

高等院校函授教材

高等数学

中册

王锦华 裘慧君 刘颖超 编
葛锁网 审

华东工学院函授大学

一九八六年

引 言

本书是根据1981年12月审订的高等工业学校“高等数学函授教学大纲”(草案),并参考了1980年全国工科院校(四年制)所审订的“高等数学大纲”及1985年11月重庆会议制定的“高等数学教学基本要求”讨论稿编写的高等数学函授教材。由于函授教学的特点:大多数同志边工作,边学习,工作任务重,学习时间少,在学习中碰到疑难问题,不易向老师请教。这就决定了函授教材在编写上不同于一般大学教材。为了便于自学,尽可能减少读者在自学中的困难,本书采用讲课形式书写。不过分追求理论上的严密性,在文字叙述上力求通俗易懂。概念引入尽量从具体、形象入手,逐步深入,内容安排抓住重点。对于重点、难点的内容,着重分析,讲深讲透。为了使读者对所学内容易于理解,巩固所学知识,本书举有较多例题,并注重分析解题思路,注意一题多解,以便使读者开阔思路,对解题有所启发,逐步培养分析解决问题的能力。

本书在编写上还作了以下努力:

1 在每章开头,简要指出本章在整个高等数学中的地位 and 作用,重点、难点及要达到的基本要求,以使读者明确内容的主次,抓住重点,突破难点。

2 学习数学一定要做题,对基本运算要求熟练掌握。本书每节后都配有一定数量的习题(有答案),对于较难的习题附有题解。每章后有自我检查题(有题解),供读者自我检查用。

3 每章后安排有难度较大的综合例题和综合习题,供基础较好,有余力的读者学习。

4 本书中有(*)的章节, 教学中可以不作要求, 读者也可以不看, 供有余力的读者参考阅读。

本书分上、中、下三册, 作为我院函授生高等数学的试用教材, 对于工科院校的夜大、职大以及广大业余自学高等数学的读者也可作为教材或参考书使用。

由于编者水平有限, 经验不足, 书中错误和不足之处在所难免, 希望广大读者在使用本书时, 不吝指正, 以便作进一步的修改。

本书由王锦华同志、裘慧君同志执笔, 葛锁网同志审阅, 刘颖超同志做了全部习题的解答。本书的编写得到了我院继续教育部、数学教研室有关同志的支持和帮助, 在此表示感谢。

编者 1986年元月

高等数学中册目录

第七章 不定积分	1
§7.1 原函数与不定积分的概念	1
一、原函数概念(1) 二、不定积分概念(2)	
三、不定积分的几何意义(3) 习题7.1(4)	
§7.2 不定积分的性质和基本积分表	4
一、不定积分的性质(4) 二、基本积分表(5) 习题7.2(7)	
§7.3 换元积分法	8
一、第一类换元法(9) 二、第二类换元法(13) 习题7.3(16)	
§7.4 分部积分法	18
习题7.4(21)	
§7.5 不定积分举例	21
习题7.5(24)	
§7.6 有理函数积分法	25
一、有理函数(25) 二、有理函数的积分(28) 习题7.6(30)	
§7.7 三角函数有理式的积分	31
习题7.7(35)	
§7.8 简单无理函数的积分	36
一、形如 $\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$ 的积分(36)	
二、形如 $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ 的积分($a \neq 0$)(37)	
三、几点说明(40) 习题7.8(41)	
综合例题	41
综合习题(43) 自我检查题(43) 综合习题解答(44)	
自我检查题解答(44)	
不定积分一百题	46
不定积分一百题答案(49)	
第八章 定积分	53
§8.1 定积分概念	53
一、几个实例(53) 二、定积分定义(57)	
三、定积分的几何意义(60) 习题8.1(61)	

§8.2 定积分的性质	61
习题8.2(65)	
§8.3 牛顿——莱布尼兹公式	66
一、变上限的定积分——积分上限函数(66)	
例(67)	
二、可变速上限积分求导举	
三、牛顿——莱布尼兹公式(68)	
四、利用定积分求和的极限(69)	
习题8.3(70)	
§8.4 定积分换元法	71
一、定积分的换元积分法(71)	
二、利用换元积分法推出几个重要公式(71)	
习题8.4(76)	
§8.5 定积分的分部积分法	77
习题8.5(79)	
综合例题	79
综合习题(84)	
§8.6 广义积分	85
一、积分区间为无限的广义积分(86)	
二、被积函数有无穷不连续点的广义积分(88)	
习题8.6(90)	
§8.7 定积分的近似公式	91
一、矩形公式(91)	
二、梯形公式(91)	
三、抛物线公式(92)	
习题8.7(95)	
自我检查题(95)	
综合习题解答(96)	
自我检查题解答(100)	
定积分50题	102
定积分50题答案(104)	
第九章 定积分应用	105
§9.1 平面图形的面积	105
一、定积分的微元法(105)	
二、平面图形的面积(106)	
习题9.1(110)	
§9.2 体积	111
一、平行截面面积为已知的立体的体积(111)	
二、旋转体的体积(113)	
习题9.2(115)	
§9.3 曲线的弧长	115
一、曲线的弧长(115)	
*二、旋转体的侧面积(119)	
习题9.3(121)	
§9.4 定积分在物理、力学上的应用	122
一、功(122)	
二、引力(123)	
三、液体对侧压力(124)	
四、平均值(125)	
习题9.4(127)	
综合例题	127
综合习题(132)	
自我检查题(133)	
综合习题解答(133)	
自我检查题解答(135)	

第十章 向量代数	138
§10.1 空间点的直角坐标	138
一、点在轴上的投影(138) 二、空间直角坐标系(138)	
三、基本问题(140) 习题10.1(142)	
§10.2 向量概念; 向量的加法、减法、数量与向量的乘法	143
一、向量概念(143) 二、向量的加法(144) 三、向量的减法(145)	
四、数量与向量的乘法(146) 习题10.2(148)	
§10.3 向量的坐标	149
一、向量在轴上的投影(149) 二、向量的坐标(152)	
三、向量的运算(153) 四、向量的模、向量的方向余弦与方向数(154)	
习题10.3(156)	
§10.4 向量的数量积和向量积	157
一、向量的数量积(157) 二、向量的向量积(161)	
三、向量的混合积(165) 习题10.4(167)	
综合例题	168
综合习题(172) 自我检查题(173) 综合习题解答(173)	
自我检查题解答(176)	
第十一章 空间解析几何	178
§11.1 曲面与方程	178
一、曲面与方程(178) 二、几种常见的曲面方程(179) 习题11.1(183)	
§11.2 平面方程	183
一、平面的点法式方程(183) 二、平面的一般式方程(184) 三、平面的三点式及截距式方程(185)	
四、点到平面的距离(186) 五、空间两平面之间的夹角(187)	
习题11.2(188)	
§11.3 空间直线	189
一、空间直线方程(189) 二、空间两直线的夹角(192) 三、直线与平面的夹角(192)	
四、直线与平面的交点(193) 五、直线外一点到直线的距离(193)	
习题11.3(195)	
§11.4 空间曲线	196
一、空间曲线方程(196) 二、空间曲线在坐标面上的投影(197)	
三、空间曲线的参数方程(199) 习题11.4(200)	
§11.5 旋转曲面与锥面	200
一、旋转曲面(200) 二、锥面(202) 习题11.5(203)	
§11.6 用截面法讨论二、曲面的图形	204
一、椭圆抛物面(204) 二、椭球面(205) 三、单叶双曲面(206)	
四、双叶双曲面(207) 五、双曲抛物面(208) 六、椭圆锥面(210)	
习题11.6(210)	

综合例题	211
------------	-----

综合习题(217) 自我检查题(218) 综合习题解答(219)

自我检查题解答(225)

第十二章 多元函数微分法及其应用	229
------------------------	-----

§12.1 多元函数的基本概念	229
-----------------------	-----

一、多元函数概念(229) 二、二元函数的几何意义(233)

习题12.1(233)

§12.2 二元函数的极限及连续性	234
-------------------------	-----

一、二元函数的极限(234) 二、二元函数的连续性(236)

习题12.2(238)

§12.3 偏导数	238
-----------------	-----

一、偏导数概念(238) 二、偏导数的几何意义(240)

习题12.3(242)

§12.4 全微分	243
-----------------	-----

一、全增量与全微分概念(243) 二、全微分与近似计算(247)

习题12.4(247)

§12.5 复合函数的微分法	248
----------------------	-----

习题12.5(254)

§12.6 隐函数及其微分法	255
----------------------	-----

一、隐函数概念(255) 二、多元隐函数及其微分法(256) 三、由方程组确定的隐函数微分法(258)

习题12.6(261)

§12.7 偏导数在几何上的应用	263
------------------------	-----

一、空间曲线的切线及法平面(263) 二、曲面的切平面及法线(265)

习题12.7(268)

§12.8 高阶偏导数	269
-------------------	-----

习题12.8(273)

§12.9 多元函数的无条件极值	274
------------------------	-----

一、极值概念(275) 二、极值的必要条件(276) 三、极值的充分条件(277) 四、最大值与最小值(279) 习题12.9(282)

§12.10 条件极值 拉格朗日乘数法	283
---------------------------	-----

一、问题的提出(283) 二、条件极值的必要条件(283) 三、拉格朗日乘数法(285) 四、条件极值问题的推广(286)

习题12.10(288)

综合例题	288
------------	-----

综合习题(294) 自我检查题(295) 综合习题解答(295)

自我检查题解答(301)

习题答案	305
------------	-----

第七章 不定积分

已知函数 $y=f(x)$, 求导数 $y'=f'(x)$ 或微分 $dy=f'(x)dx$ 的运算称为微分法。本章讨论它的逆运算, 即已知导函数 $y'=f'(x)$ 或微分 $dy=f'(x)dx$, 求原来的函数 $y=f(x)$ 的问题, 这就是求不定积分问题, 称为积分法。

本章重点 原函数与不定积分概念; 换元积分法和分部积分法。

本章目的要求

- 1 正确理解原函数与不定积分概念。熟记基本积分表。
- 2 掌握用换元积分法和分部积分法求不定积分。
- 3 会求有理函数、简单三角函数有理式及无理函数的不定积分。

§7.1 原函数与不定积分的概念

前面我们研究了函数的导数问题。但在实际问题中也经常会遇到相反的问题: 求一个函数, 使它的导数为已知函数。例如, 若已知质点在任意时刻 t 的运动速度 $v(t)=kt$ (k 为常数), 求质点的运动规律。这个问题的实质是找一个函数 $s(t)$, 使 $s'(t)=kt$ 。不难看出

$\left(\frac{kt^2}{2}\right)' = kt$, 但我们不能断言, 所要找的路程函数 $s(t)$ 就是 $\frac{kt^2}{2}$, 这是因为

$$\left(\frac{kt^2}{2} + 1\right)' = kt, \quad \left(\frac{kt^2}{2} + \sqrt{2}\right)' = kt, \quad \dots, \quad \left(\frac{kt^2}{2} + C\right)' = kt.$$

(其中 C 是任意一个常数)。我们不仅要问, 究竟那个函数是我们所要求的路程函数呢? 其次, 我们还要问, 路程函数是否一定能表示成 $\frac{kt^2}{2} + C$ 的形式呢? 或者说, 是否还存在另外的函数, 其导数也是 kt 呢? 这些都是我们在本章所要讨论的问题。这是积分学中的第一类基本问题。

一 原函数概念

定义1 设函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义。如果存在函数 $F(x)$, 使对于区间 X 上每一点 x 都有:

$$F'(x) = f(x) \quad (\text{或 } dF(x) = f(x)dx),$$

则称函数 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 X 上的一个原函数。

例如 $(\sin x)' = \cos x$ ($-\infty < x < +\infty$), 所以 $\sin x$ 是 $\cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的一个原函数。

$(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (-\infty < x < +\infty)$, 所以 $\arctg x$ 是 $\frac{1}{1+x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的一个原函数。

问题1 是否任一个函数都有原函数?

结论: 如果函数 $f(x)$ 在区间 X 上连续, 则在区间 X 上, $f(x)$ 的原函数一定存在 (证明见第八章)。

我们知道, 初等函数在它的定义域上都是连续的, 故初等函数在它的定义域上原函数一定存在。

问题2 若函数 $f(x)$ 的原函数存在, 则其原函数有多少?

事实上, 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 X 上的一个原函数, 则 $F'(x) = f(x)$, 于是 $(F(x) + C)' = f(x)$, 故 $F(x) + C$ (C 为任意常数) 也是 $f(x)$ 的原函数。

由此可见, 若函数 $f(x)$ 在区间 X 上存在原函数, 则原函数一定有无穷多个。

问题3 $F(x) + C$ 是否包括了 $f(x)$ 的一切原函数? 即 $f(x)$ 的任何原函数是否都能表示成 $F(x) + C$ 的形式?

定理 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 X 上的一个原函数, 则 $f(x)$ 的任一个原函数都可表示成 $F(x) + C$ (C 是任意常数) 的形式。

证明 因为 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则

$$F'(x) = f(x).$$

又设 $\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 的任一个原函数, 则根据定义 1,

$$\varphi'(x) = f(x),$$

所以

$$[\varphi(x) - F(x)]' = \varphi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

故

$$\varphi(x) - F(x) = C \quad \text{即} \quad \varphi(x) = F(x) + C. \quad \text{证毕.}$$

上述定理说明, 如果在某一区间上, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $F(x) + C$ 是 $f(x)$ 的原函数全体, 为此, 要找 $f(x)$ 的原函数全体, 只须找到一个原函数就行。例如:

求 $2x$ 的原函数全体。

解 因为 $(x^2)' = 2x$, 所以 x^2 是 $2x$ 的一个原函数, 故 $2x$ 的原函数全体为 $x^2 + C$ (C 为任意常数)。

二 不定积分概念

定义2 函数 $f(x)$ 的原函数全体叫做函数 $f(x)$ 的不定积分, 记作

$$\int f(x) dx.$$

其中 “ $\int$ ” 称为积分号; $f(x)$ 称为被积函数; $f(x)dx$ 称为被积表达式; x 称为积分变量。

例如, 因为 $(x^2)' = 2x$, 所以 $\int 2x dx = x^2 + C$.

因为 $(\sin x)' = \cos x$, 所以 $\int \cos x dx = \sin x + C$.

因为 $(\frac{1}{3}x^3)' = x^2$, 所以 $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$.

必须注意: 积分号“ $\int$ ”是一种运算符号, 它表示要求被积函数的全体原函数。

三 不定积分的几何意义

$f(x)$ 的一个原函数 $F(x)$ 的图形叫做函数 $f(x)$ 的积分曲线, 其方程是 $y = F(x)$ 。注意到 $F'(x) = f(x)$, 所以, 在积分曲线 $y = F(x)$ 上点 $(x, F(x))$ 处的切线斜率, 恰好等于函数 $f(x)$ 在点 x 处的函数值。

不定积分 $\int f(x) dx = F(x) + C$, 在几何上表示一族曲线, 叫做 $f(x)$ 的积分曲线族。它可以通过平移积分曲线 $y = F(x)$ 得到。其特点是在每一条积分曲线上横坐标相同的点处作切线, 这些切线彼此平行 (图7-1)。在求原函数的具体问题中, 往往要从原函数全体中找出一个特殊的原函数, 此时只须给出条件 $F(x_0) = y_0$ (即积分曲线应当通过的一点) 即可。

例1 求通过点 $(2, 5)$, 而它的切线斜率为 $2x$ 的曲线。

解 设所求曲线为 $y = F(x)$, 根据题设条件, 本题要求函数 $2x$ 的一条过点 $(2, 5)$ 的积分曲线。

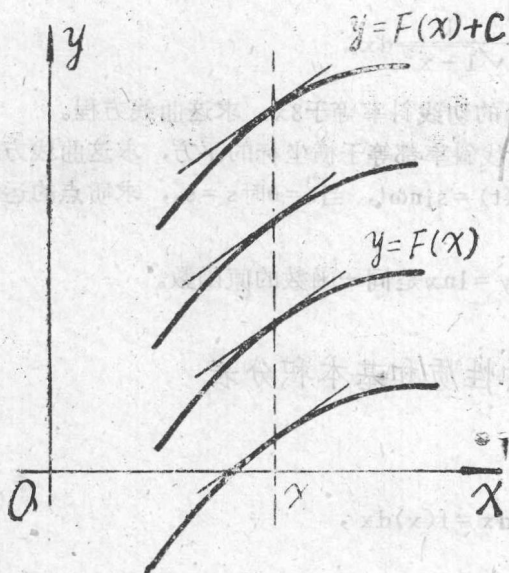


图7-1

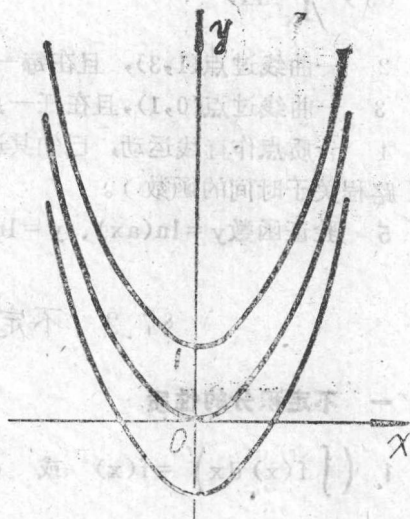


图7-2

因为 $(x^2)' = 2x$, 所以 $2x$ 的积分曲线族为

$$y = x^2 + C.$$

又所求积分曲线过点 $(2, 5)$,

故有

$$5 = 4 + C.$$

解得 $C = 1$, 所以所求曲线为 (图7-2)

$$y = x^2 + 1.$$

例2 质量为 m 的质点, 在重力作用下自由下落 (设开始时速度为0), 试求该质点运动

的速度函数。

解 由牛顿第二定律可知 $F = ma$, 即 $m \frac{dv}{dt} = mg$, 亦即

$$\frac{dv}{dt} = g.$$

根据题设条件可知, 要求函数 g 的一个原函数 $v(t)$, 且满足条件 $v(0) = 0$ 。

函数 g 的原函数全体为 $gt + C$, 由条件 $v(0) = 0$, 得 $C = 0$, 所以质点运动的速度函数为

$$v(t) = gt.$$

习 题 7.1

1 求下列不定积分:

(1) $\int 1 \cdot dx$;

(2) $\int x dx$;

(3) $\int e^x dx$;

(4) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$;

(5) $\int \frac{1}{x} dx$;

(6) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

2 一曲线过点 $(1, 3)$, 且在每一点 (x, y) 的切线斜率等于 $3x$, 求这曲线方程。

3 一曲线过点 $(0, 1)$, 且在任一点处的切线斜率都等于横坐标的平方, 求这曲线方程。

4 一质点作直线运动, 已知其速度为 $v(t) = \sin \omega t$, 当 $t = 0$ 时 $s = s_0$, 求质点的运动规律 (路程关于时间的函数)。

5 验证函数 $y = \ln(ax)$ 、 $y = \ln x + b$ 、 $y = \ln x$ 是同一函数的原函数。

§ 7.2 不定积分的性质和基本积分表

一 不定积分的性质

1 $\left(\int f(x) dx \right)' = f(x)$ 或 $d \int f(x) dx = f(x) dx$,

及

$$\int f'(x) dx = f(x) + C \quad \text{或} \quad \int df(x) = f(x) + C.$$

即函数 $f(x)$ 先积分后微分, 还原为原来的函数 $f(x)$; 先微分后积分, 则还原为原来的函数再加一个任意常数 C 。

事实上, 根据不定积分定义: 设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数, 即 $F'(x) = f(x)$, 则

$$\left(\int f(x) dx \right)' = [F(x) + C]' = F'(x) = f(x)$$

即

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x).$$

又显见 $f(x)$ 是 $f'(x)$ 的一个原函数, 所以,

$$\int f'(x) dx = f(x) + C.$$

$$2 \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

证明 要证等式成立，即要证等式右端函数的导数等于 $f(x) \pm g(x)$ 即可。

$$\text{因为 } \left[\int f(x) dx \pm \int g(x) dx \right]' = \left(\int f(x) dx \right)' \pm \left(\int g(x) dx \right)' = f(x) \pm g(x),$$

所以等式成立。

推广 有限个函数代数和的积分等于各个函数积分的代数和，即

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_n(x)] dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx \pm \cdots \pm \int f_n(x) dx.$$

$$3 \int k f(x) dx = k \int f(x) dx \quad (k \neq 0 \text{ 的常数}).$$

二 基本积分表

设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数。根据不定积分定义可知

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

故由基本初等函数的导数公式，立即得到常用的基本积分公式，列表如下。

基本积分表

基本导数公式

$$(C)' = 0,$$

$$(x)' = 1,$$

$$\left(\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} \right)' = x^{\mu} \quad (\mu \neq -1),$$

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x},$$

$$(e^x)' = e^x,$$

$$\left(\frac{a^x}{\ln a} \right)' = a^x,$$

$$(-\cos x)' = \sin x, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$(\sin x)' = \cos x,$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x,$$

$$(-\cot x)' = \csc^2 x,$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

基本积分公式

$$\int 0 \cdot dx = C,$$

$$\int 1 \cdot dx = x + C,$$

$$\int x^{\mu} dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1), \quad x \neq 0 \quad (-\infty, +\infty)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int e^x dx = e^x + C,$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C,$$

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C,$$

$$(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x + C,$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C; \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\arccos x + C$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x,$$

$$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C,$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x,$$

$$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$$

例1 求 $\int (x^3 + \sqrt{x} + 3\sin x) dx$.

解 $\int (x^3 + \sqrt{x} + 3\sin x) dx = \int x^3 dx + \int \sqrt{x} dx + 3 \int \sin x dx$

$$= \frac{1}{3+1} x^{3+1} + \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + 3(-\cos x) + C$$

$$= \frac{1}{4} x^4 + \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - 3\cos x + C.$$

例2 求 $\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x} dx$.

解 $\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + 1 \right) dx$

$$= \ln|x| - 4\sqrt{x} + x + C.$$

例3 求 $\int 2\sin^2 \frac{x}{2} dx$.

解 $\int 2\sin^2 \frac{x}{2} dx = \int (1 - \cos x) dx = x - \sin x + C.$

例4 求 $\int \operatorname{tg}^2 x dx$.

解 $\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \operatorname{tg} x - x + C.$

例5 求 $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx$.

解 $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx = \int \frac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x} dx$

$$= \int \left(\frac{1}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int \sec^2 x dx + \frac{1}{2} \int dx$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} x + C.$$

例6 求 $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx$

解 $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \int (1 - \frac{1}{x^2+1}) dx$

$= x - \arctan x + C$

例7 求 $\int \frac{x^4}{1+x^2} dx$

解 $\int \frac{x^4}{1+x^2} dx = \int \frac{x^4-1+1}{1+x^2} dx$

$= \int (x^2-1+\frac{1}{1+x^2}) dx = \frac{x^3}{3} - x + \arctan x + C$

习题7.2

1 求下列不定积分:

(1) $\int x\sqrt{x} dx$

(2) $\int (2\sin x - 3\sqrt{x} - \frac{2}{x} - \frac{21}{x^2}) dx$

(3) $\int (\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3}{\sqrt{x}} - 6e^x) dx$

(4) $\int (7\csc^2 x + 2\cos x - 3\sec^2 x) dx$

(5) $\int (x-1)^3 dx$

(6) $\int (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x^3}}) dx$

(7) $\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1) dx$

(8) $\int \frac{x^2-2\sqrt{2}x+2}{x-\sqrt{2}} dx$

(9) $\int \frac{dh}{\sqrt{2gh}}$

(10) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx$

(11) $\int \frac{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{2^x} dx$

(12) $\int \frac{3x^2}{1+x^2} dx$

(13) $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx$

(14) $\int 3^x \cdot e^x dx$

(15) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$

(16) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx$

(17) $\int \lg^2 x dx$

(18) $\int \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$

(19) $\int \frac{(x-1)^3}{x^2} dx$

(20) $\int \frac{2x^2-4}{1+x^2} dx$

$2\sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x$

$$(21) \int \frac{x^2-4}{x-2} dx;$$

$$(22) \int \frac{x^2-9}{x+3} dx;$$

$$(23) \int \frac{\lg^3 x + \lg^2 x - \lg x - 1}{\lg x + 1} dx;$$

$$(24) \int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx.$$

2 一物体作直线运动, 已知加速度 $a(t) = 12t^2 - 3\sin t$, 且 $s(0) = -3$, $v(0) = 5$. 求

(1) 速度函数 $v(t)$; (2) 路程函数 $s(t)$.

§7.3 换元积分法

我们知道, 利用基本积分表和积分性质, 可以解决一些不定积分问题, 但还远远不够。例

如, 不定积分 $\int \cos 2x dx$, $\int (1+2x)^{100} dx$, $\int e^{-x^2} dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{1+3x}} dx$ 等等, 都无法用不定积分的性质和基本积分表解决。为此, 本节介绍不定积分的换元积分法, 它在积分的计算中所起的作用, 相当于复合函数微分法在导数计算中所起的作用, 为了说明换元积分法, 我们先看几个例题。

例1 求 $\int \cos 2x dx$.

解 在基本积分表中只有 $\int \cos x dx = \sin x + C$.

为了求出这个积分, 我们把它改写成

$$\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int \cos 2x d(2x),$$

令 $2x = u$, 把 u 作为新的积分变量, 利用基本积分表得

$$\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int \cos u du = \frac{1}{2} \sin u + C.$$

再把 u 换成 $2x$, 得

$$\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C.$$

不难验证, 以上求得的 $\frac{1}{2} \sin 2x$ 确是 $\cos 2x$ 的原函数。

应当注意 $\int \cos 2x dx \neq \sin 2x + C$.

这是由于 $d(\sin 2x) = \cos 2x d(2x)$, 所以必须把 dx 变成 $\frac{1}{2} d(2x)$, 把 $2x$ 看成中间变量,

才能套用基本积分表。

例2 求 $\int (1+2x)^{100} dx$.

解 为了应用基本积分公式

$$\int x^{\mu} dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1),$$

我们把所求积分写成

$$\int (1+2x)^{100} dx = \frac{1}{2} \int (1+2x)^{100} d(1+2x).$$

令 $1+2x=u$, 于是

$$\int (1+2x)^{100} dx = \frac{1}{2} \int u^{100} du = \frac{1}{202} u^{101} + C.$$

再把 u 换成 $1+2x$, 得

$$\int (1+2x)^{100} dx = \frac{1}{202} (1+2x)^{101} + C.$$

以上两例所用的方法称为第一类换元积分法, 简称**第一类换元法**。应用第一类换元法的关键在于选择一个适当的函数 $\varphi(x)$ 作为新的积分变量 u , 使换元后的积分能直接利用基本积分表。

一 第一类换元法

下面我们叙述并证明第一类换元法。

定理 如果 $\int f(u) du = F(u) + C$, 且 $u = \varphi(x)$ 可导, 则

$$\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = F[\varphi(x)] + C. \quad (7.1)$$

证明 由定理条件 $\int f(u) du = F(u) + C$ 可知 $F'(u) = f(u)$

根据一阶微分形式不变性

$$dF[\varphi(x)] = dF(u) = F'(u) du = f(u) du = f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx.$$

所以 $\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = F[\varphi(x)] + C.$

(7.1)式可以用公式

$$\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + C. \quad (7.2)$$

表达, 其中 $u = \varphi(x)$ 。这表明在计算不定积分时, 如果被积表达式能表示成 $\varphi(x)$ 的复合函数 $f[\varphi(x)]$ 与 $\varphi(x)$ 的微分 $\varphi'(x) dx$ 的乘积, 即有 $\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx$ 的形式, 则可令 $u = \varphi(x)$, 于是问题便归结为计算不定积分 $\int f(u) du$ 。

例3 求下列不定积分:

$$(1) \int \frac{dx}{x+1},$$

$$(2) \int \frac{3dx}{3x-1},$$

$$(3) \int \frac{dx}{x^2+3x},$$

$$(4) \int \sin \omega x dx,$$

$$(5) \int e^{-ax} dx,$$

$$(6) \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx \quad (a > 0),$$

$$(7) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (a > 0).$$

$$\begin{aligned} \text{解 } (1) \int \frac{dx}{x+1} &= \int \frac{d(x+1)}{x+1} = \left[\int \frac{du}{u} \right]_{u=x+1} \\ &= [\ln|u| + C]_{u=x+1} = \ln|x+1| + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int \frac{3dx}{3x-1} &= \int \frac{d(3x-1)}{3x-1} = \left[\int \frac{du}{u} \right]_{u=3x-1} \\ &= [\ln|u| + C]_{u=3x-1} = \ln|3x-1| + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \int \frac{dx}{\sqrt{1+3x}} &= \frac{1}{3} \int (1+3x)^{-\frac{1}{2}} d(1+3x) = \left[\frac{1}{\frac{1}{2}} \int u^{-\frac{1}{2}} du \right]_{u=1+3x} \\ &= \left[\frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}} + C \right]_{u=1+3x} = \frac{1}{2} (1+3x)^{\frac{1}{2}} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \int \sin \omega x dx &= \frac{1}{\omega} \int \sin \omega x d(\omega x) = \left[\frac{1}{\omega} \int \sin u du \right]_{u=\omega x} \\ &= \left[-\frac{1}{\omega} \cos u + C \right]_{u=\omega x} = -\frac{1}{\omega} \cos \omega x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \int e^{-ax} dx &= -\frac{1}{a} \int e^{-ax} d(-ax) = \left[-\frac{1}{a} \int e^u du \right]_{u=-ax} \\ &= \left[-\frac{1}{a} e^u + C \right]_{u=-ax} = -\frac{1}{a} e^{-ax} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6) \int \frac{dx}{a^2 + x^2} &= \frac{1}{a} \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \left[\frac{1}{a} \int \frac{du}{1+u^2} \right]_{u=x/a} \\ &= \left[\frac{1}{a} \arctan u + C \right]_{u=x/a} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (7) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \left[\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \right]_{u=x/a} \\ &= \left[\arcsin u + C \right]_{u=x/a} = \arcsin \frac{x}{a} + C. \end{aligned}$$

例3的七个例子，新变量 u 都是原积分变量 x 的线性函数，我们可以归结为如下公式：