信息通信专业教材系列

数字信号处理基础习题解答

(第3版)

SHUZI XINHAO CHULI JICHU XITI JIEDA

周利清 编著

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

信息通信专业教材系列

数字信号处理基础习题解答

（第3版）

周利清　编著

北京邮电大学出版社
·北京·

内 容 简 介

“数字信号处理”是各高等院校电子类专业和通信类专业学生的一门非常重要的专业基础课。本书是与北京邮电大学出版社新近出版的《数字信号处理基础(第 3 版)》相配套的习题解答，它给出了原书中所有习题的详细解答，在解答过程中也说明了所用的公式、定理等依据的出处。读者通过这本习题解答可以更清楚地理解和掌握数字信号处理的基本原理、基本概念和基本算法。

本书可以作为本科生的配套教材，也可以作为从事数字信号处理工作的技术人员自学所用。

图书在版编目(CIP)数据

数字信号处理基础习题解答/周利清编著. --3 版. --北京:北京邮电大学出版社,2012.6

ISBN 978-7-5635-3044-1

Ⅰ.①数… Ⅱ.①周… Ⅲ.①数字信号处理—高等学校—习题集 Ⅳ.①TN911.72-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 093455 号

书　　名: 数字信号处理基础习题解答(第 3 版)
编 著 者: 周利清
责任编辑: 陈岚岚
出版发行: 北京邮电大学出版社
社　　址: 北京市海淀区西土城路 10 号(100876)
发 行 部: 电话: 010-62282185　传真: 010-62283578
E-mail: publish@bupt.edu.cn
经　　销: 各地新华书店
印　　刷: 北京联兴华印刷厂
开　　本: 787 mm×960 mm　1/16
印　　张: 8
字　　数: 170 千字
印　　数: 1—3 000 册
版　　次: 2005 年 11 月第 1 版　2007 年 11 月第 2 版　2012 年 6 月第 3 版　2012 年 6 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-3044-1　　定　价: 17.00 元

前　　言

“数字信号处理”是各高等院校电子类专业和通信类专业学生的一门非常重要的专业基础课。本书是与北京邮电大学出版社新近出版的《数字信号处理基础（第 3 版）》相配套的习题解答。对于原书中所有的习题，在这本书中都有详细的解答过程以及最后答案，同时也说明了解题过程中所用的公式、定理等依据的出处。通过这本习题解答，读者可以更清楚地理解和掌握数字信号处理的基本原理、基本概念和基本算法。

《数字信号处理基础（第 3 版）》共有 8 章，其中第 1 章是概述性的内容，没有习题，也就未作习题解答，因此共有 7 章的习题解答。希望读者在首先学习原书，基本理解了原书所讲解的基本原理、基本概念和基本算法，并且看懂了有关例题的基础上，再来做各章后面的习题；而且对于每一道习题，最好是先自己做，然后再看习题解答，并且将自己的做法在解题的思路、过程以及答案等方面与习题解答进行比较，这样你将获得较大的收获。笔者认为，做习题主要不在于数量，而是应该每做一题都要认真思考、认真总结，尽量做到做一题就有一题的收获。

上述观点如有不当之处，或者习题解答中的内容如有错误之处，都欢迎读者批评指正。

本书可以作为本科生的配套教材，也可以作为从事数字信号处理工作的技术人员自学所用。

周利清

写于第 3 版出版之时

目　录

第 2 章
离散系统的性质和离散信号的变换

2.1 有模拟正弦信号 $x_a(t)=3\sin(100\pi t)$，设抽样频率 $f_s=300$ 样值/秒。

(a) 求离散时间信号 $x(n)=x_a(nT_s)$ 的周期 N。

(b) 计算 $x(n)$ 在一个周期内的样值。

解

(a) $$x_a(t)=3\sin(100\pi t)=3\sin(\Omega_0 t)$$

因此，该正弦信号的角频率

$$\Omega_0=2\pi f_0=100\pi$$

于是可知该正弦信号的频率

$$f_0=50\ \text{Hz}=50\ 周/秒$$

又因为抽样频率 $f_s=300$ 样值/秒，所以在一个周期内的样值数为

$$300\ 样值/秒\div 50\ 周/秒=6\ 样值/周$$

也即离散信号 $x(n)$ 的周期 $N=6$。

(b)
$$\begin{aligned} x(n)&=x_a(nT_s)\\ &=3\sin(100\pi nT_s)=3\sin(100\pi n/f_s)\\ &=3\sin(100\pi n/300)=3\sin(\pi n/3) \end{aligned}$$

于是可求得 $x(n)$ 在一个周期内的样值：

n	0	1	2	3	4	5
$x(n)$	$3\sin(0)$ $=0$	$3\sin(\pi/3)$ $=2.598$	$3\sin(2\pi/3)$ $=2.598$	$3\sin(\pi)$ $=0$	$3\sin(4\pi/3)$ $=-2.598$	$3\sin(5\pi/3)$ $=-2.598$

2.2 若离散时间信号为 $2\cos(2\pi n/3)$，抽样率为 3 000 Hz，写出所对应的模拟信号的表达式。

解

由于离散信号为

$$x(n)=2\cos(2\pi n/3)$$

故应该令所对应的模拟信号

$$x_a(t)=2\cos(\Omega_0 t)$$

于是又有

$$x(n)=x_a(nT_s)=2\cos(\Omega_0 nT_s)$$

比较 $x(n)$ 的两个表达式，可以得到

$$\Omega_0 nT_s=2\pi n/3$$

故

$$\Omega_0=2\pi/(3T_s)=2\pi f_s/3=2\pi\cdot 3\,000/3=2\,000\pi$$

于是所对应的模拟信号

$$x_a(t)=2\cos(2\,000\pi t)$$

2.3 一个理想抽样器的抽样角频率 $\Omega_s=8\pi$ rad/s，抽样后经一个理想的低通滤波器 $H\left(\frac{\Omega}{2\Omega_c}\right)$来还原，这里 $\Omega_c=4\pi$ rad/s。当输入信号分别为 $x_{a1}(t)=2\cos(2\pi t)$、$x_{a2}(t)=\cos(5\pi t)$时，分别写出输出信号 $y_{a1}(t)$、$y_{a2}(t)$的表达式。

解

抽样周期

$$T_s=2\pi/\Omega_s=0.25\text{ s}$$

$$x_{a1}(t)=2\cos(2\pi t)=2\cos(\Omega_1 t)=e^{j2\pi t}+e^{-j2\pi t}$$

因此 $x_{a1}(t)$ 的频谱 $X_{a1}(\Omega)$ 含有 $\pm 2\pi$ 这两个频率成分，频谱幅度均为 1。由于 $\Omega_1=2\pi<\Omega_s/2=4\pi$，故由 $x_{a1}(t)$ 得到的抽样信号的频谱不会混叠；抽样信号经过 $\Omega_c=4\pi=\Omega_s/2$的理想低通滤波器之后，可以保留 $X_{a1}(\Omega)$的所有频率成分，所以输出信号

$$y_{a1}(t)=(1/T_s)(e^{j2\pi t}+e^{-j2\pi t})=8\cos(2\pi t)$$

又，

$$x_{a2}(t)=\cos(5\pi t)=\cos(\Omega_2 t)=(1/2)(e^{j5\pi t}+e^{-j5\pi t})$$

因此 $x_{a2}(t)$ 的频谱 $X_{a2}(\Omega)$ 含有 $\pm 5\pi$ 这两个频率成分，频谱幅度均为 1/2。由于 $\Omega_2=5\pi>\Omega_s/2=4\pi$，故由 $x_{a2}(t)$得到的抽样信号的频谱将发生混叠，在从 $-\Omega_s=-8\pi$ 到 $\Omega_s=8\pi$的两个周期之内，抽样信号的频谱不但含有$\pm 5\pi$ 这两个频率成分，而且含有因为混叠所产生的$\pm 3\pi$ 这两个频率成分；抽样信号经过 $\Omega_c=4\pi=\Omega_s/2$ 的理想低通滤波器之后，保留的频率成分为$\pm 3\pi$，所以输出信号

$$y_{a2}(t)=(1/T_s)(1/2)(e^{j3\pi t}+e^{-j3\pi t})=4\cos(3\pi t)$$

这是与输入信号 $x_{a2}(t)$不同频率的余弦信号。

2.4 试画出下面各序列的图形。

(a) $x(n)=0.5^n u(n+1)$　　(b) $x(n)=2^{n-2}u(n-1)$

(c) $x(n)=\delta(n-1)+u(-n)$　　(d) $x(n)=2^{-n}u(n)+u(-n-2)$

解

参见图 T2.4(a)～(d)。

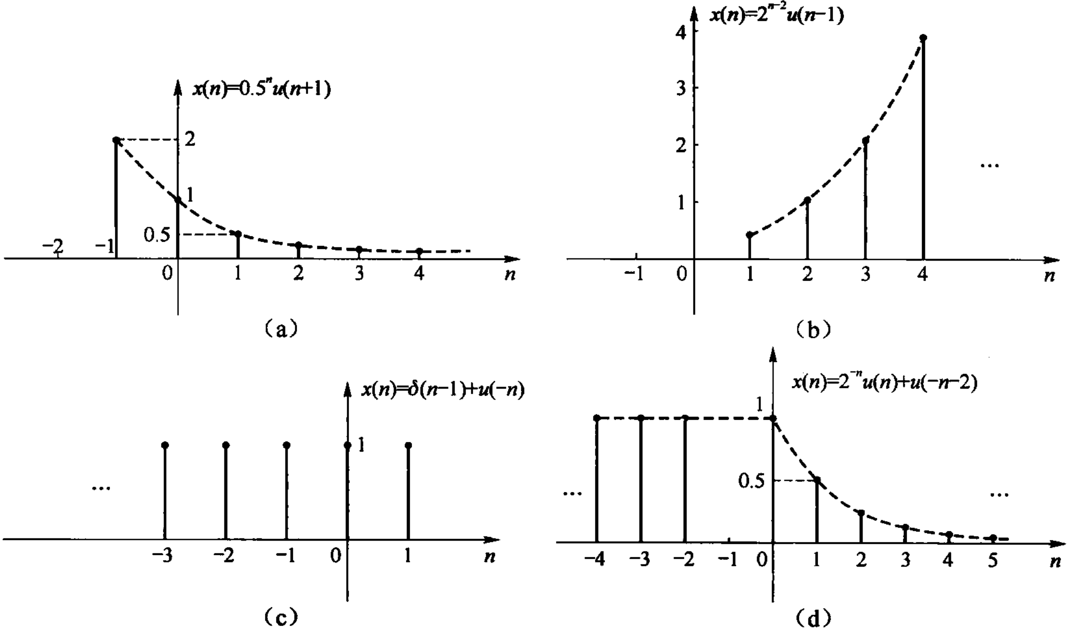

图 T2.4

2.5 下列系统中，$y(n)$表示输出，$x(n)$表示输入，试确定输入输出关系是否线性？是否时不变？

(a) $y(n)=2x(n)+3$　　(b) $y(n)=x^2(n)$　　(c) $y(n)=\sum_{m=-\infty}^{n}x(m)$

解

设 $x_1(n)$、$x_2(n)$是两个任意序列，a、b 是两个任意常数。

(a) 系统定义为：

$$y(n)=T[x(n)]=2x(n)+3$$

① 线性组合的变换：

$$\begin{aligned}T[ax_1(n)+bx_2(n)]&=2[ax_1(n)+bx_2(n)]+3\\&=2ax_1(n)+2bx_2(n)+3\\&=y'(n)\end{aligned}$$

变换的线性组合：

$$\begin{aligned} aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)] &= a[2x_1(n)+3]+b[2x_2(n)+3] \\ &= 2ax_1(n)+2bx_2(n)+3(a+b) \\ &= y''(n) \end{aligned}$$

因为 a、b 是任意常数，不可能使 3 恒等于 $3(a+b)$，故 $y'(n)\neq y''(n)$，该系统是非线性的。

② 将 $x(n)$ 先移位后变换：

$$T[x(n+M)]=2x(n+M)+3 \qquad (M\text{ 为一整数})$$

将 $x(n)$ 先变换后移位：

$$y(n)=T[x(n)]=2x(n)+3$$

$$y(n+M)=2x(n+M)+3=T[x(n+M)]$$

所以该系统是时不变的。

(b) 系统定义为：

$$y(n)=T[x(n)]=x^2(n)$$

① 线性组合的变换：

$$\begin{aligned} T[ax_1(n)+bx_2(n)] &= [ax_1(n)+bx_2(n)]^2 \\ &= a^2{x_1}^2(n)+b^2x_2^2(n)+2abx_1(n)x_2(n) \\ &= y'(n) \end{aligned}$$

变换的线性组合：

$$aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]=a{x_1}^2(n)+bx_2^2(n)=y''(n)$$

显然 $y'(n)\neq y''(n)$，因此该系统是非线性的。

② 将 $x(n)$ 先移位后变换：

$$T[x(n+M)]=x^2(n+M) \qquad (M\text{ 为一整数})$$

将 $x(n)$ 先变换后移位：

$$y(n)=T[x(n)]=x^2(n)$$

$$y(n+M)=x^2(n+M)=T[x(n+M)]$$

所以该系统是时不变的。

(c) 系统定义为：

$$y(n) = T[x(n)] = \sum_{m=-\infty}^{n} x(m)$$

① 线性组合的变换：

$$
\begin{aligned}
T[ax_1(n)+bx_2(n)] &= \sum_{m=-\infty}^{n}[ax_1(m)+bx_2(m)] \\
&= a\sum_{m=-\infty}^{n}x_1(m)+b\sum_{m=-\infty}^{n}x_2(m) \\
&= y'(n)
\end{aligned}
$$

变换的线性组合：

$$
aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)] = a\sum_{m=-\infty}^{n}x_1(m)+b\sum_{m=-\infty}^{n}x_2(m) = y''(n)
$$

因为 $y'(n)=y''(n)$，因此该系统是线性的。

② 将 $x(n)$先移位后变换：

$$
T[x(n+M)] = \sum_{m=-\infty}^{n+M}x(m) \qquad (M\text{ 为一整数})
$$

将 $x(n)$先变换后移位：

$$
y(n) = T[x(n)] = \sum_{m=-\infty}^{n}x(m)
$$

$$
y(n+M) = \sum_{m=-\infty}^{n+M}x(m) = T[x(n+M)]
$$

所以该系统是时不变的。

2.6 确定下列系统是否因果的？是否稳定的？

(a) $y(n) = g(n)x(n)$，$g(n)$有界

(b) $y(n) = \sum_{m=-\infty}^{n}x(m)$

(c) $y(n) = x(n-n_0)$

解

(a) 假设对某一时刻 n_0，当 $n<n_0$时，输入信号不改变，即有 $x_1(n)=x_2(n)$。而输出信号 $y_1(n)=g(n)x_1(n)$，$y_2(n)=g(n)x_2(n)$，于是当 $n<n_0$ 时，也有 $y_1(n)=y_2(n)$，即此时输出也不变化，所以是因果系统。

又，由于 $g(n)$有界，故对所有 n，都有$|g(n)|<\infty$。现在设输入信号 $x(n)$有界，也即对所有 n，都有 $|x(n)|<\infty$。而输出 $y(n)=g(n)x(n)$，因此对所有 n，也都有$|y(n)|=|g(n)||x(n)|<\infty$。这就是说，当输入有界时，输出也有界，所以系统是稳定的。

注意，此题不能用 $h(n)$来确定其因果性和稳定性，因为这不是一个 LTI 系统。

(b) 由 2.5(c)题已经知道这是一个 LTI 系统，因此可以利用 $h(n)$来判定。

$$h(n)=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta(m)=\begin{cases}1 & n\geqslant 0\\ 0 & n<0\end{cases}=u(n)$$

也即当 $n<0$ 时，$h(n)=0$，故为因果系统。

而

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|h(n)\right|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}u(n)=\sum_{n=0}^{\infty}1=\infty$$

故系统是非稳定的。

(c) 首先验证它是否是一个 LTI 系统。设 $x_1(n)$、$x_2(n)$是两个任意序列，a、b 是两个任意常数。

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=ax_1(n-n_0)+bx_2(n-n_0)=y'(n)$$
$$aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]=ax_1(n-n_0)+bx_2(n-n_0)=y''(n)$$

由于 $y'(n)=y''(n)$，所以是线性系统。

又，设 M 为一整数。

$$T[x(n+M)]=x(n+M-n_0)$$

而

$$y(n+M)=x(n-n_0+M)=T[x(n+M)]$$

所以是时不变系统。

于是可以用 $h(n)$来判定。

$$h(n)=T[\delta(n)]=\delta(n-n_0)$$

因此 $h(n)$只在 $n=n_0$时不为 0。所以，如果 $n_0\geqslant 0$，那么当 $n<0$ 时，$h(n)=0$，系统是因果的；如果 $n_0<0$，由于 $h(n_0)=1$，所以系统是非因果的。

又，

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|h(n)\right|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n-n_0)=1<\infty$$

所以该系统是稳定的。

2.7 确定下列线性时不变系统是否因果的？是否稳定的？

(a) $x(n)=a^n u(n)$，$h(n)=u(n+1)$

(b) $h(n)=(1/2)^n u(n)$

解

(a) 因为

$$h(-1)=u(0)=1$$

即 $h(n)$不满足当 $n<0$ 时为 0，故这个 LTI 系统不是因果的。

因为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|h(n)\right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty}u(n+1) = \sum_{n=-1}^{\infty}1 = \infty$$

故这个 LTI 系统是非稳定的。

(b) 当 $n<0$ 时，因为 $u(n)=0$，故

$$h(n)=(1/2)^n u(n)=0$$

因此该 LTI 系统是因果的。

因为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|h(n)\right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-(1/2)} = 2 < \infty$$

故该 LTI 系统是稳定的。

2.8 $x(n)$为输入序列，$h(n)$为线性时不变系统的单位抽样响应，确定输出序列 $y(n)$。

(a) $x(n)=\{x(-1),x(0),x(1),x(2),x(3)\}=\{0.25,1,2,1,0.25\}$； $h(n)=u(n)$

(b) $x(n)=\{x(-2),x(-1),x(0),x(1),x(2)\}=\{1,2,1,1,2\}$； $h(n)=\delta(n-2)$

(c) $x(n)=\{2,-1\}$； $h(n)=\{3,2,1\}$

解

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x(n-k)$$

(a)
$$y(n) = \sum_{k=-1}^{3}x(k)u(n-k) = \begin{cases} 0 & n<-1 \\ \displaystyle\sum_{k=-1}^{n}x(k) & -1\leqslant n\leqslant 3 \\ \displaystyle\sum_{k=-1}^{3}x(k) = 4.5 & n>3 \end{cases}$$

(b)
$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(k-2)x(n-k) = x(n-2)$$

由于 $x(n)$定义在−2 到 2 区间，所以 $y(n)$在 0 到 4 区间，依次为：1,2,1,1,2。

(c) 用排序法求这个线性卷积

$$y(n)=h(n) * x(n)$$

	3	2	1		
−1	2				$y(0)=6$
	−1	2			$y(1)=1$
		−1	2		$y(2)=0$
			−1	2	$y(3)=-1$

2.9 直接计算卷积和，求序列

$$h(n)=\begin{cases}\alpha^n & 0\leqslant n<N\\ 0 & \text{其他}\end{cases} \quad 与 \quad x(n)=\begin{cases}\beta^{n-n_0} & n\geqslant n_0\\ 0 & n<n_0\end{cases}$$

的卷积 $y(n)=x(n)*h(n)$。

解

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)=\sum_{k=n_0}^{\infty}\beta^{k-n_0}h(n-k)$$

(1) 当 $n<n_0$ 时，$y(n)=0$。

(2) 当 $n_0\leqslant n<n_0+N$ 时，

$$\begin{aligned}y(n)&=\sum_{k=n_0}^{n}\beta^{k-n_0}\alpha^{n-k}=\frac{\alpha^n}{\beta^{n_0}}\sum_{k=n_0}^{n}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k\\&=\frac{\alpha^n}{\beta^{n_0}}\cdot\frac{(\beta/\alpha)^{n_0}-(\beta/\alpha)^{n+1}}{1-(\beta/\alpha)}\\&=\frac{\alpha^{n-n_0+1}-\beta^{n-n_0+1}}{\alpha-\beta}\qquad(\alpha\neq\beta)\end{aligned}$$

若 $\alpha=\beta$

$$y(n)=\sum_{k=n_0}^{n}\beta^{k-n_0}\alpha^{n-k}=\sum_{k=n_0}^{n}\alpha^{n-n_0}=\alpha^{n-n_0}(n-n_0+1)$$

(3) 当 $n\geqslant n_0+N$ 时，

$$y(n)=\sum_{k=n-N+1}^{n}\beta^{k-n_0}\alpha^{n-k}$$

若 $\alpha\neq\beta$

$$y(n)=\frac{\alpha^n}{\beta^{n_0}}\sum_{k=n-N+1}^{n}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k=\frac{\beta^{n-n_0+1}(\alpha^N\beta^{-N}-1)}{\alpha-\beta}$$

若 $\alpha=\beta$

$$y(n)=\sum_{k=n-N+1}^{n}\alpha^{n-n_0}=N\alpha^{n-n_0}$$

读者可以画出两个序列所在区间的图形来帮助理解 $y(n)$ 的分段表示，以及各表达式中的求和范围。

2.10 已知 LTI 系统的单位抽样响应为

$$h(n)=\delta(n)+2\delta(n-1)-3\delta(n-2)+\delta(n-3)$$

求单位阶跃响应(即当输入为单位阶跃信号时的输出) $y(n)$。

解

该系统的单位阶跃响应

$$y(n) = h(n) * u(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)u(n-k)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(k) + 2\delta(k-1) - 3\delta(k-2) + \delta(k-3)]u(n-k)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k)u(n-k) + 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k-1)u(n-k) -$$

$$3\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k-2)u(n-k) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k-3)u(n-k)$$

$$= u(n) + 2u(n-1) - 3u(n-2) + u(n-3)$$

2.11 试确定下列序列的傅里叶变换。

(a) $x(n)=0.5\delta(n+1) + 0.5\delta(n-1)$

(b) $x(n)=a^n u(n) \quad (0<a<1)$

(c) $x(n)=u(n+3) - u(n-4)$

解

离散信号的傅里叶变换

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega}$$

(a)
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [0.5\delta(n+1) + 0.5\delta(n-1)]e^{-jn\omega}$$

$$= 0.5\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n+1)e^{-jn\omega} + 0.5\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-1)e^{-jn\omega}$$

$$= 0.5e^{j\omega} + 0.5e^{-j\omega} = \cos\omega$$

(b)
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n)e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n$$

$$= \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} = \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega}-a}$$

上式中的级数收敛是因为 $|ae^{-j\omega}|=a<1$。

(c)
$$x(n) = u(n+3) - u(n-4) = \begin{cases} 1 & -3 \leqslant n \leqslant 3 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

所以

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega} = \sum_{n=-3}^{3} (e^{-j\omega})^n$$

$$= \frac{(e^{-j\omega})^{-3} - (e^{-j\omega})^4}{1-e^{-j\omega}} = \frac{e^{j3\omega} - e^{-j4\omega}}{1-e^{-j\omega}}$$

2.12 令 $x(n)$和 $X(e^{j\omega})$表示一个序列及其傅里叶变换，利用 $X(e^{j\omega})$表示下面各序列的傅里叶变换。

(a) $bx(n)$　　(b 为任意常数)

(b) $x(n-n_0)$　　(n_0 为整数)

(c) $g(n)=x(2n)$

(d) $g(n)=\begin{cases} x(n/2) & (n\text{ 为偶数}) \\ 0 & (n\text{ 为奇数}) \end{cases}$

解

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega}$$

(a) $X_a(e^{j\omega}) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} bx(n)e^{-jn\omega} = b\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega} = bX(e^{j\omega})$

(b) $X_b(e^{j\omega}) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} x(n-n_0)e^{-jn\omega} = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j(k+n_0)\omega}$

$$= e^{-jn_0\omega}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-jk\omega} = e^{-jn_0\omega}X(e^{j\omega})$$

(c) $G(e^{j\omega}) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} g(n)e^{-jn\omega} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} x(2n)e^{-jn\omega} = \sum\limits_{\substack{k=-\infty \\ k\text{为偶数}}}^{\infty} x(k)e^{-j\frac{k}{2}\omega}$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}[x(k)+(-1)^k x(k)]e^{-j\frac{k}{2}\omega}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-jk\frac{\omega}{2}} + \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\ (e^{j\pi})^k e^{-jk\frac{\omega}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}X(e^{j\frac{\omega}{2}}) + \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-jk(\frac{\omega}{2}-\pi)}$$

$$= \frac{1}{2}X(e^{j\frac{\omega}{2}}) + \frac{1}{2}X[e^{j(\frac{\omega}{2}-\pi)}]$$

$$= \frac{1}{2}[X(e^{j\frac{\omega}{2}}) + X(-e^{j\frac{\omega}{2}})]$$

(d) $G(e^{j\omega}) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} g(n)e^{-jn\omega} = \sum\limits_{r=-\infty}^{\infty} g(2r)e^{-j2r\omega} = \sum\limits_{r=-\infty}^{\infty} x(r)e^{-jr2\omega} = X(e^{j2\omega})$

2.13 一个 LTI 系统的单位抽样响应为

$$h(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

求其频率响应 $H(e^{j\omega})$。设另一系统的频率响应为 $1/H(e^{j\omega})$，单位抽样响应为$h'(n)$，试证明

$$h(n) * h'(n)=\delta(n)$$

解

$$H(e^{j\omega}) = \mathscr{F}[h(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-jn\omega}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n e^{-jn\omega} = \frac{1}{1-e^{-j\omega}/2} = \frac{2e^{j\omega}}{2e^{j\omega}-1}$$

因为

$$\mathscr{F}[h'(n)]=1/H(e^{j\omega})$$

故根据傅里叶变换的卷积特性，有

$$\mathscr{F}[h(n)*h'(n)]=H(e^{j\omega})\cdot(\frac{1}{H(e^{j\omega})})=1$$

又由于

$$\mathscr{F}[\delta(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n)e^{-jn\omega}=1$$

故比较上面二式即有

$$h(n)*h'(n)=\delta(n)$$

2.14 求下列各序列的 z 变换，并指出其零极点和收敛域。

(a) $\delta(n)+\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$　　　(b) $\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$

(c) $\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)-\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$　　　(d) $x(n)=\begin{cases}3 & 1\leqslant n\leqslant 4\\ 0 & 其他\end{cases}$

解

z 变换定义式　　$X(z)=\mathscr{Z}[x(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$

(a)
$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[\delta(n)+(\frac{1}{2})^n u(n)]z^{-n}$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n)z^{-n}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\frac{1}{2})^n u(n)z^{-n}$$
$$=1+\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2}z^{-1})^n$$
$$=1+\frac{1}{1-z^{-1}/2}=\frac{4z-1}{2z-1}$$

零点：$X(z)$分子的零点，即 $z=1/4$；

极点：$X(z)$分母的零点，即 $z=1/2$；

由导出 $X(z)$时幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2}z^{-1})^n$ 收敛的条件 $|z^{-1}/2|<1$，即得到 $X(z)$的收敛域：$|z|>1/2$ 。

第2章　离散系统的性质和离散信号的变换
LISANXITONGDEXINGZHIHELISANXINHAODEBIANHUAN

(b)
$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}z^{-n}$$
$$=\frac{1}{1-z^{-1}/3}=\frac{3z}{3z-1}\qquad(|z^{-1}/3|<1)$$

零点：$z=0$；

极点：$z=1/3$；

收敛域：$|z|>1/3$。

(c)
$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u(n)-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(-n-1)\right]z^{-n}$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u(n)z^{-n}-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(-n-1)z^{-n}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}z^{-n}-\sum_{n=-1}^{-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}z^{-n}$$
$$=\frac{1}{1-z^{-1}/3}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}z^{n}\qquad(|z^{-1}/3|<1)$$
$$=\frac{3z}{3z-1}+1-\sum_{n=0}^{\infty}(2z)^{n}$$
$$=\frac{3z}{3z-1}+1-\frac{1}{1-2z}\qquad(|2z|<1)$$
$$=\frac{5z-12z^{2}}{(3z-1)(1-2z)}$$

零点：$z=0$，$z=5/12$；

极点：$z=1/3$，$z=1/2$；

收敛域：$1/3<|z|<1/2$。

(d)
$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=1}^{4}3z^{-n}$$
$$=3(z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+z^{-4})$$
$$=3\,\frac{z^{3}+z^{2}+z+1}{z^{4}}=3\,\frac{(z^{2}+1)(z+1)}{z^{4}}$$

零点：$z=-1$，$z=\pm\mathrm{j}$；

极点：$z=0$（四阶）；

收敛域：$|z|>0$。

2.15 已知序列 $x(n)$ 的 z 变换为 $X(z)$，收敛域为 $R_{-}<|z|<R_{+}$，用 $X(z)$ 表示下面各序列的 z 变换，并指出各自的收敛域。

(a) $x_1(n)=x(n-1)$　　(b) $x_2(n)=3x(n+2)$

(c) $x_3(n)=2x(-n)$　　(d) $x_4(n)=-2^{n}x(n)$