现代数学译丛 21

欧拉图与相关专题

〔英〕Herbert Fleischner 著
孙志人 李 皓 刘桂真 刘振宏 束金龙 译
张 昭 黄晓晖 审校

科学出版社

现代数学译丛 21

欧拉图与相关专题

Eulerian Graphs and Related Topics

〔英〕Herbert Fleischner 著

孙志人 李 皓 刘桂真 刘振宏 束金龙 译

张 昭 黄晓晖 审校

科 学 出 版 社

北

图字：01-2012-1839 号

内 容 简 介

本书是迄今为止唯一的一本全面阐述欧拉图理论的主要研究成果和研究方法及其与其他图论问题之间的联系的专著. 本书包含两卷共十章. 第一卷从欧拉的哥尼斯堡七桥问题开始, 由浅入深地介绍了欧拉问题的起源, 给出图的基本概念和预备知识, 然后相继地介绍了无向图、有向图以及混合图中欧拉迹的结构性定理, 欧拉迹的若干推广, 各种类型的欧拉迹, 欧拉迹的变换. 在第二卷中, 详尽地介绍了著名的中国邮递员问题, 欧拉迹的计数问题, 最后讨论了与欧拉问题相关的算法和计算复杂性. 每章后面配有习题, 帮助读者理解和掌握本章的主要内容.

本书适合从事图论研究的研究生和科研工作者使用, 也是其他数学和计算机科学研究人员很好的参考书.

This edition of *Eulerian Graphs and Related Topics, Part 1, Volume 1* by *Herbert Fleischner* is published by arrangement with *ELSEVIER BV of Radarweg 29, 1043 NX Amsterdam, Netherlands*
This edition of *Eulerian Graphs and Related Topics, Part 1, Volume 2* by *Herbert Fleischner* is published by arrangement with *ELSEVIER BV of Radarweg 29, 1043 NX Amsterdam, Netherlands*

图书在版编目 (CIP) 数据

欧拉图与相关专题/(英)费莱施纳(Fleischner, H.)著; 孙志人等译. —北京: 科学出版社, 2012
（现代数学译丛；21）
ISBN 978-7-03-033878-5
I. ①欧… II. ①弗… ②孙… III. ①图论-研究 IV. ①O157.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 051063 号

责任编辑: 王丽平 房 阳 / 责任校对: 宋玲玲
责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 耕者设计工作室

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com
骏 杰 印 刷 厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2012 年 4 月第 一 版 开本: B5 (720×1000)
2012 年 4 月第一次印刷 印张: 31 1/2
字数: 611 000
定价: 98.00 元
(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　言　一[①]

自从我开始撰写博士论文起，图论中的哈密顿问题和欧拉问题就成为我的研究主题. 1975 年以前，我一直偏重于哈密顿图的研究；但在此后，欧拉图及其相关问题就逐渐成为我的工作中心. 把研究重点由哈密顿图转移到欧拉图开始于 1975 年，那年夏天，蒙特利尔大学的撒比达斯 (Sabidussi) 给我提出一个问题. 当时我在蒙特利尔大学与他合作研究. 我们都没有预料到他提出的这个问题 (下文称为撒比达斯猜想) 的研究会有相当广阔的应用空间.

在 1976~1977 学年，我证明了撒比达斯猜想的一个推广对欧拉平面图成立 (下文称为相容性结果). 从 1979 年起，我和我的合作者杰克逊 (Jackson)、中国邮递员问题的提出者管梅谷，最近还有弗兰克 (Frank)，发现了欧拉图在平图理论中的一系列应用. 这些发现的过程显示出，在各种各样的证明中，使用相容性结果可以避开使用四色定理 (假定四色猜想成立)[②].

不幸的是，对于非平图的情形，还没有简单的、类似的相容性结果. 但是最近在与杰克逊的合作中，我们提出了一个猜想，这个猜想的一个特殊情况等价于圈双覆盖猜想. 由于以上原因，我在本书的第二部分主要讨论撒比达斯猜想和它的推广、它在平图情况下的解 (这些猜想和结果的总体统称为相容性问题) 以及它的应用和相关问题.

1977~1978 学年被美国田纳西州 (Tennessee) 孟菲斯 (Memphis) 州立大学 (MSU) 数学系定为图论年. 那年秋天，在弗奥得瑞 (R.Faudree) 和善尔普 (R.Schelp) 的邀请下，我去那里工作了一个学期，开了一门课程，讲授欧拉图理论，每周三课时. 这段时间，我熟悉了科特齐格 (A.Kotzig) 在这一领域的工作，并且除相容性问题外，我研究了欧拉迹的一个特殊类型，这一工作由我的第一个博士生瑞格纳 (S.Regner) 进行了推广. 在准备资料的过程中，我第一次意识到：作为专题的欧拉图理论，不单纯是结果的累积. 我开始倾向于欧拉图理论的研究. 因此，当我在 1979 年的 Oberwolfach 图论会议上从奔尼克 (Beineke) 和威尔逊 (Wilson) 那里得知他们正在筹备《图论专题精选 2》([BEIN83a]) 时，我就问他们是否对欧拉图的综述文章感兴趣. 当时他们对这个课题是否有足够的材料表示怀疑，但是还是同意让我尝试为

---

① 原书 Part 1, Volume 1 (第 1~7 章) 的前言.

② 这要作个说明：阿佩尔–海肯 (Appel-Haken) 的四色猜想的证明是否正确我还不能确定，我希望看到这个猜想的不依靠计算机的证明 (哪位图论学家不希望如此？)，或者至少可以看到不同的研究集体采用阿佩尔–海肯的思路，提供更多的计算机支持的证明 (但是谁有这样多的时间和资金呢？).

[BEIN83a] 写一篇文章. 在准备这篇文章时，我吃惊地发现，在欧拉图及其相关专题的领域中已积累了如此多的素材. 到 1980 年，综述文章“欧拉图”的第一稿已完成. [BEIN83a] 的编辑对第一稿评审后，认为应该再写个扩充版，然后由编辑进行压缩. 这个扩充版有 90 页长，其中 124 篇参考文献就占去了 10 页.

这 90 页的稿子寄给 [BEIN83a] 的编辑后，我想到：既然这方面的资料如此之多，那么写一本比这个稿子长 4~5 倍的书应该是可行的. 在进一步查阅了 80 年代前半期的文献后，本书诞生了. 本书的结构部分地采纳了我在 [BEIN83a] 中“欧拉图”一文的结构 (增加了几章，而其他章节也增加了重要内容).

在本书最后资料的整理及打印过程中，文格尔 (M.Wenger) 夫人给予了很大的帮助，她使我节省了打印、复印以及编写目录的数百个小时. 文格尔 (Erich Wenger) 先生为我绘制了大部分的图. 他早期的认证论文 (他的中学教师资格认定的一部分) 中的某些材料被搜集在本书中 (即中国邮递员问题和爱米色–莱维茨基定理 (Theorem of Amitsur and Levitzki)). 他的兄弟 (Emanuel Wenger) 如同技术组织者一样提供了无偿的服务；作为我的学生，他熟悉我的大部分研究工作，对本书稿提出了许多有价值的建议. 我以前的另外两个学生姆醉克 (M.Music) 夫人和盖格斯 (J.Galambfalvy de Geges) 先生，分别完成了任意可迹图和欧拉图中的计数论文 (与文格尔的文章一样被摘取在本书里). 我的同事迪米特洛夫 (L.Dinitrov) 先生和陶乐 (R.Thaller) 先生帮助我做索引和校对部分手稿.

我的许多同事，特别是那些与我做过合作研究的同事，直接或间接地对本书做出了贡献：他们提供了宝贵的建议和评论，提供了自己的写作经验，为我介绍素材并提供说明，给我精神上的支持，并寄给我与本书有关的文章和辅助材料. 以下按字母顺序列出对我的工作起了关键作用的人们的名字：本尼克 (Lowell Beineke)、邦迪 (Adrian J.Bondy)、弗兰克 (András Frank)、杰克逊 (Bill Jackson)、耶格 (Francois Jaeger)、利特尔 (Charles H.C.Little)、纳什–威廉姆斯 (Crispin St.J.A.Nash-Williams)、普卢默 (Mike D.Plummer)、撒比达斯 (Gert Sabidussi)(他引起我对弗瑞 (Franz Bernhard Frey) 所作的欧拉肖像的注意) 以及威尔逊 (Robin Wilson). 在此对他们及所有关心我的人表示衷心的感谢. 我希望本书能恰到好处地体现出他们的帮助.

最后，我还要感谢利特尔 (Peter Lillie) 先生 (生活在维也纳的英国公民)，他在本书的文字方面帮我进行了把关. 如果在这方面还有什么缺陷，那就完全属于我的失误了.

前　言　二①

本卷为《欧拉图与相关专题》第一部分的第二卷，在某种程度上依赖于第一卷的结果. 作者和编辑都决定把第一部分分成两卷，因为原稿超过了 600 页. 这种划分让人能够在第二卷中放入一个附录，包含了对第一卷的勘误，而且参考文献也更精确了 (在第一卷出版时，有些文献还未正式发表). 第一部分的两卷包含的主题为欧拉迹和覆盖迹.

除了在第一卷中提到的对完成本书作出了贡献的人外，我还想感谢 P.A. Catlin，C.J. Colbourn，I. Nishizeki (这三位同事指出了一些错误)，A. Sebö，特别是 P. Rosenstiehl (他在一些迷宫搜索算法上的颇有价值的评述被收入本书) 和 P.D. Seymour，他们不仅在阅读第 8 章时找出了一些错误和不确切的地方，并且提供了发现其著名的 6 流定理的思维过程 (对这些我有详尽的叙述). 最后，我要感谢 I. Hösch 女士，她是信息处理研究所的秘书，在本卷的最终版中提供了文字方面的帮助. 还有 C. Lillie 女士，她从语言学的角度审视了各补录、前言和附录.

① 原书 Part 1, Volume 2 (第 8～10 章) 的前言.

目　录

第　一　卷

第 二 卷

第 一 卷

第1章 引 言

冠尼希 (Dénes König) 的书 *Theorie der endichen und Unendlichen Graphen* (《有限图与无限图的理论》)[KÖNI36a] 于 1936 年第一次出版时，只用 248 页 (不包括前言、目录和参考文献) 就囊括了自欧拉 (L. Euler) 发表哥尼斯堡七桥问题的解的文章以来，200 年中图论领域的大部分内容.

实际上，欧拉把他的文章提交给圣 · 彼得堡科学院是在 1735 年 8 月 26 日，但他的文章“Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis”一直到 1741 年才发表在 *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* 上. 由于这个 Commentarii 注明的日期是 1736 年，所以图论作为数学的一个分支一般被认为诞生在 1736 年.

然而，D. König 在他的前言中指出：他的书中所考虑的图论仅限制在所谓的绝对图中 (现在称为抽象图)，除几个例外的情形，他没有讨论拓扑图论 (他称为相对图论) 和计数图论.

D. König 的书问世以后，特别是第二次世界大战结束以后，图论得到了飞速发展. 专门发表组合论文的期刊越来越多，它们所涉及的文章中大约有一半是图论文章. 例如，《图论杂志》创刊于 1977 年. 图论研究的繁荣不仅反映在图论书籍数目的增长上，而且反映在这些书籍的内容上. 它们中有很多都聚焦于图论的一些特殊专题，如拓扑图论、代数图论以及近年来具有强劲势头的算法图论 (该方向的研究是出于计算机科学的需要). 由此可见，图论也遵循着科学发展的一般过程. 最初，它从一般领域中脱离出来 (D. König 的书的子标题是“Kombinatorische Topologie der Strekkenkomplexe”—— 一维复形组合拓扑). 然后它又按照所得的结果和所用的方法分化为若干不同的分支. 图论的这种发展可以被 *Selected Topics in Graph Theory* 和 *Selected Topics in Graph Theory 2* ([BEIN78a], [BEIN83a])(《图论专题精选》和《图论专题精选 2》) 的出版所见证，其主编是本尼克 (L.W.Beineke) 和威尔逊 (R.J.Wilson). 书中包含了不同作者撰写的 22 篇综述文章. 现在《图论专题精选 3》也已出版.《图论应用》包含了 12 篇综述文章，涉及的是图论在各学科的应用，编者同上.

欧拉解决哥尼斯堡 (现为加里宁格勒) 七桥问题的文章并未把功劳归于自己，他在文章中提到了 Leibniz (Leibniz)：

> 几何学中除了与数量有关并且为人们极为重视的那个分支外，还有

一个目前几乎一无所知的分支这就是 Leibniz 首先提出的位置几何学 (geometria situs). 这个分支只涉及位置的确定及其性质，它不涉及度量，也不作计算……

欧拉继续说明：目前还不十分清楚哪些问题与位置几何学有关，也不清楚解决它们要用什么方法. 但是他肯定，哥尼斯堡七桥问题就是这样一个问题，因为它的解只涉及位置，而没有用任何计算 [WILS85a].

事实上，早在 1679 年，Leibniz 在他给惠更斯 (Huygens) 的信 (摘自 [WILS85a]) 中说："我不满足于代数，因为代数里既没有几何中最简短的证明，也没有几何中最漂亮的构造. 因此，我认为需要另外一种类型的分析，几何的或线性的，它能像代数处理数量大小一样直接处理位置."

通过引进术语"位置分析" (analysis situs)，Leibniz 并没有奠定一个新的数学研究领域，而是指出了一个可能取得进展的总的研究方向 (对"位置分析"这个术语的历史感兴趣的读者，可以参见 Wilson 的文章 [WILS85a]). 在第 2 章，我们将对图论的历史作更多评述. 在这里值得一提的是，König 的书大概是图论早期最丰富的专著 (这里"早期"是指 1936 年 König 的书出版以前图论的发展时期).

但为什么要出一本关于欧拉图的书？是不是因为最近举行了图论 (特别是欧拉的文章)250 周年的纪念活动？本书的出版和图论 250 周年纪念日接近纯粹是一种巧合 (我原计划在 1985 年 3 月底完稿). 但是，正如前言中指出的，欧拉图方面的文章不仅在数量上增长极快，而且该专题的统一理论也趋向成熟. 这两个事实成为写《欧拉图与相关专题》一书的必要条件. 许多同事也对这件事表示出了兴趣，本书和图论发展的大趋势是一致的. 虽然这个过程是缓慢的，但是图论在过去的 20 多年里确实分化出一些不同分支.

第 2 章将给出三篇文章的原始版本. 大多数图论学家认为它们构成了欧拉图理论的主要根基. 本书大部分内容都致力于与这三篇文章中提出的概念有直接关系的一些结果. 但与现在图论的发展相比，我认为只限于欧拉图的这部分内容会太狭隘. 这一观点也体现在我的综述文章"欧拉图"里 (见 [BEIN83a]). 另一方面，这一观点提出了一个问题：如何确定这样一本书的材料选择问题.

由于本书是第一次集中讨论欧拉图，所以我决定尽可能广地覆盖这一领域的问题. 某些专题我讨论得很详细，而另一些专题像综述一样点到为止. 当然，这样做也有一些缺点. 在某些情况下，读者要想了解该专题更多的内容，常常不得不去查阅其他的书或本书所引用的原始文献. 另外，本书的某些内容会与图论中的其他分支相重叠，如在中国邮递员那一章，在 1-因子分解起重要作用的地方，以及在计数、着色和一些其他地方，都有明显重叠. 但是一般来说，恰恰由于现代图论的发展，这样或多或少的重叠是不可避免的.

为了选取恰当的材料，我查阅了数百篇文献. 许多参考文献在本书中并没有进

行广泛的讨论. 不过本书的目的之一是指出目前研究的各种不同方向. 可能有的读者会感到参考文献的数量远远多于本书讨论过的问题，但是书后的参考文献可以有利于帮助感兴趣的读者延伸到本书内容以外的各个研究方向. 我查阅了众多的文献，希望不要漏掉欧拉图理论方面的重要内容，以弥补我的综述文章在这方面的不足.

最后的一项要点是，本书是自封闭的，因为我希望它的读者尽可能多一些. 因此，第 3 章论述了图论的基础理论，以满足后面几章的需要. 要读懂某些专题，或多或少还需要更广泛的数学知识，这有点使人困扰. 因此，本书中尽可能避免使用“容易导出”,“显而易见”等语句. 许多数学家 (包括我自己)，不止一次地遇到过这种情况：要看明白一个“容易”，还需要笔和纸，并花掉半个小时，甚至更长的时间. 因此，在使用了大量图形来阐明情况的同时，我并未用图形去代替逻辑证明. 但是在某些情形下，某些结果的完整证明还是留给了读者，作为不太困难的练习. 因此，本书的内容，无论对大学生还是对研究生来说，作为欧拉图理论的课程是都已足够了，即使不熟悉图论的数学家也可以参考. 由于本书包含了许多最新的结果 (其中有些结果只是部分地解决了某些未决问题)、相当多的猜想，故图论方面的研究者们也会感兴趣.

再说说算法和复杂性研究的问题. 许多问题 (如欧拉迹、圈分解、邮递员路线和迷宫通路等问题) 是用算法陈述的. 但是，本书的目的不是要理论化提出一个算法. 复杂性问题也是如此. 从理论的观点来看，问题是否多项式时间可解是很重要的. 但在本书中，一个算法的复杂性是 $O(n)$ 还是 $O(n^2)$ 是属于次要的事. 我知道许多同事 (特别是有这方面倾向的计算机科学家和图论学家) 会对此不满.

我愿意接受任何人的批判性的意见 (肯定的、否定的或是混合的)，因为这可以帮助我改进工作. 我将对所有给我提出意见的各位作出回应.

第 2 章　欧拉图理论的三个支柱

欧拉关于哥尼斯堡七桥问题的文章 [EULER36a] 和 Hierholzer 关于构造连通欧拉图的欧拉迹的文章 [HIER73a] 都有许多不同的译本. 但是，接下来我还是要给出我自己的译文①. 决定这样做是因为我发现这些译本中有一个缺点：它们是“时新”的译本，多多少少地忽略了文章发表时的写作风格. 因此，从历史的观点来看，这些译本是不够准确的，它们无意中曲解了认知之路，我的译本并非一个学了 6 年拉丁文的高中生递交的家庭作业，也并非出于对版权的担心.

关于欧拉文章的历史说明，有兴趣的读者可参见文献 [WILS85a,WILS86a] 和 [SACH86a,SACH86b].

一个位置几何问题的解 *

1. 几何学中有一部分内容与数量有关，人们对其颇感兴趣. 除此之外，还有一部分内容，人们对它都知之甚少. 这部分几何首先由 Leibniz 提出，称为位置几何. 它研究仅由位置就可确定的几何，并研究位置的性质. 在这种几何中，人们不关心数量，也不关心计算. 然而，什么问题属于位置几何？求解它们要使用什么方法？一直没有明确的界定. 当最近有一个问题被提出来时，我确信它属于位置几何. 它看上去是一个几何问题，同时又具有这样的性质：不需要确定数量关系，通过量的计算也无法解决它. 特别地，其求解只需要位置关系就可以，而计算是无益于事的. 因此，作为位置几何的一个例子，决定在此介绍我解决这类问题的一个方法.

2. 据说这个问题是相当有名的，并且与以下叙述有关：哥尼斯堡是普鲁士的一个岛，称为 der Kneiphof. 围绕它的河被其分为两支 (图 1). 河上架有 7 座桥 a, b, c, d, e, f, g. 问题是一个人能否经过每座桥一次且恰好一次. 据说有的人否认这件事的可能性，而另一些人表示怀疑，但是没有人能给出确定的答案. 我将这一问题推广到了一般情形：不管河的形状和支流分布如何，也不管河上多少座桥.

3. 下述方法肯定能解哥尼斯堡七桥问题：列出所有可能的行走路线，由此就可以知道是否有某条路线满足要求. 但是由于组合的数目太大，这种方法是极端困难和辛苦的，而且这种方法很难应用于桥数更多的情形. 这种方法会导致许多无关

---

① 感谢维也纳奥地利科学院的 H.Reitterer 先生，他核对了我对欧拉文章的译文.

* 原书 II.2~II.11 是欧拉文章的影印件，共 10 页，摘自于欧拉全集，I7，代数研究). 这里是欧拉文章的译文. —— 译者

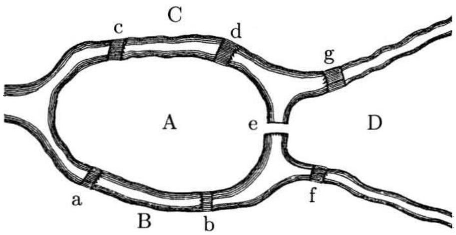

图 1

因素的讨论，包括复杂度. 排除了这种方法后，我力求寻找其他途径，一种只判断符合要求的路线是否存在的途径，我猜想应该存在这样一个简单的方法.

4. 我的方法基于表示路线的适当方式. 大写字母 A, B, C, D 表示被河分割的区域. 如果一个人从区域 A 经过桥 a 或者桥 b 走到区域 B，就用字母 AB 表示这个转移. 第一个字母表示旅行者从何而来，第二个字母表示穿过桥后到达的区域. 如果旅行者接着由区域 B 经过桥 f 到达区域 D，这个转移用 BD 表示. ABD 表示这两个相继的转移 AB 和 BD，字母 B 是第一次转移到达的区域，也是第二次转移离开的区域.

5. 类似地，若旅行者由区域 D 继续穿过桥 g 到达区域 C，就用 4 个字母 ABDC 表示这三个相继的转移. 从 ABDC 这 4 个字母中可以看出，旅行者首先出现在区域 A，然后到达区域 B，再前行到达区域 D，接着又到达区域 C. 因为这些区域是被河流分开的，所以旅行者必须穿过三座桥. 类似地，相继穿过 4 座桥将用 5 个字母表示. 无论旅行者穿过多少座桥，这条路都将用一串字母表示，其中字母数比穿过的桥数多 1. 因此，穿过 7 座桥将用 8 个字母来描述.

6. 这种记法并不需要考虑穿过的是哪座桥. 当一个人可以穿过多座桥从一个区域到达另一区域时，他走哪座桥是无关紧要的. 因此，若一个人能穿过 7 座桥且每座桥恰好穿过一次，则他的走法可以用 8 个字母表示. 它们的顺序必须满足：前后相继的 A 和 B 将出现两次，这是因为区域 A 和 B 间有两座桥 a 和 b 相连. 类似地，前后相继的 A 和 C 出现两次，而前后相继的 A 和 D，B 和 D，C 和 D 各出现一次.

7. 因此，这个问题约化为能否用 4 个字母 A, B, C, D 构成 8 个字母的序列，使得序列中相继字母出现的次数满足上述要求. 但在试图找出这样一个序列之前，需要先考察这种安排是否可能. 因为如果能证明这样的安排是不可能的，那么构造此序列的一切努力都是无效的. 因此，我研究了一个简单的规则，以判断这个问题和所有类似的问题是否有效.

8. 为了发现这样的规则，我考虑了一个具体的区域 A，通向 A 的桥可能有任意多座 (图 2). 在这些桥中，先考虑了一座具体的桥 a. 如果旅行者穿过桥 a，那么他或者跨越这座桥之前在区域 A 里，或者跨越桥之后到达区域 A. 因此，为了如上

所述地记录这次转移，字母 A 必须出现一次. 如果有三座桥 a, b, c 通向区域 A，并且旅行者要穿过所有这三座桥，那么不管他开始是否在区域 A 里，在他的走法的描述中，字母 A 都将出现两次. 如果桥的数目是任一奇数，那么字母 A 出现的次数就为桥数加 1 的一半.

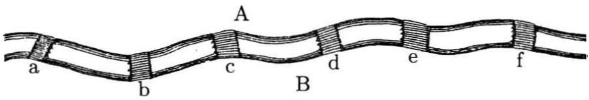

图 2

9. 在哥尼斯堡七桥问题 (图 1) 中，因为有 5 座桥通向区域 A，因此，在遍历这些桥的描述中，字母 A 必须出现三次. 由于有三座桥通向区域 B，故字母 B 必须出现两次. 类似地，字母 D 和 C 都出现两次. 在描述经过 7 座桥的 8 个字母的序列中，字母 A 要出现三次，字母 B, C, D 各要出现两次，这样的序列是不存在的. 因此，按上述要求通过哥尼斯堡七桥的路线也是不存在的.

10. 其他这类问题，假定通向每一个区域的桥数都为奇数，按类似的方法也能够判断是否有一条通过每座桥恰好一次的路线. 如果字母出现的总数等于桥数加 1，那么这样的路线是可能的. 但是如果像上述例子一样，字母出现的总数大于桥数加 1，那这样的路线就不存在了. 我提出的字母 A 的出现次数的法则，不管这些桥是从一个区域通向 A 的，还是从不同区域通向 A 的，都是有效的.

11. 然而，如果通向 A 的桥数为偶数，那就必须考虑旅行者是否是从区域 A 出发的. 如果有两座桥通向区域 A，并且旅行者是从区域 A 出发的，那么字母 A 就必须出现两次. 第一次表示他穿过一座桥离开区域 A，而第二次表示他穿过另一座桥返回区域 A. 但是如果旅行者是从另一区域出发的，那么字母 A 只出现一次，它既表示到达区域 A，也表示从区域 A 离开.

12. 假设有 4 座桥通向 A，并且旅行者从区域 A 出发，那么字母 A 就在整条路线中出现三次. 但是如果旅行者是从另一区域出发的，那么字母 A 只出现两次. 假设有 6 座桥通向区域 A，并且旅行者从区域 A 出发，那么字母 A 就在整条路线中出现 4 次. 但是如果旅行者是从另一区域出发的，那么字母 A 只出现三次. 一般地，如果假设有 $2n$ ($n \in \mathbb{N}$) 座桥通向区域 A，并且旅行者从区域 A 出发，那么字母 A 就在整条路线中出现 $n+1$ 次. 但是如果旅行者从另一区域出发，那么字母 A 只出现 n 次.

13. 在这样一条路线里，其出发地只能有一个区域. 由通向一个区域的桥数，就能算出该区域出现的次数. 如果桥数为奇数，那么这个奇数加 1 的一半就是这个区域出现的次数；如果桥数为偶数，那么这个偶数的一半就是这个区域出现的次数. 当区域出现次数之和等于桥数加 1，并且出发地是有奇数座桥的区域时，满