

数学建模系列丛书

QUANGUO DAXUESHENG
SHUXUE JIANMO JINGSAI
SAITI YU YOUXIU LUNWEN PINGXI

全国大学生数学建模竞赛 赛题与优秀论文评析

(2005年—2011年 **B**题)

主编 姚泽清 郑旭东 赵颖



国防工业出版社

National Defense Industry Press

全国大学生数学建模竞赛 赛题与优秀论文评析

(2005年—2011年B题)

主 编	姚泽清	郑旭东	赵 颖			
副主编	刘守生	田作威	沈锦仁	郑 琴	滕加俊	
	史汉生	刘海峰	张 瑰	姚 奎	唐庆国	

国防工业出版社

·北京·

内 容 简 介

本书对2005年至2011年的全国大学生数学建模竞赛的赛题进行了评析,并逐一给出问题解答要点,同时从解放军理工大学获得全国一、二等奖的论文中精选了30篇优秀论文进行点评,评价其优劣,总结其得失。该校在这7年中参加国际、国内数学建模竞赛共获得国际一等奖10项,全国一等奖19项,产生了全国优秀论文3篇,全国优秀建模指导教师1人,并于2010年成功地举办了军队院校军事数学建模邀请赛。本书可作为本科生、专科生的“数学建模”课程的教学参考书,也可作为大学生、研究生参加国际数学建模竞赛、全国大学生数学建模竞赛和研究生数学建模竞赛的培训教材,还可作为从事复杂问题建模的工程技术人员建模的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

全国大学生数学建模竞赛赛题与优秀论文评析. 2005年—2011年 B 题 / 姚泽清, 郑旭东, 赵颖主编. —北京: 国防工业出版社, 2012. 5

ISBN 978-7-118-07506-9

I. ①全... II. ①姚... ②郑... ③赵... III. ①数学模型—竞赛—高等学校—教学参考资料 IV. ①O141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 221687 号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787 × 1092 1/16 印张 17 1/4 字数 399 千字

2012 年 5 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—4000 册 总定价 76.00 元

上册	45.00 元
下册	31.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)88540777

发行邮购:(010)88540776

发行传真:(010)88540755

发行业务:(010)88540717

数学建模系列丛书

编委会名单

主 编 金丰年 姚泽清 郑旭东
副主编 赵 颖 刘守生 田作威 沈锦仁
编 委 (以姓氏笔画为序)
王 璞 王岩青 毛自森 史汉生 刘希强
刘海峰 严榴香 苏慧琳 杨素娟 吴 欧
汪 鹏 张 瑰 张 燕 陆小庆 陈 蓓
郑 琴 俞 珊 姚 奎 徐 兵 徐丹丹
唐庆国 廖洪林 滕加俊 颜 超 颜 锋
戴 毅

前 言

进入 20 世纪,随着计算机技术的快速发展,数学以空前的广度和深度向自然科学、工程技术及管理科学等领域渗透,与之发生交叉与融合,数学思维对人类认识自然和改造自然起着越来越重要的作用,数学与计算机技术相结合而形成的数学技术已经成为当代高新技术的一个重要组成部分,而数学建模作为联系数学与实际问题的桥梁已成为数学科学向数学技术转化的主要途径。

数学发展史,就是一部人们不断发现问题和解决问题的历史。数学可以锻炼学生的思维,对学生在完成从应试到应用、从学生到学者、从知识到学识的转化过程,有着无可替代的作用。然而,由于传统教学模式的影响,长期以来我们的数学教育过于追求理论的完美和逻辑的严谨,使得生动的、充满活力的数学教学被淹没在大量枯燥的公式推导与理论证明之中,严重挫伤了学生的学习积极性,束缚了学生创新意识、创新精神和创新能力的发展。

1985 年,美国率先举办了数学建模竞赛(the Mathematical Contest in Modeling, MCM),旨在鼓励大学生运用数学知识参与解决实际问题的全过程,为改变这一状况提供了契机。1989 年,北京大学、清华大学、北京理工大学首次派队参加了美国的数学建模竞赛,数学建模作为一种全新的学习方式在国内悄然兴起。

1992 年,中国工业与应用数学学会举办了首届全国大学生数学建模联赛,1994 年转而为教育部高教司直接组织领导,并更名为全国大学生数学建模竞赛。数学建模活动的兴起,对提高学生的综合素质,培养学生的创新能力,起到了催化作用;数学建模活动的开展,推动了数学建模教学在全国各高校的迅速发展,推进了整个数学教学的改革。

数学建模活动在全国兴起后,原中国人民解放军空军气象学院、中国人民解放军通信工程学院就先后开设了数学建模课程,并分别在 1995 年和 1996 年获得了自己的第一个全国一等奖,中国人民解放军通信工程学院还因其突出的成绩成为 1997 年全国大学生数学建模竞赛颁奖大会的承办单位。1999 年中国人民解放军通信工程学院、工程兵工程学院和空军气象学院合并组建为解放军理工大学后,着眼培养高素质创新型人才,以实施“现代化教学工程”为牵引,以培养学员“战略眼光、科学思维方法、信息素养以及较强国际交流能力”为着力点,将数学建模活动的重点由成绩的获取转移到能力的培养上来,为培养创新型人才搭建实践平台,使学员的聪明才智和创造精神得到了充分发挥。

进入 21 世纪,解放军理工大学共获得全国大学生数学建模竞赛一等奖 28 项,二等奖 46 项,其中有 3 篇被评为全国优秀论文。2006 年,解放军理工大学首战国际数学建模竞

赛,就获得了一等奖 1 项;2007 年,再战跨学科建模竞赛(the Interdisciplinary Contest in Modeling, ICM),又获得了国际一等奖 2 项的好成绩,5 年来共获得国际一等奖 10 项、二等奖 11 项。2008 年,解放军理工大学的经验成果《开展数学建模活动,为培养创新型人才搭建实践平台》获军队级教学成果二等奖;2011 年,又成功举办了军队院校军事数学建模邀请赛,推动了数学建模活动在军队院校的广泛、深入开展。

为了总结解放军理工大学开展数学建模活动的经验,检验学员参加数学建模活动的成果,我们在大学和理学院首长的支持下,着手编写了这部数学建模系列丛书。作为丛书的第一部分,《全国大学生数学建模竞赛赛题与优秀论文评析》一书,邀请具有丰富实战经验的专家对 2005 年至 2011 年的赛题进行了评析,并逐一给出问题解答要点,同时从解放军理工大学获得全国一、二等奖的 51 篇论文中,精选了 30 篇优秀论文进行点评,评价其优劣,总结其得失,以期对后来者有所裨益。

鉴于全国大学生数学建模竞赛 A 题偏理论、B 题偏应用的特点,本书按 A、B 两题分两辑出版。本书可作为专科生、本科生《数学建模》课程的教学参考书,大学生、研究生参加国际数学建模竞赛、全国大学生数学建模竞赛和研究生数学建模竞赛的培训教材,以及从事复杂问题建模的工程技术人员建模指导书。

值本书出版之际,谨向解放军理工大学成立以来对数学建模活动的开展给予精心呵护与悉心指导的唐万年校长、张亚非校长、训练部张建军部长、政治部张华伟主任、校务部苏晓冰部长致以崇高的敬意,向多年来对数学建模活动的组织给予全力支持与大力帮助的大学训练部李建新副部长、费建芳副部长、周雷副部长表示诚挚的谢意,并借此机会向对解放军理工大学数学建模活动给予关心指导的解放军信息工程大学韩中庚教授、东南大学朱道元教授,以及曾经在解放军理工大学数学建模团队中工作过并做出重要贡献的汤光华、罗剑等同志表示衷心的感谢!

由于时间和水平所限,书中错漏之处在所难免,恳请各位专家学者和读者批评指正,信寄:lgdxxlxyzqy@yahoo.com.cn。

姚泽清

2012 年 1 月 11 日于南京

目 录

2005 年 B 题 DVD 在线租赁	(1)
DVD 在线租赁的经营管理(全国一等奖)	宋志军、姚善涛、许晓峰(3)
DVD 在线租赁的购买与分配(全国二等奖)	王力群、夏宏、褚事德(26)
DVD 在线租赁的数学模型(全国二等奖)	龚锋、李琢、莫峰(41)
2006 年 B 题 艾滋病疗法的评价及疗效的预测	(57)
艾滋病疗法的评价及疗效的预测的数学模型 (全国一等奖)	王浩淼、孙中芳、吉进喜(59)
艾滋病疗法的评价及疗效的预测(全国二等奖)	赵铜星、余恺、江勇(77)
艾滋病疗法的评价及疗效的预测(全国二等奖)	杨彦坡、吁青、赵博(93)
2007 年 B 题 乘公交,看奥运	(105)
公交线路选择的数学模型(全国一等奖)	李杰、黄科、李新鹏(107)
公交线路的自主查询系统(全国一等奖)	刘国辉、陈建、王英男(137)
公交线路模型研究和算法实现(全国二等奖)	朱亚松、王家宝、吴海佳(156)
2008 年 B 题 高等教育学费标准探讨	(172)
2009 年 B 题 眼科病床的合理安排	(174)
眼科病床的合理安排(全国一等奖)	童轶驹、王家星、任仕召(176)
2010 年 B 题 2010 年上海世博会影响力的定量评估	(205)
上海世博影响力评估模型(全国二等奖)	余从全、王磊、刘景玮(206)
2010 年上海世博会经济效应的定量评估(全国二等奖)	白文浩、马建伟、邸建勋(227)
2011 年 B 题 交巡警服务平台的设置与调度	(247)
交巡警服务平台的设置与调度模型(江苏省二等奖)	史纬恒、刘爽、寇雄伟(249)
附录 全国大学生数学建模竞赛历年赛题	(268)

2005 年 B 题 DVD 在线租赁

随着信息时代的到来,网络成为人们生活中越来越不可或缺的元素之一。许多网站利用其强大的资源和知名度,面向其会员群提供日益专业化和便捷化的服务。例如,音像制品的在线租赁就是一种可行的服务。这项服务充分发挥了网络的诸多优势,包括传播范围广泛、直达核心消费群、强烈的互动性、感官性强、成本相对低廉等,为顾客提供更为周到的服务。

考虑如下的在线 DVD 租赁问题。顾客缴纳一定数量的月费成为会员,订购 DVD 租赁服务。会员对哪些 DVD 有兴趣,只要在线提交订单,网站就会通过快递的方式尽可能满足要求。会员提交的订单包括多张 DVD,这些 DVD 是基于其偏爱程度排序的。网站会根据手头现有的 DVD 数量和会员的订单进行分发。每个会员每个月租赁次数不得超过 2 次,每次获得 3 张 DVD。会员看完 3 张 DVD 之后,只需要将 DVD 放进网站提供的信封里寄回(邮费由网站承担),就可以继续下次租赁。请考虑以下问题:

(1) 网站正准备购买一些新的 DVD,通过问卷调查 1000 个会员,得到了愿意观看这些 DVD 的人数(表 1 给出了其中 5 种 DVD 的数据)。此外,历史数据显示,60% 的会员每月租赁 DVD 两次,而另外的 40% 只租一次。假设网站现有 10 万个会员,对表 1 中的每种 DVD 来说,应该至少准备多少张,才能保证希望看到该 DVD 的会员中至少 50% 在一个月之内能够看到该 DVD? 如果要求保证在三个月内至少 95% 的会员能够看到该 DVD 呢?

(2) 表 2 列出了网站手上 100 种 DVD 的现有张数和当前需要处理的 1000 位会员的在线订单(数据格式示例见表 2,具体数据从 <http://mcm.edu.cn/mcm05/problems2005c.asp> 下载),如何对这些 DVD 进行分配,才能使会员获得最大的满意度? 请具体列出前 30 位会员(C0001 ~ C0030)分别获得哪些 DVD。

(3) 继续考虑表 2,并假设表 2 中 DVD 的现有数量全部为 0。如果你是网站经营管理人员,你如何决定每种 DVD 的购买量,以及如何对这些 DVD 进行分配,才能使一个月内 95% 的会员得到他想看的 DVD,并且满意度最大?

(4) 如果你是网站经营管理人员,你觉得在 DVD 的需求预测、购买和分配中还有哪些重要问题值得研究? 请明确提出你的问题,并尝试建立相应的数学模型。

表 1 对 1000 个会员调查的部分结果

DVD 名称	DVD1	DVD2	DVD3	DVD4	DVD5
愿意观看的人数	200	100	50	25	10

表 2 现有 DVD 张数和当前需要处理的会员的在线订单(表格格式示例)

DVD 编号	D001	D002	D003	D004	...
DVD 现有数量	10	40	15	20	...

(续)

DVD 编号		D001	D002	D003	D004	...
会员在线订单	C0001	6	0	0	0	...
	C0002	0	0	0	0	...
	C0003	0	0	0	3	...
	C0004	0	0	0	0	...
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

注: D001 ~ D100 表示 100 种 DVD, C0001 ~ C1000 表示 1000 个会员, 会员的在线订单用数字 1, 2, ... 表示, 数字越小表示会员的偏爱程度越高, 数字 0 表示对应的 DVD 当前不在会员的在线订单中

【试题评析】

刘守生

本题的背景是 DVD 在线租赁业务, 网上在线租赁能够实现 DVD 的双重利用, 对于商家和客户都是有利可图的选择。然而对于商家而言, 购买多少数量的 DVD 以实现效用的最大化和成本的最小化, 如何在客户满意和利润最大化之间做出合理的选择, 都是本题所要解决的问题。该题的特点是海量数据、结构复杂, 综合性、实用性和开放性强, 算法要求强。采用的主要方法有概率统计、大规模随机整数规划(线性或非线性)、网络优化、随机决策分析等。

【问题解答要点】

本题的四个问题均为最优化问题, 规划模型是主打模型, 但是各问的约束条件均不相同。在问题一中, 如何估计希望观看某 DVD 片人数的概率分布, 以及如何处理每月可租两次数的情况是建立和求解模型的关键。碟片的重复使用率与需要租赁两次 DVD 的会员的关系也是需解决的问题; 问题二是求解一种 DVD 分配方案, 使会员的总体满意度最大。利用会员对各类 DVD 的偏爱程度定义合理的满意度函数可为优化模型的建立提供方便; 问题三考虑即使会员的满意度较大, 又使网站的成本较低的 DVD 采购方案, 表面上看是问题一和问题二的综合, 其实际情况要比其综合还要复杂。在该问题中既要求出尽量满足会员需要的 DVD 数目, 同时还有对这些 DVD 进行分配使会员的满意度最大, 因此这是一个比较复杂的双目标规划问题。其求解方法也较多, 可以利用线性加权的方法把双目标规划转化为单目标规划来解, 也可以根据对实际问题的分析, 建立一个主次原则来求解模型; 问题四让参赛选手站在网站管理者的角度, 对于 DVD 在线租赁中的其他问题进行考虑, 可以从题目中提示的方面进行考虑, 并建立相应的模型。

DVD 在线租赁的经营管理

摘要

本文讨论的问题可归结为多决策变量的 0-1 规划问题。本文针对各个问题建立了三个模型;在求解问题一的模型中考虑了每个月租赁一次的会员和租赁两次的会员的比例关系,求得了满足题意的各种 DVD 的数目如下表所列:

$n=1$	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
$r=0.5$	6250	3125	1563	782	313
$n=3$	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
$r=0.95$	3959	1980	990	495	198

在求解问题二的模型中充分考虑了各个约束条件,利用专门求解规划数学软件 Lingo 进行编程计算,并根据解的情况对约束条件进行调整,并求得合乎要求的分配方案,其中前两个会员分得的 DVD 编号结果为: $d1[8,41,98]$, $d2[6,44,62]$ 。在求解问题三的模型中考虑了购买 DVD 数量最小和会员总体满意度最大两个目标,给出了满足某种规则下 DVD 的最小购买量 3195 张,并给出了在最小购买量下的一种可行分配方案。在文章的最后,按照问题四的要求给出了需求预测、购买等方面的数学模型和解答;分析了模型的优缺点;给出了模型的若干改进,使模型趋于完善。

1 问题的重述

随着信息时代的到来,网络成为人们生活中越来越不可或缺的元素之一。许多网站利用其强大的资源和知名度,面向其会员群提供日益专业化和便捷化的服务。例如,音像制品的在线租赁就是一种可行的服务。这项服务充分发挥了网络的诸多优势,包括传播范围广泛、直达核心消费群、强烈的互动性、感官性强、成本相对低廉等,为顾客提供更为周到的服务。

考虑如下的在线 DVD 租赁问题。顾客缴纳一定数量的月费成为会员,订购 DVD 租赁服务。会员对哪些 DVD 有兴趣,只要在线提交订单,网站就会通过快递的方式尽可能满足要求。会员提交的订单包括多张 DVD,这些 DVD 是基于其偏爱程度排序的。网站会根据手头现有的 DVD 数量和会员的订单进行分发。每个会员每个月租赁次数不得超过 2 次,每次获得 3 张 DVD。会员看完 3 张 DVD 之后,只需要将 DVD 放进网站提供的信封里寄回(邮费由网站承担),就可以继续下次租赁。请考虑以下问题:

(1) 网站正准备购买一些新的 DVD,通过问卷调查 1000 个会员,得到了愿意观看这

些 DVD 的人数(表 1 给出了其中 5 种 DVD 的数据)。此外,历史数据显示,60% 的会员每月租赁 DVD 两次,而另外的 40% 只租一次。假设网站现有 10 万个会员,对表 1 中的每种 DVD 来说,应该至少准备多少张,才能保证希望看到该 DVD 的会员中至少 50% 在一个月内能够看到该 DVD? 如果要求保证在三个月内至少 95% 的会员能够看到该 DVD 呢?

(2) 表 2 列出了网站手上 100 种 DVD 的现有张数和当前需要处理的 1000 位会员的在线订单(数据格式示例见表 2,具体数据从 <http://mcm.edu.cn/mcm05/problems2005c.asp> 下载),如何对这些 DVD 进行分配,才能使会员获得最大的满意度? 请具体列出前 30 位会员(C0001 ~ C0030)分别获得哪些 DVD。

(3) 继续考虑表 2,并假设表 2 中 DVD 的现有数量全部为 0。如果你是网站经营管理人员,你如何决定每种 DVD 的购买量,以及如何对这些 DVD 进行分配,才能使一个月内 95% 的会员得到他想看的 DVD,并且满意度最大?

(4) 如果你是网站经营管理人员,你觉得在 DVD 的需求预测、购买和分配中还有哪些重要问题值得研究? 请明确提出你的问题,并尝试建立相应的数学模型。

表 1 对 1000 个会员调查的部分结果

DVD 名称	DVD1	DVD2	DVD3	DVD4	DVD5
愿意观看的人数	200	100	50	25	10

表 2 现有 DVD 张数和当前需要处理的会员的在线订单(表格格式示例)

DVD 编号	D001	D002	D003	D004	...	
DVD 现有数量	10	40	15	20	...	
会员在线订单	C0001	6	0	0	0	...
	C0002	0	0	0	0	...
	C0003	0	0	0	3	...
	C0004	0	0	0	0	...
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

注: D001 ~ D100 表示 100 种 DVD, C0001 ~ C1000 表示 1000 个会员,会员的在线订单用数字 1, 2, ... 表示,数字越小表示会员的偏爱程度越高,数字 0 表示对应的 DVD 当前不在会员的在线订单中

2 问题的分析

本题是一个比较典型的整数规划方面的问题。

问题一是在一时间段内求解满足会员需要的最少 DVD 数目。从历史统计数据中可得:60% 的会员每月租赁 DVD 两次,而另外的 40% 每月只租一次。每次租赁前必须归还上一次租赁的 DVD,于是可以推出:每次月初租赁出去的 DVD 当中有 60% 还可以在当月租赁第二次。同时,假设那些每月只租赁一次的会员所租赁的 DVD 在当月中只能租赁一次。然后,就可建立整数规划模型求解。

问题二是求解一种 DVD 分配方案,使会员的总体满意度最大。从题目中可知各个会员对各种 DVD 需求的订单及其偏好排名,每次每个会员分得 3 张 DVD。该问题的目标是使总体满意度最大,所以首先定义满意度。于是就可建立整数规划(0-1 规划)模型,

而问题二的难点在于对模型的求解。因为模型中的决策变量太多,可尝试利用 Lingo 软件,并对约束条件进行处理,最终得到结果。

问题三表面上看是问题一和问题二的综合,其实际情况要比其综合还要复杂。在该问题中既要决策满足会员需要的 DVD 数目,同时还要对这些 DVD 进行分配使会员的满意度最大。本题的难点在于对 DVD 进行第二次分配时如何将概率应用于某一离散的个体身上。若只从题目本身出发,可以自行设计一种算法,运用该算法来实现目标;此外,还可以利用问题二和问题三使用相同的会员的订单的联系,在问题二所求结果的基础上,对其进行修改,使其满足确立的目标。

问题四让我们从更宽更广的角度,对于 DVD 在线租赁中的其他问题进行考虑,对于有必要者还要建立模型求解。可以从题目中提示的方面进行考虑,并建立相应的模型。

3 符号约定

- c_i :第 i 种 DVD 的数量;
- d_i :第 i 个会员;
- e_i :愿意看第 i 种 DVD 的会员数量;
- n_{ij} :第 i 个会员希望租赁第 j 种 DVD 的偏好排序号;
- m_i :第 i 种 DVD 出租的总碟次数;
- x_{ij} :第 i 个会员分得第 j 种 DVD 的数量;
- p_{ij} :第 i 个会员对分得第 j 种 DVD 的满意度。

4 模型的假设

- (1) 当月租赁的 DVD 在本月内归还。
- (2) 问卷调查的会员涵盖各领域,即题目中所给的数据具有代表性,是真实有效的。
- (3) DVD 可以无限期地反复使用。
- (4) DVD 在传送过程中不考虑邮寄时间。
- (5) 某张 DVD 若租赁给每个月只租赁一次的会员,则该月只能出租一次。
- (6) 每张 DVD 每个月最多租赁两次。

5 问题一的解答

5.1 问题一的模型准备

由假设和问题分析,可得在所有的会员中 60% 的会员每月租赁 DVD 两次,而另外的 40% 只租赁一次;所有会员必须在归还上次租赁的 DVD 后才能进行下次的租赁。所以在每个月的租赁过程中,租赁两次的会员必须要归还两次所租赁的 DVD,其中第一次所归还的 DVD 可在当月被发放给其他的会员,同时第二次租赁自己需要的 DVD。由假设 2 可认为统计数据的比例关系反映会员全体,结合表 1 则可得 10 万名会员中希望看

DVD1 ~ DVD5 会员人数 e_i , 见表 3。

表 3

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
20000	10000	5000	2500	1000

5.2 问题一模型的建立

由 5.1 中的准备, 在希望看到第 i 种 DVD 的会员中至少 r 在 n 个月内能够看到该 DVD 的情况下, 建立如下整数规划模型:

$$\begin{aligned} & \min e_i \\ \text{s. t. } & \begin{cases} m_i = n(0.4c_i + 2 \times 0.6c_i) \geq r \times e_i \\ c_i \in \text{正整数} \end{cases} \end{aligned}$$

其中约束条件: 希望看到第 i 种 DVD 的会员中至少 r 在 n 个月内能够看到该 DVD。

5.3 问题一的模型求解和结论

经过求解不等式并取其下界可得到:

$$c_i = \frac{re_i}{1.6n} \quad c_i \in \text{正整数}$$

于是当 $n=1, r=50\%$ 时, 可得到结果, 见表 4。

表 4

c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
6250	3125	1563	782	313

于是当 $n=3, r=95\%$ 时, 可得到结果, 见表 5。

表 5

c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
3959	1980	990	495	198

所以当 DVD1 ~ DVD5 的数量为表 4 中张数时, 能保证 50% 的会员在一个月中看到所希望看到的 DVD; 当 DVD1 ~ DVD5 的数量为表 5 中张数时, 能保证 95% 的会员在三个月内看到所希望看到的 DVD。

6 问题二的解答

6.1 问题二模型的建立

由问题分析和题意可知决策变量 x_{ij} :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & (\text{第 } j \text{ 种 DVD 分配给会员 } i) \quad (1 \leq i \leq 1000) \\ 0 & (\text{第 } j \text{ 种 DVD 不分配给会员 } i) \quad (1 \leq j \leq 100) \end{cases}$$

供应约束:

$$\sum_{i=1}^{1000} x_{ij} \leq c_j$$

需求约束:

$$\sum_{j=1}^{100} x_{ij} = 3$$

目标函数:

$$\max \sum_{i=1}^{1000} \sum_{j=1}^{100} p_{ij} x_{ij}$$

式中: p_{ij} 表示第 i 个会员分得第 j 种 DVD 的满意度。

于是可以建立如下 0-1 规划模型:

$$\max \sum_{i=1}^{1000} \sum_{j=1}^{100} p_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} \sum_{i=1}^{1000} x_{ij} \leq C_j \\ \sum_{j=1}^{100} x_{ij} = 3 \\ x_{ij} = \begin{cases} 1 & (\text{第 } j \text{ 种 DVD 分给会员 } i) \\ 0 & (\text{第 } j \text{ 种 DVD 不分给会员 } i) \end{cases} \end{cases}$$

6.2 模型的求解

在上述的 0-1 规划模型中,目标函数是要求会员的总满意度最大,因此确定满意度函数是求解此规划问题先行步骤。在求得满意度函数后,对于拥有如此多决策变量(1000 × 100 个变量)的 0-1 规划问题,可以运用专门求解规划问题的数学软件 Lingo,通过编写程序来进行求解。

1. 确定满意度函数

会员对收到的 DVD 的满意程度取决于该会员对这张 DVD 的偏好程度,即

$$P_{ij} = f(s_{ij})$$

式中: s_{ij} 为第 i 个会员对第 j 种 DVD 碟的偏好程度。

对租赁公司来说, s_{ij} 是一个等级偏好量,为使得满意度函数更好地反映实际情况,直接给等级评分并不是一种理想的方法。根据模糊集理论,大数原理和心理学^[1],可以假设人对客观物体的意识变化与物体实际的变化成正比。假定 S 代表人的意识, T 代表物体实际情况,则物体实际情况的变化率为 $\frac{\Delta T}{T}$ 。

根据上面假设可得

$$\Delta S = K \times \frac{\Delta T}{T}$$

即

$$dS = K \times \frac{dT}{T}$$

求解方程得

$$S = K \times \ln T \quad (1)$$

在人的大脑思考的过程中,评价的等级 $\text{rank}(I) \in \{A+, A, A-, B+, B, B-, \dots\}$, I 描述了客观情况的变化,假设:

$$T = f(I) = X \pm I$$

X 是一个未知量,根据式(1),有

$$S(I) = K \times \ln f(T) = K \times \ln(X \pm I) \quad (2)$$

假如 $S \in [0, 1]$, $I = 1, 2, 3, \dots, j, j+1$, 且

$$(1) I=1, S=1 \text{ 时, } K \times \ln(X \pm 1) = 1。$$

$$(2) I=j+1, S=0 \text{ 时, } K \times \ln[X \pm (j+1)] = 0。$$

解得

$$X = j + 2$$

$$K = \frac{1}{\ln(X-1)} = \frac{1}{\ln[(j+2)-1]}$$

令 $m = j + 2$, 则

$$S(I) = \frac{\ln(X-I)}{\ln(X-1)} = \frac{\ln(m-I)}{\ln(m-1)}$$

所以,当 $\text{rank}(I) = 10$ 时,则结果见表 6。

表 6

I	1	2	3	4	5
$S(I)$	100	96.03	91.63	86.72	81.15
I	6	7	8	9	10
$S(I)$	74.72	67.12	57.81	45.82	28.91

由此可得满意度函数为

$$P_{ij} = \begin{cases} 1 & S_{ij} = 1 \\ 0.9603 & S_{ij} = 2 \\ 0.9163 & S_{ij} = 3 \\ 0.8672 & S_{ij} = 4 \\ 0.8115 & S_{ij} = 5 \\ 0.7472 & S_{ij} = 6 \\ 0.6712 & S_{ij} = 7 \\ 0.5781 & S_{ij} = 8 \\ 0.4582 & S_{ij} = 9 \\ 0.2891 & S_{ij} = 10 \\ 0 & S_{ij} = 0 \end{cases}$$

2. 模型求解

编写程序 Lingol, 在内存至少为 2GB 的计算机上运行, 运行找不到适合条件的解, 这说明所建立的 0-1 规划模型的约束条件过于严格而使得不存在可行解; 因此, 修改模型

中的需求约束,使得

$$\sum_{j=1}^{100} x_{ij} \leq 3$$

编写程序 Lingo2, 求解出使得总体满意度最大的分配方案(见附录)。表 7 列出了前 30 个会员获得的 DVD 的编号及其偏好情况。

表 7

会员编号	获得的 DVD		获得的 DVD		获得的 DVD	
	DVD 编号	会员偏好	DVD 编号	会员偏好	DVD 编号	会员偏好
1	8	1	41	7	98	3
2	6	1	44	2	62	4
3	32	4	50	2	80	1
4	7	1	18	2	41	3
5	11	3	66	1	68	2
6	19	1	53	2	66	4
7	26	3	66	6	81	1
8	31	4	35	5	71	1
9	53	1	78	3	100	2
10	41	6	55	2	85	3
11	59	1	63	2	66	4
12	2	2	31	1	41	7
13	21	3	78	2	96	1
14	23	2	52	1	89	6
15	13	1	52	4	85	3
16	10	4	84	1	97	2
17	47	2	51	3	67	1
18	41	1	60	2	78	3
19	66	4	84	1	86	2
20	45	1	61	3	89	2
21	45	2	50	5	53	1
22	38	3	55	2	57	1
23	29	2	81	3	95	1
24	37	4	41	2	76	1
25	9	1	69	2	94	3
26	22	1	68	2	95	3
27	50	4	58	1	78	7
28	8	1	34	2	82	3
29	26	4	30	2	55	1
30	37	2	62	1	98	5

6.3 模型结果分析

通过对运行结果的统计,最优 DVD 分配方案分别满足各偏好度的次数见表 8。

表 8

偏好度	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
满足次数	846	763	622	356	166	82	72	60	13	12

总满意度 = 274.58

7 问题三的解答

7.1 问题三模型的建立

进一步假设 DVD 的现有数量全部为 0。

由题意可知决策变量 x_{ij} 和 y_j :

y_j 表示购买第 j 种碟的张数

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & (\text{第 } j \text{ 种 DVD 分配给会员 } i) \quad (1 \leq i \leq 1000) \\ 0 & (\text{第 } j \text{ 种 DVD 不分配给会员 } i) \quad (1 \leq j \leq 100) \end{cases}$$

约束条件:

$$\sum_{j=1}^{100} x_{ij} = 3$$

$$\sum_{i=1}^{1000} x_{ij} \leq y_j$$

考虑双目标函数:

$$\begin{aligned} \min & \sum_{j=1}^{100} y_j \\ \max & \sum_{i=1}^{1000} \sum_{j=1}^{100} p_{ij} x_{ij} \end{aligned}$$

于是可以建立如下规划模型:

$$\text{目标函数} \begin{cases} \min \sum_{i=1}^{100} y_j \\ \max \sum_{i=1}^{1000} \sum_{j=1}^{100} p_{ij} x_{ij} \end{cases}$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \sum_{i=1}^{1000} x_{ij} \leq y_j \\ \sum_{j=1}^{100} x_{ij} = 3 \\ x_{ij} = \begin{cases} 1 & (\text{第 } j \text{ 种 DVD 分配给会员 } i) \\ 0 & (\text{第 } j \text{ 种 DVD 不分配给会员 } i) \end{cases} \end{cases}$$

此模型是二层双目标整数规划模型,属于 NP 问题,目前尚无解决此类问题的方法,因此,考虑根据合理假设将模型进行转化。