普通高等教育"十一五"国家级规划教材

实变函数论与泛函分析

(第3版)　(上册)

曹广福　编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书分上、下册。上册系统介绍了实变函数的基础知识，共分五章：集合、测度论、可测函数、Lebesgue积分以及抽象测度与积分。其中，前四章为必学内容，授完约需60学时，第五章属选学内容，可用12～16学时讲完。

本书文字流畅，论证严密，对概念、定理的背景与意义交代得十分清楚，介绍了新旧知识之间、实变函数与其他数学分支之间的内在联系。本书特别注重培养学生如何提出问题，以及如何从分析问题的过程中寻求解决方法的能力。

本书可供综合性大学与师范院校数学各专业本科生作为教材或教学参考书，也可作为工科部分专业高年级本科生与研究生的教材或教学参考书。同时，本书对于有一定数学基础的读者而言，也是一部很好的自学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

实变函数论与泛函分析．上册/曹广福编．—3版．—北京：高等教育出版社，2011.6

ISBN 978-7-04-031674-2

Ⅰ.①实…　Ⅱ.①曹…　Ⅲ.①实变函数论-高等学校-教材②泛函分析-高等学校-教材　Ⅳ.①O17

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第217531号

策划编辑　杨　波　　责任编辑　田　玲　　封面设计　于文燕　　版式设计　马敬茹
责任校对　姜国萍　　责任印制　张福涛

出版发行　高等教育出版社
社　　址　北京市西城区德外大街4号
邮政编码　100120
印　　刷　北京印刷一厂
开　　本　787mm×960mm　1/16
印　　张　12
字　　数　220千字
购书热线　010-58581118
咨询电话　400-810-0598

网　　址　http://www.hep.edu.cn
　　　　　http://www.hep.com.cn
网上订购　http://www.landraco.com
　　　　　http://www.landraco.com.cn
版　　次　2000年8月第1版
　　　　　2011年6月第3版
印　　次　2011年6月第1次印刷
定　　价　19.30元

物 料 号　31674-00

第3版前言

要完成一部好教材的确不容易，往往需要经过千锤百炼、长期使用后才能逐步走向成熟。本书从第一版起，已使用了近十年的时间，根据不完全统计，有数十家兄弟院校使用本教材，这大大增加了我进一步完善该教材的动力。

实变函数与泛函分析作为大学数学专业的重要主干课程已经开设了相当长的时间，其间出版的教材不计其数，我一直在思考一个问题：到底什么样的教材算得上一部成功的教材？销量无疑是一部教材成功的重要标志，然而，销量有时取决于很多因素，正所谓天时地利人和，没有销量的教材未见得就不是好教材，反之亦然。目前有这样一种倾向，随着时间的推移，教材内容越来越丰富甚至越来越难。丰富的内容无疑可以为读者提供大量的学习素材，然而作为学生用教材，如果充斥了太多的实际不可能讲授完的内容，这除了增加学生的购书成本外恐怕没有太大的意义。如果学生觉得需要，完全可以查找参考书。但数学像其他学科一样是不断发展的，几十年一成不变的教材内容相对于学科的飞速发展显得有点不相适应，同时也违背了我们一贯提倡的教学过程中应增加信息量的精神。

到底什么叫信息量？是指单位时间内教授内容的多少，还是指课堂内容的广度与深度？作为一门大学课程，也许两者都有，不过，我更倾向于后者。教材也好，课堂也罢，其读者与听者的层次参差不齐。如果一本教材能让所有的读者轻松读懂，一门课程能让所有学生轻松听懂（排除某些特殊课程），几乎可以肯定，这样的教材太过肤浅，这样的课堂缺少深度。然而，倘若一部教材让大多数读者如读天书，一门课程令大多数学生如“坐飞机”，那么不是教材不适合这个群体阅读，就是写得太过深奥，不是老师讲课方式存在问题，就是他讲得太深。这就是说，教材与教师要面向大多数，在不同层次的读者或学生之间选取一个平衡点，不过这很难。

有一次参加教育硕士生的开题报告时听到了一个名词——“分层次教学”。虽然仅从字面就知道其意思，但听了学生的报告后，我感觉到，所谓的分层次教学虽然很多人在说，在研究，甚至发表了很多研究论文，但在我看来似乎不是个高明的做法，我不相信具有实际的可操作性。所以我与一位声称在他们学校实施了分层次教学的老师相约，适当的时候去取取经，见识一下他们的分层次教学。我觉得，比较现实可行的做法是让你的教材或课堂具有一定的“弹性”。所

谓弹性就是教材或课堂有一条“主线”，围绕这条主线的相关内容是每个读者或学生都应该掌握的，这条主线就是大纲规定的内容。但在主线之外还应有“辅助线”，即与教材或课堂基本内容密切相关的附加内容，这就是信息。

信息既有横向的，也有纵向的。所谓横向信息指的是本课程与其他学科及现实世界的关联，纵向信息则是指与此课程相关的后续理论。横向信息比较难写，需要作者具有比较广博的知识以及对本门课程透彻的了解，但一旦写出来，读者接受不会太难，因为它一般不会增加新的知识点，只是读者已有知识点的串联。纵向的信息既好写又难写，好写之处在于如果作者从事的是与本课程相关的研究，那么作者对与之相关学科的过去与未来早已了然于胸，写起来自然驾轻就熟；难写之处在于不知该写到何种程度，写深了，晦涩难懂，读者肯定没兴趣看下去，写浅了，读者难解其中三昧，读起来没有多大意思。这里且谈谈纵向信息。

并非所有相关的信息都适合写进教科书，写进教科书的内容应该具有一般性，不能太过专门化，否则适应的读者面就太小了，教科书毕竟是为学生打基础用的，而且也要考虑到别的教师能否比较容易接受你所阐述的理论与思想。在这方面，数学也许有着得天独厚的优势。我觉得纵向的内容适宜强化思想的阐述，不可增加太多的知识点，以半专业半科普的方式为好，目的在于帮助学生开阔眼界，为学生提供进一步阅读的线索。所谓半专业是指你阐述的内容与本课程的基础内容密切相关，没有本课程的基础知识难以真正理解你要阐述的思想；半科普是指不要纠缠于具体的细节问题，毕竟它不是大纲必选的内容，你的目的在于开阔学生眼界，让学生了解此门课程的“前世今生”，并学会如何运用所熟悉的知识去发现问题、分析问题、解决问题，从而建立新的理论。

教材改革中有一种趋势我不敢苟同，一些教材编写者把大量原本在后续课程才会学到的东西大大提前了。例如在一次会议上，有人提出用 Lebesgue 积分取代经典的 Riemann 积分，我个人并不太赞同。如果从实用的角度来说，还没有哪种积分理论可以与 Riemann 积分相提并论。Lebesgue 积分在理论上的确比 Riemann 积分好用，许多 Riemann 积分无能为力的问题在 Lebesgue 积分面前迎刃而解。但要真正理解 Lebesgue 积分理论却不可能摆脱 Riemann 积分，因为如果没有 Riemann 积分恐怕也不会有 Lebesgue 积分。要说重要性，大概没有哪种数学理论可以与微积分比肩，更何况大量的实际计算最后只能回到 Riemann 积分。不过，我赞同在微积分教材中适当讲一点 Lebesgue 积分，因为非数学类专业的学生一般不会有机会接触新型的积分理论，而这种理论在很多情况下的确有用。

基于上述思想，在本次修订中我们除弥补了前两版中存在的一些疏漏、增加了部分习题外，最大的变化是增加了两节新的内容，侧重介绍了几种解析函数空间及这些空间上的三类重要算子。之所以增加这两节内容，除了上面提到的原

因外，更重要的是，解析函数空间及算子是实变、复变、泛函等大学数学专业几门重要课程的有机融合，通过对这些理论的了解，学生可以看到这些课程的内在联系。同时，这些理论又是非常前沿的，直到今天依然是数学家们研究的课题，可以为有兴趣的同学进一步研读提供线索。当然，这是一种尝试，成功与否有待实践的检验。

最后，要特别感谢高等教育出版社数学分社的编辑们，他们自始至终关注本教材的出版工作。还要感谢广州大学教务处及相关校领导，如果不是他们的大力支持，也许本版教材很难按期顺利出版。

曹广福

2011 年 1 月

第 2 版前言

上册

本书上册是在《实变函数论》(高等教育出版社 2000 年出版)基础上修订而成的，与第一版相比，第二版做了如下几个方面的改进:

1. 文字上作了进一步的润饰，纠正了第一版中的一些疏漏，包括印刷错误和笔误以及定理证明中的一些疏忽。

为更好地帮助读者理解一些概念和定理，并掌握本课程中的重要的思想方法与技巧，增加了对一些问题的阐述。以编者之见，学习任何一门课程的根本目的在于了解两个方面的问题:

(i) 为什么要做某些事？它是必要的吗？

(ii) 应该如何科学地做这些事？

但愿读者通过阅读本书能透彻地理解为什么要定义测度、可测函数及新型的积分，能熟练掌握本课程的基本思想和方法。

2. 为使本书适应更宽的读者面，在内容上做了一些标注，第一章至第四章(第四章*4.1 小节读者可以只作简单的了解，某些烦琐的证明可以跳过)为数学系学生的必学内容，考虑到一些专业确实需要抽象测度，特别是 Radon-Nikodym 定理，所以仍保留第五章作为选学内容供需要者使用。

有些非数学类理工科专业的研究生实际上也需要实变函数知识，或许是学时所限的缘故，以往常常是只讲泛函分析，不讲实变函数，但如果不介绍 L^p 空间，则很难对泛函分析有直观和本质的理解，事实上，L^p 空间也是应用较为广泛的一类空间。希望本书在这方面能有所帮助。

书中所有标有 * 号的章节都是非数学类学生可以跳过不学的内容，标有 * 号的定理可以只熟悉结论，暂不必学习它的证明。这样安排有两个好处，一是可以在极短的时间内了解实变函数的基本内容；二是有兴趣的读者可以在有余力和时间的情况下方便地学习相关定理的证明而不必另寻资料。我们认为这样并不妨碍读者对实变函数理论的理解，实际上许多结论都可以与微积分中相应的结论作类比，关键在于了解这些理论的背景及科学意义。

严格说来，教材只是一部半成品，对教材中概念、定理及思想方法的理解往

往因教者或读者而异，正所谓仁者见仁、智者见智，只有在融入了使用者的智慧之后，教材才能真正发挥它的作用。有鉴于此，编者在教材中尽可能渗入对一些问题的理解，或许它能为读者使用本教材提供一点方便，同时亦期望以此作为与读者的心得交流。

下册

有人说，泛函分析似乎就是有限维线性空间及其线性变换在无限维空间的平行推广。弦外之音不言而喻。我想，泛函分析存在和发展了差不多一个世纪，并且与如此众多的科学分支发生了深刻的联系，其重要性自不待言。其实，稍稍了解泛函分析及其历史的人都知道，泛函分析的起源来自对微分与积分方程（包括变分法）的研究，无论是其研究手段与方法，还是其高度的概括性与抽象性，都完全有别于线性代数。从大的方面看，推动它产生与发展的因素有两个：其一，“出现了用统一的观点来理解19世纪数学各个分支所积累的大量实际材料的必要性”，使得“泛函分析的基本概念从不同的方面和不同的联系中产生了”（见《数学——它的内容、方法和意义》），其结果是“代数和分析在方法上的统一”（Hilbert 语，见《数学概观》p. 133）。其二，与量子力学相关的数学问题的研究为泛函分析的发展提供了巨大的动力，并逐步形成泛函分析的基本方向。诚然，泛函分析的最终发展或许与奠基者们的初衷有所差异，尽管这一理论在量子力学、偏微分方程乃至拓扑、代数等理论中有着重要的应用，但在一些重大经典分析问题面前多少显得有点软弱无力。不过，这一点也不影响泛函分析在数学与自然科学领域中的地位。事实上，泛函分析对于任何一个从事数学工作的学者甚至某些自然科学领域的研究者而言都是必备的知识。

一些人对某些学科产生这样那样的认识除了与他们对理论理解的程度有关外，或许还与他们所阅读的书籍有关。我们不可能指望每一个读者在阅读本教材的同时去阅读相关的历史，因此教材到底该告诉读者什么，这是至关重要的。根据多年的教学实践，我们以为，教材不应该只是一些概念、定理及证明的堆砌，它同时还应该告诉读者为什么要做某些事，它会给我们带来什么后果。本着这一愿望，我们尝试编写了此书。但愿读者在阅读本书时能体会到这一点。

为了帮助读者理解教材内容，尽可能使理论的阐述更直观、通俗易懂些，我们注重与一些前期课程如线性代数中相应概念的类比，相信读者自能领会两者之间的异同。此外特别注重问题的提出与分析，希望从分析中寻找到解决问题的钥匙。不过由于编者的学识与功力所限，未必能尽如人意，不足之处，欢迎行家与读者赐教。

本册第一章、第二章以及第三章的第一节由曹广福同志执笔，第三章第二节至第六节由严从荃同志执笔。最后由曹广福同志统稿。

需要说明的是，四川大学教务处以及数学学院的领导为本书的写作给予了

极大的鼓励与支持,正是由于他们的帮助,才使本书得以顺利完成。在此谨表示我们最诚挚的谢忱。

曹广福

2004年3月20日

第 1 版前言

实变函数论在大学数学系已开设了几十年，其间出版的各种教材不计其数，仅以国内作者编写的教材而言，就有很多名家大作和各具特色的好教材，如恩师江泽坚先生和吴智泉先生合编的《实变函数论》（第二版）（高等教育出版社，1994 年），夏道行先生、吴卓人先生、严绍宗先生、舒五昌先生合编的《实变函数论与泛函分析》（第二版）（上册）（高等教育出版社，1984 年），周民强先生编写的《实变函数》（北京大学出版社，1995 年）等。有如此众多的好教材，为什么还要编写此书呢？主要出于如下几个方面的原因：

1. 根据我校这几年开设实变函数论课程的实际情况，我们感到该课程的起点如建在抽象测度，学生觉得太吃力，往往难以把握此门课程的本质，但如将起点建在直线上的 Lebesgue 测度，又显得过于特殊。将起点建于 n 维欧氏空间情形是比较适当的，当然，这是指我校数学系学生而言，未必适用于其他兄弟院校。在这一点上，江泽坚先生、吴智泉先生合编的《实变函数论》比较适合于我校。

2. 与数学系开设的前期课程相比，实变函数论有一定的抽象性，初学者会感到有些困难，如果对一些抽象概念作些必要的直观解释，对定理的来龙去脉交代得更清楚一点，并注重新旧知识之间的内在关联，将会给初学者准确把握该理论带来较大的帮助。

3. 目前，我校课程体系正进行大的调整，许多课程的学时都要精简，实变函数论也不例外，我们需要一本更适合现行体系的《实变函数论》教材。

鉴于上述原因，我们在讲授几年讲义的基础上，尝试编写了此书，谬误之处，敬请诸位专家指正。

我们正处于从精英化教育向大众化教育转变的历史时期，众所周知，学习数学的关键在于理解数学，数学教育改革的根本任务在于如何从过去的传授数学知识转向培养学生提出、分析和解决数学问题或实际问题的能力，要让学生掌握解决问题的钥匙，同时，使他们懂得该如何学习。基于这个原则，我们力求使本书直观、通俗易懂，尽可能让读者明白，为什么要引进某个概念，为什么要考虑某个问题，如何得到所要的结论。如果读者阅读此书时，能轻松、准确地把握本门

课程中的重要概念和定理，并从中有所收获，那么作者的努力就没有白费。

要指出的是，本书编写过程中，参考了上面提到的多部教材以及其他一些教材和一些数学史料。特别是江先生、吴先生合编的教材对本书的编写影响颇深，在此，对所有我们参考过的教材与书籍的作者深表谢意！另外，要感谢钟昌勇同志仔细阅读了全部手稿，指出了许多疏漏之处，并提供了部分习题。徐安石教授、余大海教授曾与作者多次研讨过编写方面的问题，在此一并表示谢意。最后还要特别感谢数学学院领导在作者编写本书过程中所给予的鼓励、支持和帮助，正是由于他们的支持，才使这部抛砖引玉之作得以顺利完成。

曹广福

2000年5月20日

目　录

引　言

实变函数即实变量的函数,微积分中所讨论的函数都属此类函数.然而,微积分学中涉及的函数都是比较“好”的函数,至少“基本上”是连续的函数,如果间断点太多,则无论是其可导性还是可积性就都成问题了,但非连续的函数是我们常常会碰到和必须处理的.著名的狄利克雷(Dirichlet)函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是}[0,1]\text{ 中的有理数},\\ 0, & x\text{ 是}[0,1]\text{ 中的无理数}\end{cases}$$

在 Riemann 积分意义下就是个处处不连续的不可积函数.

另一方面,初等微积分学中的积分与极限交换顺序以及重积分化成累次积分等通常要在很强的条件下才能进行,然而,许多情况下,这些条件并不能得到满足.例如,一个黎曼(Riemann)可积函数序列在处处收敛意义下的极限完全可能是一个 Riemann 不可积函数,此时讨论 Riemann 积分意义下的极限与积分交换顺序问题可能是毫无意义的.遗憾的是,这类问题恰恰是无法回避的,有时,为了使问题的讨论得以继续进行,常常要做一大堆复杂的推导,这给我们带来极大的不便,如何解决这个问题呢?还是让我们先来回顾一下 Riemann 积分的定义,以图找出问题的症结所在.

定义　假设 $y=f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的函数,若存在某个常数 A,使得对区间 $[a,b]$ 的任一分割:$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ 及任意 $\xi_i\in[x_i,x_{i+1}]$,$i=0,1,\cdots,n-1$,只要 $\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1}\{x_{i+1}-x_i\}\to 0$,就有

$$\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)\to A,\tag{1}$$

则称 f 在 $[a,b]$ 上 **Riemann 可积**,A 称为 f 在 $[a,b]$ 上的**定积分**.

从上述定义可以看出,如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,则对 $[a,b]$ 内任一充分小的邻域,$f(x)$ 在其上值的变化不能太大,否则(1)式中和式的极限可能会不存在.由此看来,(1)式对函数有了特定的要求,它要求这些函数必须是“循规蹈矩”的,即(1)式中极限存在的函数要“基本上”是连续的,事实上,这已为人们所证明(这里所说的“基本上”稍有含糊,所幸不妨碍对问题的理解).这说明,问题恰恰出在 Riemann 积分的定义本身,若想使事情得以解决,就必须摆脱 Riemann 积分的局限.

法国著名数学家勒贝格(Lebesgue,Henri Léon)给我们带来了全新的观点,他

凭着基于直观几何概念的深刻的洞察力,给分析学开辟了新天地,这也正是本书要介绍的新型积分学理论——Lebesgue 积分. Lebesgue 放弃了对函数的定义域进行分割并进而求和的方法,转而对函数的值域进行分割. 为方便起见,不妨以$[a,b]$上有界函数$y=f(x)$为例,假设$m\leqslant f(x)\leqslant M$,对$[m,M]$作任意分割$m=c_0<c_1<c_2<\cdots<c_n=M$,则对$f$的定义域中任意$x$,$f(x)$必定位于某个$(c_i,c_{i+1}]$中. 考虑所有其值位于$(c_i,c_{i+1}]$中的那些$x$,即$(c_i,c_{i+1}]$的原像,记作$E_i=\{x\mid c_i<f(x)\leqslant c_{i+1}\}$. 直观上看来,当$y=f(x)$连续时,$E_i$是一些区间的并. 我们暂时先假定$f$是连续的,这样$E_i$自然有"长度",即几个(也可能是无穷多个)小区间长度之和,作和式

$$S(f)=\sum_{i=0}^{n-1}\xi_i\,|E_i|,\quad c_i<\xi_i\leqslant c_{i+1} \tag{2}$$

(也可以$f(x_i)$代替ξ_i,$x_i\in E_i$),其中$|E_i|$表示小区间长度之和. 当$\max\limits_i\{c_{i+1}-c_i\}\to 0$时,$S(f)$有没有极限? 如果有,极限是什么? 仔细分析一下,此时$S(f)$的极限其实就是f的 Riemann 积分. 这就是说,用上述方法分割求和相对于连续函数来说与 Riemann 积分是一样的(以后将会看到,除了广义 Riemann 积分外凡 Riemann 可积函数在这种意义下都是可积的).

如果f在$[a,b]$上不连续,情形会怎样呢? 此时E_i就未必是由区间组成的了,这从 Dirichlet 函数便可看出,因而E_i就没有通常的"长度"了,(2)式自然没有意义. 要解决这一问题,就有必要对一般的集合E_i建立"长度"概念,这就是本书要介绍的"测度". 有了"长度"概念,还要考察什么样的集合有"长度",什么样的集合没有"长度"? 假如有些集合没有"长度",那么什么样的函数f使得$E_i=\{x\mid c_i<f(x)\leqslant c_{i+1}\}$有"长度"? 什么样的$f$使(2)式有极限? 于是"可测函数"及新型"可积函数"的概念便由此产生. 乍看起来,与 Riemann 积分比较,除了定义的角度、观点不同,Lebesgue 积分似乎无更多新意. 其实不然,这一理论给数学带来的影响是深刻和巨大的,它除了使可积函数的范围扩大以及为积分与极限交换顺序等问题提供更方便实用的理论外,其更深远的影响在于为泛函分析的产生奠定了基础,同时,也使得概率论很自然地成为近代数学的一个重要分支. 当然,实变函数对数学的影响远非仅止于此,江泽坚先生与吴智泉先生合编的《实变函数论》(第二版)(高等教育出版社,1994 年)一书的序中对此作了生动的阐述.

本书将从集合的基本概念出发,逐步介绍测度、可测函数、Lebesgue 积分等理论,并简单介绍抽象测度与积分.

全书主要限于 Lebesgue 测度及积分情形,对于更一般的测度与积分理论,将其作为选学内容放在最后一章,它对于想进一步了解有关理论,特别是要学习泛函分析、现代概率论等课程的读者是必需的.

第一章 集　　合

集合论产生于 19 世纪 70 年代,它是德国数学家康托尔(Cantor)创立的,不仅是分析学的基础,同时,它的一般思想已渗入到数学的所有分支."集合论观点"与现代数学的发展不可分割地联系在一起.然而,任何一门学科的发展都不可能是一帆风顺的,也不可能是完美无缺的.正是集合论,曾经给数学界带来了极大的恐慌,因为自从 Cantor 以相当随便的方式阐述了集合论(即现在人们所说的朴素集合论)之后,人们逐渐发现它存在着不可调和的矛盾.如罗素(Bertrand Russell)于 1918 年叙述的著名"理发师"悖论,以及理查德(Jules Richard)编造的"理查德"悖论等,都曾经深深困扰了数学家们.为避免集合论中的矛盾,人们求助于将 Cantor 的朴素集合论加以公理化,以策梅洛(Ernst Zermelo)为首的一批数学家建立了一套集合论公理体系,即如今的形式集合论,从而避免了这一理论内已被发现的矛盾.然而,有关公理化集合论相容性尚未得到证明.庞加莱(Poincaré)关于相容性问题做了一个风趣的评论:"为了防备狼,羊群已用篱笆圈了起来,但却不知道圈内有没有狼."尽管集合论不如人们所期望的那样无懈可击,它在数学中的地位却不因此而降低,它始终是我们掌握许多理论所必需的基本知识.

§1　集合及其运算

1.1　集合的定义及其运算

我们在诸如数学分析等前期课程中已接触过集合这个概念,所谓**集合**,指的是具有某种特定性质的**对象**的全体,通常用大写英文字母 $A,B,X,Y,\cdots$ 表示,集合中的每个对象称为该集合的**元素**.一般说来,我们总用小写字母 $a,b,x,y,\cdots$ 表示集合中的元素.

对于集合 A,如果某一对象 x 是 A 的元素,则称 x **属于** A,记作 $x\in A$;如果 x 不是 A 的元素,则称 x **不属于** A,记为 $x \overline{\in} A$(或记为 $x\notin A$).

正如定义所说,集合是由具有某种特定性质的对象全体组成的,因此,在表示一个集合时,常把这一性质写出来.例如,当 A 是由具有性质 P 的元素全体组