

# 数学分析教程

吉联芳 宋柏生 罗庆来 编著

下册

东南大学出版社

# 数学分析教程

下 册

吉联芳 宋柏生 罗庆来 编



(苏)新登字第 012 号

## 内 容 简 介

本书是为高等工科院校高等数学提高班及对数学要求较高的专业而编写的,分上、下两册。上册内容包括:函数、极限、连续、导数与微分、微分学基本定理及其应用、不定积分、定积分及其应用等;下册内容包括:级数、常微分方程、空间解析几何、多元函数微分学、含参变量积分、多元函数积分学及场论等。

本书内容编排循序渐进,论证严谨,例题丰富,习题类型多样,书末附有习题答案。

本书可作为高等工科院校师生的教学参考书,也可供工程技术人员及报考高等院校研究生的读者作为参考用书。

责任编辑 徐步政

## 数 学 分 析 数 程

### 下 册

吉联芳 宋柏生 罗庆来 编

---

东南大学出版社出版发行

南京四牌楼 2 号

东南大学印刷厂印刷

开本  $850 \times 1168$  毫米  $1/32$  印张 21.5 字数 559 千字

1992 年 2 月第 1 版 1992 年 2 月第 1 次印刷

印数: 1—1200 册

---

ISBN 7-81023-587-7

O·57

定价: 9.25 元

# 目 录

## 第九章 无穷级数

|                           |    |
|---------------------------|----|
| §9.1 数值级数的基本问题            | 2  |
| 一、基本概念                    | 2  |
| 二、级数的收敛条件                 | 5  |
| 三、基本性质                    | 8  |
| 习题一                       | 10 |
| §9.2 正项级数                 | 13 |
| 一、基本定理                    | 13 |
| 二、正项级数的比较判别法              | 13 |
| 三、Cauchy 积分判别法            | 20 |
| 四、Cauchy 根值判别法            | 21 |
| 五、达朗贝尔 (D'Alembert) 比值判别法 | 23 |
| •六、拉贝 (Raabe) 判别法         | 27 |
| •七、高斯 (Gauss) 判别法         | 29 |
| 习题二                       | 32 |
| §9.3 任意项级数                | 37 |
| 一、交错级数的收敛性                | 38 |
| 二、绝对收敛与条件收敛               | 41 |
| 三、任意项级数的收敛判别法             | 43 |
| 四、绝对收敛级数的性质               | 49 |
| 习题三                       | 55 |
| §9.4 函数项级数                | 59 |
| 一、函数项级数的基本概念              | 59 |
| 二、一致收敛性                   | 62 |
| 三、一致收敛性判别法                | 66 |

|                     |     |
|---------------------|-----|
| 四、一致收敛级数的分析性质       | 73  |
| 习题四                 | 77  |
| §9.5 幂级数            | 79  |
| 一、幂级数的收敛半径          | 80  |
| 二、幂级数的和函数的分析性质      | 84  |
| 三、函数的幂级数展开          | 88  |
| 四、幂级数的某些应用          | 98  |
| 习题五                 | 102 |
| §9.6 富里哀(Fourier)级数 | 106 |
| 一、三角函数系的正交性         | 107 |
| 二、Euler-Fourier 公式  | 108 |
| 三、Fourier 级数        | 110 |
| *四、收敛定理             | 111 |
| 五、将周期函数展为富里哀级数      | 118 |
| 六、正弦(余弦)级数与函数的奇偶延拓  | 121 |
| 七、周期变换              | 126 |
| 八、富里哀级数的复数形式        | 131 |
| *九、最佳均方逼近           | 134 |
| 习题六                 | 138 |

## 第十章 常微分方程

|                            |     |
|----------------------------|-----|
| §10.1 微分方程的基本概念            | 143 |
| 习题一                        | 149 |
| §10.2 一阶微分方程               | 151 |
| 一、可分离变量的方程                 | 151 |
| 二、齐次方程                     | 157 |
| 三、一阶线性微分方程                 | 160 |
| *四、Clairaut 方程、奇解          | 168 |
| 习题二                        | 173 |
| §10.3 特殊类型的二阶微分方程          | 179 |
| 一、 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程 | 179 |
| 二、 $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程 | 182 |

|                      |     |
|----------------------|-----|
| 习题三                  | 135 |
| §10.4 二阶线性微分方程解的结构   | 136 |
| 习题四                  | 190 |
| §10.5 二阶线性常系数微分方程    | 191 |
| 一、二阶线性常系数齐次方程的解法     | 196 |
| 二、二阶线性常系数非齐次方程的解法    | 205 |
| 三、二阶线性常系数非齐次方程的常数变易法 | 216 |
| 四、欧拉(Euler)方程        | 219 |
| 习题五                  | 222 |
| 10.6 微分方程的幂级数解法      | 227 |
| 习题六                  | 230 |
| §10.7 常系数线性齐次微分方程组   | 230 |
| 习题七                  | 237 |
| <b>第十一章 空间解析几何</b>   |     |
| §11.1 空间直角坐标系        | 239 |
| 一、空间中点的直角坐标          | 239 |
| 二、坐标轴的平移             | 241 |
| 三、两点间的距离             | 242 |
| 习题一                  | 243 |
| §11.2 向量代数           | 244 |
| 一、向量的概念              | 244 |
| 二、向量的加减法、数与向量的乘积     | 245 |
| 三、向量的坐标表示            | 248 |
| 四、向量的数量积             | 254 |
| 五、向量的向量积             | 258 |
| 六、向量的混合积             | 264 |
| 习题二                  | 266 |
| §11.3 平面和直线          | 270 |
| 一、平面                 | 270 |
| 二、直线                 | 277 |
| 三、交于一直线的平面束          | 286 |

|                 |     |
|-----------------|-----|
| 习题三             | 288 |
| §11.4 空间曲面与空间曲线 | 291 |
| 一、球面与柱面         | 291 |
| 二、空间曲线          | 294 |
| 三、锥面            | 298 |
| 四、旋转曲面          | 300 |
| 五、几个常见的二次曲面     | 302 |
| 六、曲面的参数方程       | 305 |
| 习题四             | 306 |

## 第十二章 多元函数微分学

|                  |     |
|------------------|-----|
| §12.1 多元函数的概念    | 309 |
| 一、邻域、点列的极限       | 309 |
| 二、开集、闭集、区域       | 311 |
| 三、平面点集的几个基本定理    | 313 |
| 四、多元函数的概念        | 315 |
| 五、二元函数的几何意义      | 317 |
| 习题一              | 318 |
| §12.2 多元函数的极限与连续 | 320 |
| 一、二元函数的极限        | 320 |
| 二、二重极限与累次极限      | 325 |
| 三、二元函数的连续性       | 327 |
| 四、有界闭区域上连续函数的性质  | 329 |
| 习题二              | 331 |
| §12.3 偏导数与全微分    | 333 |
| 一、偏导数            | 333 |
| 二、全微分            | 337 |
| 习题三              | 346 |
| §12.4 方向导数与梯度    | 349 |
| 一、方向导数           | 349 |
| 二、梯度             | 352 |
| 习题四              | 354 |

|                    |     |
|--------------------|-----|
| §12.5 复合函数微分法      | 354 |
| 一、全导数              | 354 |
| 二、复合函数微分法          | 356 |
| 三、一阶全微分形式的不变性      | 361 |
| 习题五                | 363 |
| §12.6 隐函数微分法       | 365 |
| 一、隐函数存在定理          | 366 |
| 二、雅可比 (Jacobi) 行列式 | 369 |
| 三、隐函数微分法           | 371 |
| 习题六                | 375 |
| §12.7 微分法的几何应用     | 377 |
| 一、空间曲线的切线与法平面      | 377 |
| 二、曲面的切平面与法线        | 379 |
| 习题七                | 381 |
| §12.8 高阶偏导数与高阶全微分  | 383 |
| 一、高阶偏导数            | 383 |
| 二、高阶全微分            | 389 |
| 习题八                | 391 |
| §12.9 二元函数的泰勒公式    | 393 |
| 习题九                | 397 |
| §12.10 极值与条件极值     | 397 |
| 一、极值               | 397 |
| 二、最小二乘法            | 406 |
| 三、条件极值——拉格朗日乘数法    | 411 |
| 习题十                | 418 |

### 第十三章 含参变量积分

|                  |     |
|------------------|-----|
| §13.1 含参变量的常义积分  | 421 |
| 习题一              | 429 |
| §13.2 含参变量的广义积分  | 432 |
| 一、含参变量广义积分的一致收敛性 | 432 |
| 二、含参变量广义积分的性质    | 435 |

|                                                |     |
|------------------------------------------------|-----|
| 习题二                                            | 442 |
| §13.3 Beta 函数与 Gamma 函数                        | 444 |
| 一、Gamma 函数 $\Gamma(S)$                         | 445 |
| 二、Beta 函数 $B(p, q)$                            | 446 |
| 三、Beta 函数 $B(p, q)$ 与 Gamma 函数 $\Gamma(S)$ 的关系 | 449 |
| *四、余元公式                                        | 449 |
| 五、Euler 积分应用举例                                 | 451 |
| 习题三                                            | 454 |

## 第十四章 重积分

|                  |     |
|------------------|-----|
| §14.1 二重积分的概念和性质 | 456 |
| 一、两个典型问题         | 456 |
| 二、二重积分的概念        | 459 |
| 三、二重积分的性质        | 461 |
| 习题一              | 464 |
| §14.2 二重积分的计算    | 465 |
| 一、直角坐标系中二重积分的计算  | 465 |
| 二、用极坐标计算二重积分     | 476 |
| 三、二重积分的一般变量替换    | 481 |
| 习题二              | 488 |
| §14.3 三重积分的概念与计算 | 493 |
| 一、三重积分的概念        | 493 |
| 二、直角坐标系中三重积分的计算  | 495 |
| 习题三              | 500 |
| §14.4 三重积分的变量替换  | 501 |
| 一、一般换元公式         | 501 |
| 二、柱面坐标变换         | 502 |
| 三、球面坐标变换         | 504 |
| 习题四              | 508 |
| §14.5 重积分的应用     | 511 |
| 一、曲面的面积          | 511 |
| 二、重积分在物理中的应用举例   | 514 |

|             |     |
|-------------|-----|
| 习题五         | 520 |
| §14.6 广义重积分 | 522 |
| 习题六         | 526 |

## 第十五章 曲线积分、曲面积分和场论初步

|                             |     |
|-----------------------------|-----|
| §15.1 对弧长的曲线积分              | 528 |
| 一、对弧长的曲线积分的概念               | 528 |
| 二、对弧长的曲线积分的计算               | 530 |
| 习题一                         | 534 |
| §15.2 对坐标的曲线积分              | 536 |
| 一、对坐标的曲线积分的概念               | 536 |
| 二、对坐标的曲线积分的计算               | 540 |
| 三、两类曲线积分的关系                 | 545 |
| 习题二                         | 546 |
| §15.3 格林公式                  | 547 |
| 习题三                         | 555 |
| §15.4 平面曲线积分与路径无关的条件        | 557 |
| 习题四                         | 564 |
| §15.5 对面积的曲面积分              | 567 |
| 一、对面积的曲面积分的概念               | 567 |
| 二、对面积的曲面积分的计算               | 568 |
| 习题五                         | 572 |
| §15.6 对坐标的曲面积分              | 574 |
| 一、曲面侧的概念                    | 574 |
| 二、对坐标的曲面积分的概念               | 575 |
| 三、对坐标的曲面积分的计算               | 579 |
| 四、两类曲面积分的关系                 | 585 |
| 习题六                         | 585 |
| §15.7 奥高公式                  | 587 |
| 习题七                         | 594 |
| §15.8 斯托克斯公式、空间曲线积分与路径无关的条件 | 596 |

|                       |     |
|-----------------------|-----|
| 一、斯托克斯公式.....         | 596 |
| 二、空间曲线积分与路径无关的条件..... | 602 |
| 习题八.....              | 604 |
| §15.9 场论初步.....       | 605 |
| 一、场的概念.....           | 605 |
| 二、数量场的等值面与梯度.....     | 606 |
| 三、向量场的通量与散度.....      | 609 |
| 四、向量场的环量与旋度.....      | 613 |
| 五、管量场与势量场.....        | 616 |
| 六、算子 $\nabla$ .....   | 619 |
| 习题九.....              | 620 |
| 参考数目.....             | 623 |
| 习题答案.....             | 624 |

## 第九章 无穷级数

在历史上,很早以前无穷级数就成为数值计算的工具,把它用来计算和表达各种各样的量。例如

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \dots,$$

$$\pi = 2\sqrt{3} \left( 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^2} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3^3} + \dots \right).$$

无穷级数还是一种描述函数与构造新函数的重要工具。远在17世纪,牛顿就用待定系数法求出微分方程

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{a-x}$$

关于  $x$  的幂的形成的解为

$$y = x + \frac{x^2}{2a} + \frac{x^3}{2a^2} + \dots,$$

并将反正弦函数  $\arcsin x$  表示成

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \dots.$$

同一时期,格里哥利(J. Gregory)也得出了  $\operatorname{tg} x$ 、 $\sec x$  及  $\operatorname{arctg} x$  的表达式:

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots,$$

$$\sec x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \dots,$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots.$$

它们都是无穷多个幂函数的叠加,这便是幂级数的基础。1807年,富里哀(J. Fourier)又发现了一个令人惊奇的事实:任何分段

光滑曲线弧组成的周期函数，都可以表示成无穷多个正弦函数与余弦函数的叠加：

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

这便是富里哀级数的由来。幂级数与富里哀级数的项都是函数，这又引起对一般函数项级数的研究。从19世纪起，无穷级数就逐渐构成了数学分析的一个重要组成部分。

## § 9.1 数值级数的基本问题

### 一、基本概念

**定义 1** 设  $\{a_n\}$  是一个给定的无穷数列：

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

则称无穷个数相加的形式

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

为**无穷级数**，简称**级数**。其中各相加的数称为级数的**项**，而  $a_n$  称为级数的**通项**或**一般项**。

我们知道，初等代数的四则运算都只能进行有限次，而这里却是无穷和式。那末，无穷个数如何相加呢？这就又一次要借助于极限工具。我们先从一个简单的例子谈起。计算等比级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} + \dots \quad (|r| < 1)$$

的“和”。我们已经知道，此级数的前  $n$  项和

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} r^k = \frac{1-r^n}{1-r},$$

$n$  越大，相加的项越多， $n$  无限变大，便是无穷项相加。如果当

$n \rightarrow \infty$  时,  $S_n$  的极限存在, 很自然地, 就把这个极限定义为等比级数的和。这里,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1-r} \quad (|r| < 1).$$

因此有

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \quad (|r| < 1).$$

对于一般的级数, 作如下规定。

**定义 2** 无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \quad (1)$$

的前  $n$  项和

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

称为级数 (1) 的前  $n$  项部分和; 如果这些部分和构成的数列

$$\{S_n\}: S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$$

存在有限的极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ , 则称级数 (1) 收敛, 并称  $S$  为级数的和, 记作

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

如果极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  不存在, 则称级数发散。这时级数也就没有和。

当级数收敛时, 又称

$$r_n = S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$$

为级数的余和或余项。

**例 1** 讨论等比级数  $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$  的敛散性。

**解** 若  $a=0$ , 显然级数收敛. 若  $a \neq 0$ , 则级数的敛散性取决于  $r$ . 当  $|r| \neq 1$  时, 前  $n$  项部分和

$$S_n = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}.$$

从而,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r} = \begin{cases} \frac{a}{1-r}, & \text{当 } |r| < 1 \text{ 时}; \\ \infty, & \text{当 } |r| > 1 \text{ 时}. \end{cases}$$

所以, 此级数当  $|r| < 1$  时收敛, 当  $|r| > 1$  时发散.

当  $r=1$  时,  $S_n = na \rightarrow \infty$ , 级数发散; 而当  $r=-1$  时,

$$S_n = a - a + a - a + \cdots + (-1)^{n-1}a = \begin{cases} a, & \text{当 } n \text{ 为奇数} \\ 0, & \text{当 } n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  不存在, 因此级数发散. 总之, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$  当  $|r| < 1$

时收敛, 当  $|r| \geq 1$  时发散.

**例 2** 考虑级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  的敛散性.

由于此级数的通项可写成两项之差

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

故可算出前  $n$  项部分和

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1.$$

这说明, 此级数收敛, 且级数的和为 1.

**例 3** 考察级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$  的敛散性。

因为  $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n$ , 所以

$$S_n = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1).$$

而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = +\infty,$$

故知此级数发散。这时, 我们亦说级数的和为无穷大。

## 二、级数的收敛条件

从定义可知, 每个无穷级数都可作成一部分和数列, 级数的敛散性就取决于部分和数列的极限是否存在。另一方面, 对于任何数列  $\{S_n\}$ , 只要令

$$a_1 = S_1, a_2 = S_2 - S_1, \dots, a_n = S_n - S_{n-1}, \dots$$

那末, 数列  $\{S_n\}$  的极限是否存在, 就可转化为研究级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的

敛散性。这就是说, 级数与数列是相互关联的。因此, 关于级数的一般理论, 可以从数列的极限理论直接推得。

**定理 1** 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛的必要条件是  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

**证明** 设  $S_n$  为级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的前  $n$  项部分和, 则有关系式

$$a_n = S_n - S_{n-1} \quad (n=2, 3, \dots),$$

因为级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 故极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$  存在, 从而也有  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S$ 。于是得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

本定理的条件是不充分的。例如，调和级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2}$

$+ \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ ，尽管  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ ，但是由于级数的前  $2^k$  项部分和

$$\begin{aligned} S_{2^k} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots \\ &\quad + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}+2^{k-1}}\right) \\ &> \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \end{aligned}$$

$$+ \cdots + \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) = \frac{k}{2}$$

所以  $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{2^k} = +\infty$ ，这说明  $\{S_n\}$  有一子列  $\{S_{2^k}\}$  发散，因而  $\{S_n\}$

发散。故调和级数发散。

定理 1 说明，假如  $a_n \not\rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ ，即可断定  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散。

例 4 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$  发散，这是因为极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$$

不存在。

例 5 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$  发散，这是因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n} = 1 \neq 0$$

的缘故。

定理 2 (级数的 Cauchy 准则) 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛的充分必要