尔可夫更新过程、循环平稳过程,以及点过程等,后面将选择性介绍.

1.1.5 随机过程的可测性与可分性

1. 设参数集 T 为实值区间,令 $G=T\cap\mathscr{B}(\overline{\mathbf{R}})$(其中 $\overline{\mathbf{R}}=[-\infty,+\infty]$),将随机过程 $X=\{X(t),t\in T\}$中的 $X(t,\omega)$看做为 $T\times\Omega$ 上的二元函数,当它是可测乘积空间$(T\times\Omega,G\times\mathscr{F})$到$(\mathbf{R},\mathscr{B}(\mathbf{R}))$上一个可测映象时,则称定义在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机过程 X 是一个 Borel 可测过程,简称为可测过程.

2. 称函数 $x(t)(t\in T)$关于 T 的可列子集 S 是可分的,如果平面点集 $X_T=\{(t,x(t)),t\in T\}$与 $X_S=\{(r,x(r)),r\in S\}$之间满足关系式

$$X_T\subset\overline{X}_S(\text{即 } X_S \text{ 的闭包})$$

也即对任一 $t\in T$,可找到点列$\{r_i\}\subset S$,使同时有

$$r_i\to t;\quad x(r_i)\to x(t)$$

并称 S 为函数 $x(t)$的可分集.

称随机过程 $X=\{X(t),t\in T\}$关于 S 是可分的,如存在一个测度为零的集合 K,使对任一 $\omega\in K^c$ 样本函数 $X(t,\omega)(t\in T)$关于 S 是可分的,此时称 S 为过程 X 的可分集;K 称为例外集.如果存在 T 中的一个可列稠密子集 S,使随机过程 X 关于 S 是可分的,则称该过程是可分过程.如果随机过程 X 关于任一个如上的 S 是可分的,则称它是完全可分过程.

下面的命题阐述了可分过程的等价定义.

命题 1-1 为使随机过程 $X=\{X(t,\omega),t\in T\}$可分的充分与必要条件是它具有如下性质:存在 T 中的可列稠密子集 S 及测度为 0 的 ω 集 K,使对任一闭集 A(即 $A=\overline{A}$)及任一开区间 I,有

$$\{\omega:X(r,\omega)\in A,r\in IS\}\setminus\{\omega:X(t,\omega)\in A,t\in IT\}\subset K$$

由于任给一个过程$\{\xi(t,\omega),t\in T\}$未必是可分的,但下述命题告诉我们,存在一个可分过程与$\{\xi(t,\omega),t\in T\}$等价,即

命题 1-2 对任一定义在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机过程$\{\xi(t,\omega),t\in T\}$,必存在一个可分的过程$\{X(t,\omega),t\in T\}$,使

$$P\{X(t,\omega)=\xi(t,\omega)\}=1$$

常称过程$\{X(t,\omega),t\in T\}$是过程$\{\xi(t,\omega),t\in T\}$的一个可分修正.

1.2　典型例题分析

例 1　设随机变量 ξ 的分布密度为 $f_\xi(x)$，令 $\eta(t)=\mathrm{e}^{-\xi t}(t>0,\xi>0)$，试求 $\eta(t)$ 的一维概率分布密度及 $E\eta(t)$、$R_\eta(s,t)$.

解　由 $\eta(t)=\mathrm{e}^{-\xi t}(t>0,\xi>0)$知，当 $x>0$ 时，

$$\begin{aligned}F_\eta(t,x)&=P(\eta(t)\leqslant x)=P(-\xi t\leqslant \ln x)\\&=P\left(\xi\geqslant-\frac{\ln x}{t}\right)=1-P\left(\xi<-\frac{\ln x}{t}\right)\\&=1-F_\xi\left(-\frac{\ln x}{t}\right)\end{aligned}$$

当 $x\leqslant 0$ 时，$F_\eta(t,x)=0$.

于是，当 $x>0$ 时，

$$f_\eta(t,x)=\left[1-F_\xi\left(-\frac{\ln x}{t}\right)\right]'x=\frac{1}{tx}f_\xi\left(-\frac{\ln x}{t}\right)$$

当 $x\leqslant 0$ 时，$f_\eta(t,x)=0$.

$$E\eta(t)=E[\mathrm{e}^{-\xi t}]=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-xt}f_\xi(x)\mathrm{d}x$$

$$R_\eta(s,t)=E[\mathrm{e}^{-\xi s}\cdot \mathrm{e}^{-\xi t}]=E\mathrm{e}^{-\xi(s+t)}=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x(s+t)}f_\xi(x)\mathrm{d}x$$

例 2　若从 $t=0$ 开始每隔$\frac{1}{2}$分钟查阅某手机所接收的短信息，令

$$X(t)=\begin{cases}\cos \pi t, & \text{如 } t \text{ 时手机接收到短信息}\\ 2t, & \text{如 } t \text{ 时手机未接收到短信息}\end{cases}$$

试求：(1) $X(t)$的一维分布函数 $F\left(\frac{1}{2};x\right)$、$F(1;x)$.

(2) $X(t)$的二维分布函数 $F\left(\frac{1}{2},1;x_1,x_2\right)$.

(3) $X(t)$的均值函数 $m_X(t)$与 $m_X(1)$，方差函数 $\sigma_X^2(t)$与$\sigma_X^2(1)$.

解　设随机变量 ξ 表示查阅某手机短信息的结果. 若“接收到短信息”，令 $\xi=1$；若“未接收到短信息”，则 $\xi=-1$；且有$P(\xi=\pm1)=\frac{1}{2}$.

(1) 取 $t=\frac{1}{2}$，则当 $\xi=1$ 时，$X\left(\frac{1}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0$；当 $\xi=-1$ 时，$X\left(\frac{1}{2}\right)=2\times\frac{1}{2}=1$. 所以，

由分布函数定义及全概率公式知

$$F\left(\frac{1}{2};x\right)=P\left\{X\left(\frac{1}{2}\right)\leqslant x\right\}$$

$$=P\left\{X\left(\frac{1}{2}\right)\leqslant x|\xi=1\right\}P(\xi=1)+P\left\{X\left(\frac{1}{2}\right)\leqslant x|\xi=-1\right\}P(\xi=-1)$$

$$=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{2}, & 0\leqslant x<1\\ 1, & x\geqslant 1\end{cases}$$

同理可得

$$F(1;x)=P(X(1)\leqslant x)$$

$$=P\{X(1)\leqslant x|\xi=1\}P(\xi=1)+P\{X(1)\leqslant x|\xi=-1\}P(\xi=-1)$$

$$=\begin{cases}0, & x<-1\\ \frac{1}{2}, & -1\leqslant x<2\\ 1, & x\geqslant 2\end{cases}$$

(2) 类似地,取 $t=1$,则当 $\xi=1$ 时,$X(1)=\cos\pi=-1$;当$\xi=-1$时,$X(1)=2$,所以

$$F\left(\frac{1}{2},1;x_1,x_2\right)=P\left\{X\left(\frac{1}{2}\right)\leqslant x_1,X(1)\leqslant x_2\right\}$$

$$=P\left\{X\left(\frac{1}{2}\right)\leqslant x_1,X(1)\leqslant x_2|\xi=1\right\}P(\xi=1)+$$

$$P\left\{X\left(\frac{1}{2}\right)\leqslant x_1,X(1)\leqslant x_2|\xi=-1\right\}P(\xi=-1)$$

或因不同时刻是否收到短信是相互独立的,故 $X\left(\frac{1}{2}\right)$、$X(1)$的二维分布可列为

$X\left(\frac{1}{2}\right)$ \ $X(1)$	-1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

由此即可写出上述的 $X\left(\frac{1}{2}\right)$与 $X(1)$的二维联合分布函数

$$F\left(\frac{1}{2},1;x_1,x_2\right)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & 0\leqslant x_1<1,-1\leqslant x_2<2\\ \frac{1}{2}, & 0\leqslant x_1<1,x_2\geqslant 2\ \text{或}\ x_1\geqslant 1,-1\leqslant x_2<2\\ 1, & x_1\geqslant 1,x_2\geqslant 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$