数学分析教程

吉联芳　宋柏生　罗庆来　编著

下册

东南大学出版社

数学分析教程

下 册

吉联芳　宋柏生　罗庆来　编

东 南 大 学 出 版 社

(苏)新登字第012号

内 容 简 介

本书是为高等工科院校高等数学提高班及对数学要求较高的专业而编写的，分上、下两册。上册内容包括：函数、极限、连续、导数与微分、微分学基本定理及其应用、不定积分、定积分及其应用等；下册内容包括：级数、常微分方程、空间解析几何、多元函数微分学、含参变量积分、多元函数积分学及场论等。

本书内容编排循序渐进，论证严谨，例题丰富，习题类型多样，书末附有习题答案。

本书可作为高等工科院校师生的教学参考书，也可供工程技术人员及报考高等院校研究生的读者作为参考用书。

责任编辑　徐步政

数学分析教程
下　册
吉联芳　宋柏生　罗庆来　编

东南大学出版社出版发行
南京四牌楼2号
东南大学印刷厂印刷
开本 850×1168 毫米1/32 印张 21.5 字数 559 千字
1992年2月第1版　1992年2月第1次印刷
印数：1—1200册

ISBN 7-81023-587-7

O·57　定价：9.25元

目　录

第九章　无穷级数

在历史上，很早以前无穷级数就成为数值计算的工具，把它用来计算和表达各种各样的量。例如

$$\sqrt{2}=1+\frac{4}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{4}{10^3}+\frac{2}{10^4}+\cdots,$$

$$\pi=2\sqrt{3}\left(1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^2}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^3}+\cdots\right).$$

无穷级数还是一种描述函数与构造新函数的重要工具。远在17世纪，牛顿就用待定系数法求出微分方程

$$\frac{dy}{dx}=1+\frac{y}{a-x}$$

关于 x 的幂的形成的解为

$$y=x+\frac{x^2}{2a}+\frac{x^3}{2a^2}+\cdots,$$

并将反正弦函数 $\arcsin x$ 表示成

$$\arcsin x=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\frac{5}{112}x^7+\cdots.$$

同一时期，格里哥利(J. Gregory)也得出了 $\operatorname{tg} x$、$\sec x$ 及 $\operatorname{arc\,tg} x$ 的表达式：

$$\operatorname{tg}x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\cdots,$$

$$\sec x=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+\frac{61}{720}x^6+\cdots,$$

$$\operatorname{arc\,tg}x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\cdots.$$

它们都是无穷多个幂函数的叠加，这便是幂级数的基础。1807年，富里衷（J. Fourier）又发现了一个令人惊奇的事实：任何分段

光滑曲线弧组成的周期函数，都可以表示成无穷多个正弦函数与余弦函数的叠加：

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

这便是富里哀级数的由来。幂级数与富里哀级数的项都是函数，这又引起对一般函数项级数的研究。从19世纪起，无穷级数就逐渐构成了数学分析的一个重要组成部分。

§9.1 数值级数的基本问题

一、基本概念

定义 1 设$\{a_n\}$是一个给定的无穷数列：

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots.$$

则称无穷个数相加的形式

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots\overset{\text{记}}{=}\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

为**无穷级数**，简称**级数**。其中各相加的数称为级数的**项**，而a_n称为级数的**通项**或**一般项**。

我们知道，初等代数的四则运算都只能进行有限次，而这里却是无穷和式。那末，无穷个数如何相加呢？这就又一次要借助于极限工具。我们先从一个简单的例子谈起。计算等比级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}r^{n-1}=1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}+\cdots\quad(|r|<1)$$

的“和”。我们已经知道，此级数的前n项和

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}r^k=\frac{1-r^n}{1-r},$$

n越大，相加的项越多，n无限变大，便是无穷项相加。如果当

$n\to\infty$时，S_n 的极限存在，很自然地，就把这个极限定义为等比级数的和。这里，

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-r} \quad (|r|<1).$$

因此有

$$1+r+r^2+\cdots r^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty} r^n=\frac{1}{1-r} \quad (|r|<1).$$

对于一般的级数，作如下规定。

定义 2 无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots \tag{1}$$

的前 n 项和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1+a_2+\cdots+a_n,$$

称为级数（1）的**前 n 项部分和**；如果这些部分和构成的数列

$$\{S_n\}: S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$$

存在有限的极限$\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S$，则称级数（1）**收敛**，并称$S$为**级数的和**，记作

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

如果极限$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$不存在，则称级数**发散**。这时级数也就没有和。

当级数收敛时，又称

$$r_n=S-S_n=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots$$

为级数的**余和**或**余项**。

例 1 讨论等比级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$的敛散性。

解 若$a=0$，显然级数收敛。若$a\neq 0$，则级数的敛散性取决于 r．当$|r|\neq 1$时，前 n 项部分和

$$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

从而，

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\begin{cases}\dfrac{a}{1-r}, & \text{当}|r|<1\text{时；}\\ \infty, & \text{当}|r|>1\text{时.}\end{cases}$$

所以，此级数当$|r|<1$时收敛，当$|r|>1$时发散。

当 $r=1$ 时，$S_n=na\to\infty$，级数发散；而当 $r=-1$ 时，

$$S_n=a-a+a-a+\cdots+(-1)^{n-1}a=\begin{cases}a, & \text{当 } n \text{ 为奇数}\\ 0, & \text{当 } n \text{ 为偶数}\end{cases}$$

极限$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$不存在，因此级数发散。总之，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$当$|r|<1$时收敛，当$|r|\geqslant 1$时发散。

例 2 考虑级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$的敛散性。

由于此级数的通项可写成两项之差

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

故可算出前 n 项部分和

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1},$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}S_n=1.$$

这说明，此级数收敛，且级数的和为 1。

例 3 考察级数$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$的敛散性。

因为 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(n+1)-\ln n$，所以

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\ln(n+1)-\ln 1=\ln(n+1).$$

而

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\ln(n+1)=+\infty,$$

故知此级数发散。这时，我们亦说级数的和为无穷大。

二、级数的收敛条件

从定义可知，每个无穷级数都可作成一个部分和数列，级数的敛散性就取决于部分和数列的极限是否存在。另一方面，对于任何数列$\{S_n\}$，只要令

$$a_1=S_1,\ a_2=S_2-S_1,\ \cdots,\ a_n=S_n-S_{n-1},\ \cdots$$

那末，数列$\{S_n\}$的极限是否存在，就可转化为研究级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的敛散性。这就是说，级数与数列是相互关联的。因此，关于级数的一般理论，可以从数列的极限理论直接推得。

定理 1 级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛的必要条件是$\lim_{n\to\infty}a_n=0$

证明 设S_n为级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的前 n 项部分和，则有关系式

$$a_n=S_n-S_{n-1}\quad (n=2,\ 3,\ \cdots),$$

因为级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，故极限$\lim_{n\to\infty}S_n=S$ 存在，从而也有$\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S$. 于是得到

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty} S_n-\lim_{n\to\infty} S_{n-1}=S-S=0。$$

本定理的条件是不充分的。例如，调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{n}+\cdots$，尽管$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，但是由于级数的前$2^k$项部分和

$$S_{2^k}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^{k-1}+2^{k-1}}\right)$$
$$>\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)$$
$$+\cdots+\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)=\frac{k}{2}$$

所以$\lim_{k\to\infty}S_{2^k}=+\infty$，这说明$\{S_n\}$有一子列$\{S_{2^k}\}$发散，因而$\{S_n\}$发散。故调和级数发散。

定理 1 说明，假如$a_n\not\to 0(n\to\infty)$，即可断定$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散。

例 4 级数$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$发散，这是因为极限

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(-1)^n$$

不存在。

例 5 级数$\sum_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{1}{n}$发散，这是因为

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{1}{n}=1\neq 0$$

的缘故。

定理 2 （级数的 Cauchy 准则）级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛的充分必要