普通高等教育"十二五"规划教材

大学数学教学丛书

丛书主编 潘庆年 庄容坤

线性代数

主编 李桂贞 陈益智 张君敏

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$$

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材
大学数学教学丛书
潘庆年　庄容坤　主编

线性代数

李桂贞　陈益智　张君敏　主编
李思彦　王海青　刘　卉　参编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书按照“讲清道理，再讲推理”的模式编写，系统、连贯地介绍了行列式、矩阵、向量、线性方程组、矩阵的相似二次型、向量空间与线性变换等内容. 考虑到不同学时不同层次的教学需要，书中第 7 章为选学内容，不会影响教材的系统性. 在例题、习题选取方面，本书遵循少而精、难易适度的原则，每章均配有典型例题和习题，书后附有参考答案与提示，并精心设计了“问题与探究”栏目.

本书注重化解抽象理论的难度，易教易学，可读性强，适合一般本科院校理工类、经管类专业使用.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/李桂贞，陈益智，张君敏主编. —北京：科学出版社，2012
(普通高等教育“十二五”规划教材・大学数学教学丛书)
ISBN 978-7-03-034557-8

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①李…②陈…③张… Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教材
Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 133219 号

责任编辑：姚莉丽 王胡权 / 责任校对：郭瑞芝
责任印制：阎 磊 / 封面设计：迷底书装

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
化学工业出版社印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2012 年 6 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2012 年 6 月第一次印刷 印张：10 1/4
字数：200 000

定价：22.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前言 PREFACE

线性代数是高等院校理工类、经管类等专业共同开设的一门重要的基础课程,也是全国硕士研究生入学统一考试中必考的数学课程之一.随着计算机科学日新月异的发展,线性代数的理论和方法越来越广泛地应用于各个学科,因此备受重视.不同于高等数学对高中数学的延续,线性代数是学生进入大学后碰到的第一门抽象的数学课程,学生普遍认为太抽象、学习困难.线性代数的教学质量高低对学生后续课程的学习和学生素质的提高都有很大影响,基于这样的考虑,我们在总结多年教学实践经验的基础上编写了这本教材.

本书重引导,促探究;在保持经典核心内容的基础上,通过适当编排内容,进一步优化结构和体系;适当融入代数与几何相结合的数学思想;对每个重要方法的获得、重要定理的证明,都进行了合理的推导;强调了矩阵初等变换在教材中的突出作用,将初等变换这一基本方法贯穿始终.同时,本书注意化解抽象理论的难度,易教易学,可读性强,特别适合一般本科院校理工类、经管类等专业作为教材使用,也可供自学者和科技工作者阅读.

考虑到不同学时不同层次的教学需要,书中第 7 章为选学内容,不会影响教材的系统性.每章均配套典型例题和习题,书后附有参考答案与提示,以及历年硕士研究生入学考试高等数学试题线性代数部分节选.在例题、习题选取方面,本书遵循少而精、难易适度的原则,精心设置了“问题与探究”栏目.

本书的写作分工如下:

第 1 章由王海青执笔,第 2 章由陈益智执笔,第 3、5 章由李桂贞执笔,第 4 章由李思彦执笔,第 6 章由刘卉执笔,第 7 章由张君敏执笔,参考答案与提示、附录由李桂贞提供,最后由李桂贞修改定稿.

在此,向所有为本书出版付出辛勤劳动的单位和个人表示衷心的感谢.

由于编者水平有限,书中不足之处在所难免,恳请同行和读者批评指正,以便使教材更加完善.

编　者

2012 年 1 月 9 日

目录 CONTENTS

第 5 章 矩阵的相似

第 6 章 二 次 型

第 7 章 向量空间与线性变换

CHAPTER

第1章 行　列　式

行列式是由解线性方程组引进的，是研究线性代数的重要工具，它在自然科学的许多领域中都有着广泛的应用. 本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质及其计算方法. 此外还要介绍用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克拉默(Cramer)法则.

1.1 行列式的定义

一、排列与逆序

定义 1.1.1 由自然数 $1,2,3,\cdots,n$ 组成的有序数组 $j_1j_2\cdots j_n$ 称为一个 n 阶排列. 例如,3214 是一个四阶排列,645213 是一个六阶排列. 由 1,2,3,4 可组成 $4!=24$ 个不同的四阶排列. $1,2,3,\cdots,n$ 可组成 $n!$ 个不同的 n 阶排列. 按数字的自然顺序由小到大的 n 阶排列 $123\cdots n$ 称为标准排列.

定义 1.1.2 在一个排列中,若一个较大的数排在一个较小的数的前面,称这两个数构成一个**逆序**. 一个排列中,逆序的总数称为这个排列的逆序数,记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$.

逆序数是奇数的排列称为奇排列;逆序数是偶数的排列称为偶排列.

例 1.1.1 求排列 362514 与 $n(n-1)\cdots321$ 的逆序数.

解 排列 362514 中,3 在 1 和 2 前面,6 在 1,2,4 和 5 前面,2 在 1 前面,5 在 1 和 4 前面,共有 9 个逆序,即 $\tau(362514)=2+4+1+2+0+0=9$,为奇排列;

$\tau(n(n-1)\cdots321)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1+0=\dfrac{n(n-1)}{2}$,当 n 等于 $4k$ 和 $4k+1$ 时为偶排列,当 n 等于 $4k+2$ 和 $4k+3$ 时为奇排列.

把一个排列中的两个数的位置互换,其余的数不动,就得到一个新的排列,这样的变换称为排列的一个对换.

例如,将 362514 中的 6 和 1 对换,得到新的排列 312564,它的逆序数 $\tau(312564)=4$,为偶排列. 可见,经过一次对换后,排列的奇偶性发生了改变.

定理 1.1.1 每一个对换都改变排列的奇偶性.

证 分两种情况讨论.

(1) 相邻两个数对换的情况.

设排列为

$$AijB, \tag{1.1}$$

经过 i 与 j 的对换变为排列

$$AjiB, \tag{1.2}$$

其中 A,B 表示除 i,j 两个数外的其余数. 比较排列(1.1)与排列(1.2)中的逆序,A,B 中数的次序没有改变,i,j 与 A,B 中数的次序也没有改变,仅仅改变了 i 与 j 的次序,因此排列(1.2)仅比排列(1.1)增加了一个逆序(当 $i<j$ 时),或减少了一个逆序(当 $i>j$ 时),所以它们的奇偶性相反.

(2) 一般对换的情况.

设排列为

$$Aik_1k_2\cdots k_sjB, \tag{1.3}$$

经过 i 与 j 的对换变为排列

$$Ajk_1k_2\cdots k_siB, \tag{1.4}$$

将排列(1.3)中数 i 依次与 $k_1,k_2,\cdots,k_s,j$ 作 $s+1$ 次相邻对换，变为

$$Ak_1k_2\cdots k_sjiB, \tag{1.5}$$

再将排列(1.5)中的 j 依次与 $k_s,k_{s-1},\cdots,k_1$ 作 s 次相邻对换，得到排列(1.4)，即排列(1.4)可由排列(1.3)经过 $2s+1$ 次相邻对换得到. 由情况(1)可知，它改变了奇数次奇偶性，所以排列(1.4)与排列(1.3)的奇偶性相反. □

推论 1.1.1 奇排列变成标准排列的对换次数为奇数，偶排列变成标准排列的对换次数为偶数.

证明留给读者.

二、二阶与三阶行列式

设二元线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. \end{cases} \tag{1.6}$$

用消元法解此方程组，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2, \quad (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组(1.6)有唯一解

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{1.7}$$

为了便于记忆，引入记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \text{并规定} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{1.8}$$

称 D 为二阶行列式. D 中横写的称为行，竖写的称为列. 数 a_{ij} $(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式 D 的元素. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标，表明该元素位于第 i 行；第二个下标 j 称为列标，表明该元素位于第 j 列.

上述行列式的定义，可用对角线法则(图 1.1)来记忆. 把行列式中从左上角到右下角的实连线称为主对角线，从右上角到左下角的虚连线称为次对角线. 由式(1.8)可知，二阶行列式的值是主对角线上两元素之积减去次对角线上两元素之积所得的差. 按照这个规则，又有

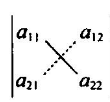

图 1.1

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2,\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

于是,当 $D\neq 0$ 时,二元线性方程组(1.6)的解可写成

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

同理,考虑三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases} \tag{1.9}$$

用消元法先后消去 x_2,x_3 得到

$$x_1=\frac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}.$$

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

并规定

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{1.10}$$

由于 D 中共有三行三列,称它为三阶行列式. 如果 $D\neq 0$,容易解出方程组(1.9)的唯一解为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D},$$

其中 $D_j(j=1,2,3)$分别是将 D 中的第 j 列的元素换成方程组(1.9)右端的常数项 b_1,b_2,b_3 得到的.

上述定义表明三阶行列式含 6 项,每项均为不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号,其规律遵循图 1.2 所示的对角线法则:图中有三条实线看成是平行于主对角线的连线,三条虚线看成是平行于次对角线的连线,实线上的三个元素的乘积冠正号,虚线上的三个元素的乘积冠负号.

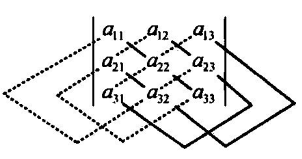

图 1.2

例 1.1.2 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 0 & 5\\ -1 & 0 & 6\end{vmatrix}.$$

解 按对角线法则,有

$$\begin{aligned}D&=1\times0\times6+2\times5\times(-1)+3\times4\times0\\&\quad-1\times5\times0-2\times4\times6-3\times0\times(-1)\\&=-10-48=-58.\end{aligned}$$

例 1.1.3 求解方程

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & x\\ 4 & 9 & x^2\end{vmatrix}=0.$$

解 $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & x\\ 4 & 9 & x^2\end{vmatrix}=3x^2+4x+18-9x-2x^2-12=x^2-5x+6.$

由 $x^2-5x+6=0$ 解得 $x=2$ 或 $x=3$.

注 对角线法则只适用于二阶与三阶行列式.

为研究更高阶行列式,下面引出 n 阶行列式的概念.

三、n 阶行列式的定义

为了给出 n 阶行列式的定义,首先研究三阶行列式的结构.见式(1.10),三阶行列式定义为

$$\begin{aligned}D&=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\\&=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\&\quad-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.\end{aligned}$$

(1) 式(1.10)右边任一项除正负号外可以写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$,三个元素位于不同行不同列.这里第一个下标(行标)排成标准排列 123,第二个下标(列标)排成 $j_1j_2j_3$,它是 1,2,3 三个数的某个排列.这样的排列共有 3! =6 种,对应式(1.10)右端共含 6 项.

(2) 各项的正负号与列标的排列对照:

带正号的三项列标排列是:123,231,312;

带负号的三项列标排列是:132,213,321.

易知前三个排列都是偶排列,后三个排列都是奇排列.因此各项所带正负号可以

表示为$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}$.

于是,三阶行列式可以写成

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}.$$

推而广之,可以定义 n 阶行列式:

定义 1.1.3 用 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$排成 n 行 n 列,称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为 n 阶行列式,它等于所有取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

的代数和,其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是数字 $1,2,\cdots,n$ 的某个排列,共有 $n!$ 项,每项前面带有符号$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \tag{1.11}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数组成的所有排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和.

n 阶行列式也可简记为 $D=|a_{ij}|$. 当 $n=1$ 时,即为一阶行列式,并规定 $|a|=a$.

例 1.1.4 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 由 n 阶行列式的定义知,展开式的一般项为 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$,$n$ 个元素必须取自不同的行不同的列. 要计算该行列式的值,只需把其中的非零项求出来即可.

第 n 行除了 a_{nn} 外,其余元素都是零,所以 $j_n=n$;在第 $n-1$ 行中,除了 $a_{n-1,n-1}$,$a_{n-1,n}$ 外,其余元素都是零,而 $a_{n-1,n}$,a_{nn} 在同一列,所以只能取 $j_{n-1}=n-1$;如此下去,在第一行只能取 $j_1=1$. 因此该行列式展开式中不为零的项只有一项

$$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

而该项的列标的排列是标准排列,其逆序数为零,所以取正号,故

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

称上面形式的行列式为上三角形行列式.

用同样的方法可得下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地,对于对角形行列式,有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

类似地,可以证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}.$$

能否在定义 1.1.3 中 n 个元素的相乘项里把元素的列标按标准排列,而由行标排列的逆序数决定各项前正负号呢?下面的定理正面回答了这一问题.

定理 1.1.2 n 阶行列式也可定义为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}, \tag{1.12}$$

式中 $\sum\limits_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数组成的所有排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 求和.

证 对于式(1.11)右端的任意一项

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

当列标组成的排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 经过 s 次对换变成标准排列 $1\ 2\cdots n$ 时,相应的行标组成的排列 $1\ 2\cdots n$ 经过 s 次对换变成排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$,由乘法的可交换性得

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} = a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}.$$

根据推论 1.1.1,可知对换次数 s 的奇偶性与 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 的奇偶性相同. 同样,s 与 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 有相同的奇偶性. 所以 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 与 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 具有相同的奇偶性,即

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn},$$

也就是式(1.11)右端的任一项总有且仅有式(1.12)右端的某一项与之对应并相等,反之亦然,于是定理成立. □

1.2 行列式的性质

当行列式的阶数较高时,直接按照定义计算它的值比较麻烦. 下面将介绍行列式的一些基本性质,利用这些性质,可以将复杂的行列式转化成形式较为特殊的行列式进行计算.

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

行列式 D^{T} 称为行列式 D 的转置行列式.

性质 1.2.1 行列式与它的转置行列式相等,即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

证 设 D^{T} 中第 i 行第 j 列的元素为 $b_{ij}\,(i,j=1,2,\cdots,n)$,则

$$b_{ij}=a_{ji}\quad(i,j=1,2,\cdots,n),$$

由行列式的定义得

$$\begin{aligned} D^{\mathrm{T}}&=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n} \\ &=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}=D. \ \square \end{aligned}$$

性质 1.2.1 说明行列式的行与列具有相同的地位,行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立,反之亦然. 因此,下面的一些性质只对行进行证明.

性质 1.2.2 交换行列式的两行(列),行列式的值变号,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=-\begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ \\ (i) \\ \\ (k) \\ \\ \\ \end{array}.$$

证 根据行列式的定义及定理 1.1.1,有

$$\text{左端}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{nj_n}$$

$$=-\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}=\text{右端}.\square$$

推论 1.2.1 若行列式有两行(列)完全相同,则行列式的值为零.

证明留给读者.

性质 1.2.3 用数 k 乘以行列式的某一行(列)中所有的元素,等于用数 k 乘此行列式,即

$$D_1=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\ka_{i1}&ka_{i2}&\cdots&ka_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=kD.$$

证 由行列式的定义,

$$\text{左端}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$$

$$=k\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}=\text{右端}.\square$$

推论 1.2.2 若行列式中某一行(列)元素全为零,则行列式的值为零.

推论 1.2.3 若行列式中有两行(列)的对应元素成比例,则行列式的值为零.

证 由性质 1.2.3 和推论 1.2.1 即可得到.□

性质 1.2.4 若将行列式中的某一行(列)的每一个元素都写成两个数的和,则此行列式可以写成两个行列式的和,这两个行列式分别以这两个数为所在行(列)对应位置的元素,其他位置的元素与原行列式相同. 即

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{i1}+c_{i1}&b_{i2}+c_{i2}&\cdots&b_{in}+c_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{i1}&b_{i2}&\cdots&b_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{i1}&c_{i2}&\cdots&c_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

证 由行列式的定义,有

$$\text{左端}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(b_{ij_i}+c_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots b_{ij_i}\cdots a_{nj_n}+\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots c_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$$

$$= 右端.\square$$

推论 1.2.4 若将行列式的某一行(列)的每个元素都写成 m 个数的和,则此行列式可以写成 m 个行列式的和.

性质 1.2.5 将行列式的某一行(列)的所有元素同乘以数 k 后加于另一行(列)对应位置的元素上,行列式的值不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 由行列式的性质 1.2.4,有

$$左端 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{j1} & ka_{j2} & \cdots & ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

由推论 1.2.3 知上式右端的第二个行列式的值为零,从而有左端=右端. □

利用以上行列式的基本性质,可以简化行列式的计算,基本思路是:利用行列式的性质,把它们化成上(下)三角形行列式,再求其值.

在计算行列式时,为了叙述方便,约定如下记号:以 r_i 表示行列式第 i 行,以 c_j 表示行列式第 j 列,交换 i,j 两行,记为 $r_i \leftrightarrow r_j$,第 i 行扩大 k 倍记为 kr_i,第 i 行加上第 j 行的 k 倍记为 r_i+kr_j. 对列也有类似记号.

例 1.2.1 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 2+a_1 & 3+a_1 \\ 1+a_2 & 2+a_2 & 3+a_2 \\ 1+a_3 & 2+a_3 & 3+a_3 \end{vmatrix}.$$

解

$$D \xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1} \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 2 \\ 1+a_2 & 1 & 2 \\ 1+a_3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

例 1.2.2 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}.$$

解

$$D\xlongequal{c_1\leftrightarrow c_2}-\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\1&-5&3&-4\\0&2&1&-1\\-5&1&3&-3\end{vmatrix}\xlongequal[r_4+5r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&-8&4&-6\\0&2&1&-1\\0&16&-2&7\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&-8&4&-6\\0&16&-2&7\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-8r_2]{r_3+4r_2}\begin{vmatrix}1&3&-1&1\\0&2&1&-1\\0&0&8&-10\\0&0&-10&15\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+\frac{5}{4}r_3}\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&0&8&-10\\0&0&0&\frac{5}{2}\end{vmatrix}=1\times2\times8\times\frac{5}{2}=40.$$

例 1.2.3 试证：

$$\begin{vmatrix}a&b&c&d\\a&a+b&a+b+c&a+b+c+d\\a&2a+b&3a+2b+c&4a+3b+2c+d\\a&3a+b&6a+3b+c&10a+6b+3c+d\end{vmatrix}=a^4.$$

证 对左端行列式从第四行开始，后行减前行，得

$$\text{左端}\xlongequal[r_2-r_1]{\substack{r_4-r_3\\r_3-r_2}}\begin{vmatrix}a&b&c&d\\0&a&a+b&a+b+c\\0&a&2a+b&3a+2b+c\\0&a&3a+b&6a+3b+c\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_2]{r_4-r_3}\begin{vmatrix}a&b&c&d\\0&a&a+b&a+b+c\\0&0&a&2a+b\\0&0&a&3a+b\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-r_3}\begin{vmatrix}a&b&c&d\\0&a&a+b&a+b+c\\0&0&a&2a+b\\0&0&0&a\end{vmatrix}=a^4=\text{右端}.\square$$