高等院校函授教材

# 高等数学

## 中册

王锦华　裘慧君　刘颖超　编
葛锁网　审

华东工学院函授大学
一九八六年

# 引　言

本书是根据1981年12月审订的高等工业学校“高等数学函授教学大纲”（草案），并参考了1980年全国工科院校（四年制）所审订的“高等数学大纲”及1985年11月重庆会议制定的“高等数学教学基本要求”讨论稿编写的高等数学函授教材。由于函授教学的特点：大多数同志边工作，边学习，工作任务重，学习时间少，在学习中碰到疑难问题，不易向老师请教。这就决定了函授教材在编写上不同于一般大学教材。为了便于自学，尽可能减少读者在自学中的困难，本书采用讲课形式书写。不过分追求理论上的严密性，在文字叙述上力求通俗易懂。概念引入尽量从具体、形象入手，逐步深入，内容安排抓住重点。对于重点、难点的内容，着重分析，讲深讲透。为了使读者对所学内容易于理解，巩固所学知识，本书举有较多例题，并注重分析解题思路，注意一题多解，以便使读者开阔思路，对解题有所启发，逐步培养分析解决问题的能力。

本书在编写上还作了以下努力：

1　在每章开头，简要指出本章在整个高等数学中的地位和作用，重点、难点及要达到的基本要求，以使读者明确内容的主次，抓住重点，突破难点。

2　学习数学一定要做题，对基本运算要求熟练掌握。本书每节后都配有一定数量的习题（有答案），对于较难的习题附有题解。每章后有自我检查题（有题解），供读者自我检查用。

3　每章后安排有难度较大的综合例题和综合习题，供基础较好，有余力的读者学习。

4　本书中有（＊）的章节，教学中可以不作要求，读者也可以不看，供有余力的读者参考阅读。

本书分上、中、下三册，作为我院函授生高等数学的试用教材，对于工科院校的夜大、职大以及广大业余自学高等数学的读者也可作为教材或参考书使用。

由于编者水平有限，经验不足，书中错误和不足之处在所难免，希望广大读者在使用本书时，不吝指正，以便作进一步的修改。

本书由王锦华同志、裘慧君同志执笔，葛锁网同志审阅，刘颖超同志做了全部习题的解答。本书的编写得到了我院继续教育部、数学教研室有关同志的支持和帮助，在此表示感谢。

编者　　1986年元月

# 高等数学中册目录

# 第七章　不定积分

已知函数$y=f(x)$，求导数$y'=f'(x)$或微分 $dy=f'(x)dx$ 的运算称为微分法。本章讨论它的逆运算，即已知导函数 $y'=f'(x)$或微分 $dy=f'(x)dx$，求原来的函数$y=f(x)$的问题，这就是求不定积分问题，称为积分法。

**本章重点**　原函数与不定积分概念，换元积分法和分部积分法。

**本章目的要求**

1　正确理解原函数与不定积分概念。熟记基本积分表。

2　掌握用换元积分法和分部积分法求不定积分。

3　会求有理函数、简单三角函数有理式及无理函数的不定积分。

## §7.1　原函数与不定积分的概念

前面我们研究了函数的导数问题。但在实际问题中也经常会遇到相反的问题：求一个函数，使它的导数为一已知函数。例如,若已知质点在任意时刻 t 的运动速度$v(t)=kt$（k 为常数），求质点的运动规律。这个问题的实质是找一个函数 $s(t)$，使 $s'(t)=kt$。不难看出$\left(\frac{kt^2}{2}\right)'=kt$，但我们不能断言，所要找的路程函数$s(t)$就是$\frac{kt^2}{2}$，这是因为

$$\left(\frac{kt^2}{2}+1\right)'=kt,\quad \left(\frac{kt^2}{2}+\sqrt{2}\right)'=kt,\quad \cdots,\quad \left(\frac{kt^2}{2}+C\right)'=kt.$$

（其中 C 是任意一个常数）。我们不仅要问,究竟那个函数是我们所要求的路程函数呢？其次，我们还要问，路程函数是否一定能表示成$\frac{kt^2}{2}+C$的形式呢？或者说，是否还存在另外的函数，其导数也是 kt 呢？这些都是我们在本章所要讨论的问题。这是积分学中的第一类基本问题。

### 一　原函数概念

**定义1　设函数$f(x)$在区间X上有定义。如果存在函数$F(x)$，使对于区间X上每一点x都有：**

$$F'(x)=f(x)\quad （或dF(x)=f(x)dx),$$

**则称函数$F(x)$为$f(x)$在区间X上的一个原函数。**

例如　$(\sin x)'=\cos x$（$-\infty<x<+\infty$），所以$\sin x$是$\cos x$在（$-\infty$，$+\infty$）内的一个原函数。

$(\mathrm{arctg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ $(-\infty < x < +\infty)$，所以 $\mathrm{arctg}x$ 是 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的一个原函数。

**问题1** 是否任一个函数都有原函数？

**结论：如果函数 $f(x)$ 在区间 $X$ 上连续，则在区间 $X$ 上，$f(x)$ 的原函数一定存在**（证明见第八章）。

我们知道，初等函数在它的定义域上都是连续的，故**初等函数在它的定义域上原函数一定存在**。

**问题2** 若函数 $f(x)$ 的原函数存在，则其原函数有多少？

事实上，若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 $X$ 上的一个原函数，则 $F'(x)=f(x)$，于是 $(F(x)+C)'=f(x)$，故 $F(x)+C$（$C$ 为任意常数）也是 $f(x)$ 的原函数。

由此可见，若函数 $f(x)$ 在区间 $X$ 上存在原函数，则原函数一定有无穷多个。

**问题3** $F(x)+C$ 是否包括了 $f(x)$ 的一切原函数？即 $f(x)$ 的任何原函数是否都能表示成 $F(x)+C$ 的形式？

**定理** **若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 $X$ 上的一个原函数，则 $f(x)$ 的任一个原函数都可表示成 $F(x)+C$（$C$ 是任意常数）的形式。**

**证明** 因为 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$F'(x)=f(x).$$

又设 $\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 的任一个原函数，则根据定义1，

$$\varphi'(x)=f(x),$$

所以

$$[\varphi(x)-F(x)]'=\varphi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0.$$

故

$$\varphi(x)-F(x)=C \quad 即 \quad \varphi(x)=F(x)+C. \qquad 证毕。$$

上述定理说明，如果在某一区间上，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $F(x)+C$ 是 $f(x)$ 的原函数全体，为此，要找 $f(x)$ 的原函数全体，只须找到一个原函数就行。例如：

求 $2x$ 的原函数全体。

解 因为 $(x^2)'=2x$，所以 $x^2$ 是 $2x$ 的一个原函数，故 $2x$ 的原函数全体为 $x^2+C$（$C$ 为任意常数）。

## 二 不定积分概念

**定义2** **函数 $f(x)$ 的原函数全体叫做函数 $f(x)$ 的不定积分，记作**

$$\int f(x)dx.$$

**其中"$\int$"称为积分号；$f(x)$ 称为被积函数；$f(x)dx$ 称为被积表达式；$x$ 称为积分变量。**

例如，因为 $(x^2)'=2x$，所以 $\int 2xdx=x^2+C$.

因为 $(\sin x)'=\cos x$，所以 $\int \cos xdx=\sin x+C$.

因为 $\left(\frac{1}{3}x^3\right)'=x^2$，所以 $\int x^2\,dx=\frac{1}{3}x^3+C$。

必须注意：积分号“$\int$”是一种运算符号，它表示要求被积函数的全体原函数。

## 三　不定积分的几何意义

$f(x)$的一个原函数$F(x)$的图形叫做函数$f(x)$的**积分曲线**，其方程是 $y=F(x)$。注意到 $F'(x)=f(x)$，所以，在积分曲线$y=F(x)$上点$(x,F(x))$处的切线斜率，恰好等于函数$f(x)$在点$x$处的函数值。

不定积分$\int f(x)dx=F(x)+C$，在几何上表示一族曲线，叫做$f(x)$的**积分曲线族**。它可以通过平移积分曲线$y=F(x)$得到，其特点是在每一条积分曲线上横坐标相同的点处作切线，这些切线彼此平行（图7—1）。在求原函数的具体问题中，往往要从原函数全体中找出一个特殊的原函数，此时只须给出条件$F(x_0)=y_0$（即积分曲线应当通过的一点）即可。

**例1**　求通过点(2,5)，而它的切线斜率为$2x$的曲线。

**解**　设所求曲线为$y=F(x)$，根据题设条件，本题要求函数$2x$的一条过点(2,5)的积分曲线。

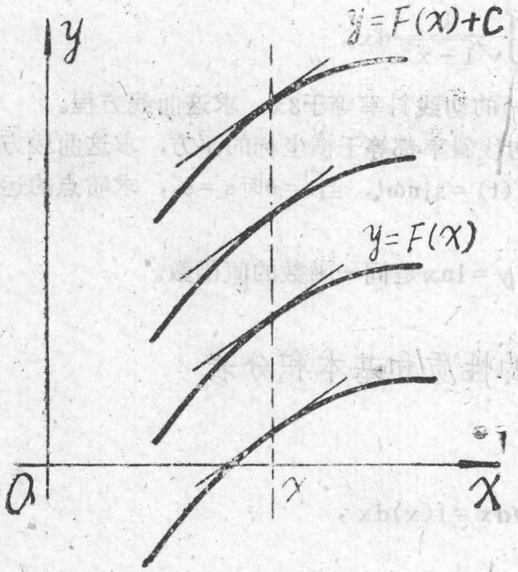


图7—1

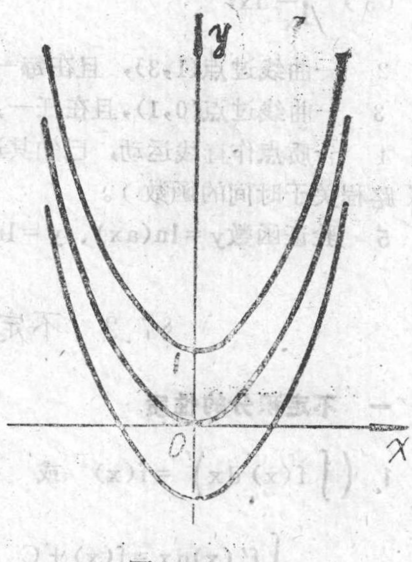


图7—2

因为　$(x^2)'=2x$，所以$2x$的积分曲线族为

$$y=x^2+C.$$

又所求积分曲线过点(2,5)，

故有　　　$5=4+C$。

解得$C=1$，所以所求曲线为（图7—2）

$$y=x^2+1.$$

**例2**　质量为m的质点，在重力作用下自由下落（设开始时速度为0），试求该质点运动

的速度函数。

**解** 由牛顿第二定律可知 $F=ma$，即 $m\frac{dv}{dt}=mg$，亦即

$$\frac{dv}{dt}=g.$$

根据题设条件可知，要求函数g的一个原函数 $v(t)$，且满足条件 $v(0)=0$。

函数g的原函数全体为 $gt+C$，由条件 $v(0)=0$，得 $C=0$，所以质点运动的速度函数为

$$v(t)=gt.$$

## 习　题7.1

1　求下列不定积分：

（1）$\int 1\cdot dx$；　　（2）$\int x\,dx$；

（3）$\int e^x dx$；　　（4）$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx$；

（5）$\int \frac{1}{x}dx$；　　（6）$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

2　一曲线过点(1,3)，且在每一点(x,y)的切线斜率等于3x，求这曲线方程。

3　一曲线过点(0,1)，且在任一点处的切线斜率都等于横坐标的平方，求这曲线方程。

4　一质点作直线运动，已知其速度为 $v(t)=\sin\omega t$，当 $t=0$ 时 $s=s_0$，求质点的运动规律（路程关于时间的函数）。

5　验证函数 $y=\ln(ax)$、$y=\ln x+b$、$y=\ln x$ 是同一函数的原函数。

## §7.2　不定积分的性质和基本积分表

### 一　不定积分的性质

**1** $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$　或　$d\int f(x)dx=f(x)dx$，

及

$$\int f'(x)dx=f(x)+C \quad 或 \quad \int df(x)=f(x)+C.$$

**即函数 $f(x)$ 先积分后微分，还原为原来的函数 $f(x)$；先微分后积分，则还原为原来的函数再加一个任意常数 $C$。**

事实上，根据不定积分定义：设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，即 $F'(x)=f(x)$，则

$$\left(\int f(x)dx\right)'=[F(x)+C]'=F'(x)=f(x)$$

即

$$\left(\int f(x)dx\right)'=f(x).$$

又显见 $f(x)$ 是 $f'(x)$ 的一个原函数，所以，

$$\int f'(x)dx = f(x) + C.$$

2 $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$

**证明** 要证等式成立，即要证等式右端函数的导数等于$f(x) \pm g(x)$即可。

因为 $\left[\int f(x)dx \pm \int g(x)dx\right]' = \left(\int f(x)dx\right)' \pm \left(\int g(x)\,dx\right)' = f(x) \pm g(x)$,

所以等式成立。

**推广 有限个函数代数和的积分等于各个函数积分的代数和，即**

$$\int\left[f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_n(x)\right]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \cdots \pm \int f_n(x)dx.$$

3 $\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)dx$（$k \neq 0$的常数）。

## 二 基本积分表

设$F(x)$是$f(x)$的一个原函数。根据不定积分定义可知

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

故由基本初等函数的导数公式，立即得到常用的基本积分公式，列表如下。

### 基本积分表

| 基本导数公式 | 基本积分公式 |
|---|---|
| $(C)' = 0$, | $\int 0 \cdot dx = C$; |
| $(x)' = 1$, | $\int 1 \cdot dx = x + C$; |
| $\left(\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\right)' = x^{\mu}$（$\mu \neq -1$）, | $\int x^{\mu}dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C$（$\mu \neq -1$）; |
| $(\ln\lvert x\rvert)' = \frac{1}{x}$, | $\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C$; |
| $(e^x)' = e^x$, | $\int e^x dx = e^x + C$; |
| $\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' = a^x$, | $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$; |
| $(-\cos x)' = \sin x$, $\int \sin x dx = -\cos x + c$ | $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$; |
| $(\sin x)' = \cos x$, | $\int \cos x\,dx = \sin x + C$; |
| $(\mathrm{tg}x)' = \sec^2 x$, | $\int \sec^2 x\,dx = \mathrm{tg}x + C$; |
| $(-\mathrm{ctg}x)' = \csc^2 x$, | $\int \csc^2 x\,dx = -\mathrm{ctg}x + C$, |

$x \neq 0$ $(-\infty, +\infty)$

$\ln|x|$ 当$x<0$时

$\ln(-x)' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)'$

$= \frac{1}{x}$

$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \int \sec^2 x dx = \mathrm{tg}x + c$

$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = \int \csc^2 x dx = -\mathrm{ctg}x + c$

$(\mathrm{arctg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $\qquad \displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}dx = \mathrm{arctg}x + C$;

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\qquad \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$; $= -\arccos x + C$

$(\mathrm{ch}x)' = \mathrm{sh}x$, $\qquad \displaystyle\int \mathrm{sh}x\,dx = \mathrm{ch}x + C$;

$(\mathrm{sh}x)' = \mathrm{ch}x$, $\qquad \displaystyle\int \mathrm{ch}x\,dx = \mathrm{sh}x + C$.

**例1** 求 $\displaystyle\int (x^3 + \sqrt[4]{x} + 3\sin x)dx$.

**解** $\displaystyle\int (x^3 + \sqrt[4]{x} + 3\sin x)\,dx = \int x^3\,dx + \int \sqrt[4]{x}\,dx + 3\int \sin x dx$

$$= \frac{1}{3+1}x^{3+1} + \frac{1}{\frac{1}{4}+1}x^{\frac{1}{4}+1} + 3(-\cos x) + C$$

$$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} - 3\cos x + C.$$

**例2** 求 $\displaystyle\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x}dx$.

**解** $\displaystyle\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x}dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + 1\right)dx$

$$= \ln|x| - 4\sqrt{x} + x + C.$$

**例3** 求 $\displaystyle\int 2\sin^2\frac{x}{2}dx$.

**解** $\displaystyle\int 2\sin^2\frac{x}{2}dx = \int (1-\cos x)\,dx = x - \sin x + C$.

**例4** 求 $\displaystyle\int \mathrm{tg}^2 x\,dx$.

**解** $\displaystyle\int \mathrm{tg}^2 x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)dx = \mathrm{tg}x - x + C$.

**例5** 求 $\displaystyle\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$.

**解** $\displaystyle\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx = \int \frac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x}dx$ $\qquad \int \sin x dx = -\cos x + C$

$$= \int\left(\frac{1}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int \sec^2 x dx + \frac{1}{2}\int dx$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{tg}x + \frac{1}{2}x + C.$$



$\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \int \sec^2 x dx = \mathrm{tg}x + C$

$\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = \int \csc^2 x dx = -\mathrm{ctg}x + C$

**例6** 求 $\int\frac{x^2}{x^2+1}dx$.

**解** $\int\frac{x^2}{x^2+1}dx=\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx=\int(1-\frac{1}{x^2+1})dx$

$$=x-\mathrm{arc\,tg}x+C.$$

**例7** 求 $\int\frac{x^4}{1+x^2}dx$

**解** $\int\frac{x^4}{1+x^2}dx=\int\frac{x^4-1+1}{1+x^2}dx$

$$=\int(x^2-1+\frac{1}{1+x^2})dx=\frac{x^3}{3}-x+\mathrm{arc\,tg}x+C.$$

## 习　题7.2

1　求下列不定积分：

(1) $\int x\sqrt{x}\,dx$;　　(2) $\int(2\sin x-3\sqrt[3]{x}-\frac{2}{x}-\frac{21}{x^2})dx$;

(3) $\int(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{3}{\sqrt{x}}-6e^x)dx$;　　(4) $\int(7\csc^2x+2\cos x-3\sec^2x)dx$;

(5) $\int(x-1)^3dx$;　　(6) $\int(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+\frac{4}{\sqrt{x^3}})dx$;

(7) $\int(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx$;　　(8) $\int\frac{x^2-2\sqrt{2}x+2}{x-\sqrt{2}}dx$;

(9) $\int\frac{dh}{\sqrt{2gh}}$;　　(10) $\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$;

(11) $\int\frac{3\cdot2^x-2\cdot3^x}{2^x}dx$;　　(12) $\int\frac{3x^2}{1+x^2}dx$;

(13) $\int\frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx$;　　(14) $\int3^x\cdot e^xdx$;

(15) $\int\frac{\cos2x}{\cos^2x\sin^2x}dx$;　　(16) $\int\frac{\cos2x}{\cos x-\sin x}dx$;

(17) $\int\mathrm{tg}^2x\,dx$;　　(18) $\int\frac{1}{\cos^2x\sin^2x}dx$;

(19) $\int\frac{(x-1)^3}{x^2}dx$;　　(20) $\int\frac{2x^2-4}{1+x^2}dx$;

$2\sin^2\frac{x}{2}=1-\cos x$

(21) $\int\frac{x^2-4}{x-2}dx$; $\quad$ $tg^2x(1+tgx)-(tgx+1)$ $\quad$ $\int(1+tg x^2)dx$ $\quad$ (22) $\int\frac{x^2-9}{x+3}dx$;

(23) $\int\frac{tg^3x+tg^2x-tgx-1}{tgx+1}dx$; $\quad$ (24) $\int\frac{1}{x^2(1+x^2)}dx$.

2 一物体作直线运动，已知加速度 $a(t)=12t^2-3\sin t$，且 $s(0)=-3$，$v(0)=5$.求

（1） 速度函数 $v(t)$；（2） 路程函数 $s(t)$.

$\int tg^2x\,dx+\int dx$ X

## §7.3 换元积分法

我们知道，利用基本积分表和积分性质，可以解决一些不定积分问题，但还很不够。例如，不定积分 $\int\cos 2x dx$, $\int(1+2x)^{100}dx$, $\int e^{-ax}dx$, $\int\frac{1}{\sqrt[3]{1+3x}}dx$ 等等，都无法用不定积分的性质和基本积分表解决。为此，本节介绍不定积分的换元积分法，它在积分的计算中所起的作用，相当于复合函数微分法在导数计算中所起的作用，为了说明换元积分法，我们先看几个例题。

**例1** 求 $\int\cos 2x\,dx$.

**解** 在基本积分表中只有 $\int\cos x\,dx=\sin x+C$.

为了求出这个积分，我们把它改写成

$$\int\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\int\cos 2x\,d(2x),$$

令 $2x=u$，把 $u$ 作为新的积分变量，利用基本积分表得

$$\int\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\int\cos u\,du=\frac{1}{2}\sin u+C.$$

再把 $u$ 换成 $2x$，得

$$\int\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\sin 2x+C.$$

不难验证，以上求得的 $\frac{1}{2}\sin 2x$ 确是 $\cos 2x$ 的原函数。

应当注意 $\int\cos 2x\,dx\neq\sin 2x+C$.

这是由于 $d(\sin 2x)=\cos 2x\,d(2x)$，所以必须把 $dx$ 变成 $\frac{1}{2}d(2x)$，把 $2x$ 看成中间变量，才能套用基本积分表。

**例2** 求 $\int(1+2x)^{100}dx$.

**解** 为了应用基本积分公式

$\cancel{① \int x^m f(ax^{m+1}+b)dx=\int}$

$$\int x^{\mu}\,dx=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C\quad(\mu\neq-1),$$

① $\int x^m f(ax^{m+1}+b)dx = \frac{1}{a(m+1)}$

$=\int\frac{1}{a(m+1)}\int f(ax^{m+1}+b)\,d(ax^{m+1}+b)$

我们把所求积分写成

$$\int(1+2x)^{100}dx=\frac{1}{2}\int(1+2x)^{100}d(1+2x).$$

$\int f(tgx)\frac{dx}{\cos^2 x}=\int f(tgx)\,dtgx$

令$1+2x=u$，于是

$$\int(1+2x)^{100}dx=\frac{1}{2}\int u^{100}du=\frac{1}{202}u^{101}+C.$$

$\overset{tgx=u}{=}\int f(u)\,du=\int tg^2x\,dtgx$

再把 $u$ 换成$1+2x$，得

$$\int(1+2x)^{100}dx=\frac{1}{202}(1+2x)^{101}+C.$$

以上两例所用的方法称为第一类换元积分法，简称**第一类换元法**。应用第一类换元法的关键在于选择一个适当的函数$\varphi(x)$作为新的积分变量$u$，使换元后的积分能直接利用基本积分表。

## 一　第一类换元法

下面我们叙述并证明第一类换元法。

**定理**　如果$\int f(u)du=F(u)+C$，**且** $u=\varphi(x)$**可导，则**

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=F[\varphi(x)]+C. \tag{7.1}$$

**证明**　由定理条件$\int f(u)du=F(u)+C$ 可知　$F'(u)=f(u)$

根据一阶微分形式不变性

$$dF[\varphi(x)]=dF(u)=F'(u)du=f(u)du=f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx.$$

所以

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=F[\varphi(x)]+C.$$

(7.1)式可以用公式

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=\int f(u)du=F(u)+C. \tag{7.2}$$

表达，其中$u=\varphi(x)$。这表明在计算不定积分时，如果被积表达式能表示成 $\varphi(x)$的复合函数 $f[\varphi(x)]$与 $\varphi(x)$ 的微分 $\varphi'(x)dx$ 的乘积，即有$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$ 的形式，则可令$u=\varphi(x)$，于是问题便归结为计算不定积分$\int f(u)du$。

**例3**　求下列不定积分：

（1）　$\int\frac{dx}{x+1}$；　　　　（2）　$\int\frac{3dx}{3x-1}$；

（3）　$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}$；　　　　（4）　$\int\sin\omega x\,dx$；

(5) $\int e^{-ax}dx$； (6) $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx\ (a>0)$；

(7) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\ (a>0)$.

解 (1) $\int \frac{dx}{x+1}=\int \frac{d(x+1)}{x+1}=\left[\int \frac{du}{u}\right]_{u=x+1}$

$$=[\ln|u|+C]_{u=x+1}=\ln|x+1|+C.$$

(2) $\int \frac{3dx}{3x-1}=\int \frac{d(3x-1)}{3x-1}=\left[\int \frac{du}{u}\right]_{u=3x-1}$

$$=[\ln|u|+C]_{u=3x-1}=\ln|3x-1|+C.$$

(3) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+3x}}=\frac{1}{3}\int (1+3x)^{-\frac{1}{3}}d(1+3x)=\left[\frac{1}{3}\int u^{-\frac{1}{3}}du\right]_{u=1+3x}$

$$=\left[\frac{1}{2}u^{\frac{2}{3}}+C\right]_{u=1+3x}=\frac{1}{2}(1+3x)^{\frac{2}{3}}+C.$$

(4) $\int \sin\omega x\,dx=\frac{1}{\omega}\int \sin\omega x\,d(\omega x)=\left[\frac{1}{\omega}\int \sin u\,du\right]_{u=\omega x}$

$$=\left[-\frac{1}{\omega}\cos u+C\right]_{u=\omega x}=-\frac{1}{\omega}\cos\omega x+C.$$

(5) $\int e^{-ax}dx=-\frac{1}{a}\int e^{-ax}d(-ax)=\left[-\frac{1}{a}\int e^{u}du\right]_{u=-ax}$

$$=\left[-\frac{1}{a}e^{u}+C\right]_{u=-ax}=-\frac{1}{a}e^{-ax}+C.$$

(6) $\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\left[\frac{1}{a}\int \frac{du}{1+u^2}\right]_{u=x/a}$

$$=\left[\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}u+C\right]_{u=x/a}=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+C.$$

(7) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\left[\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}\right]_{u=x/a}$

$$=\left[\arcsin u+C\right]_{u=x/a}=\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

**例3的七个例子，新变量u都是原积分变量x的线性函数，我们可以归结为如下公式：**