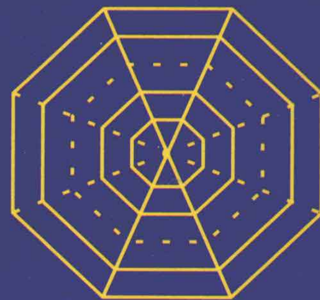
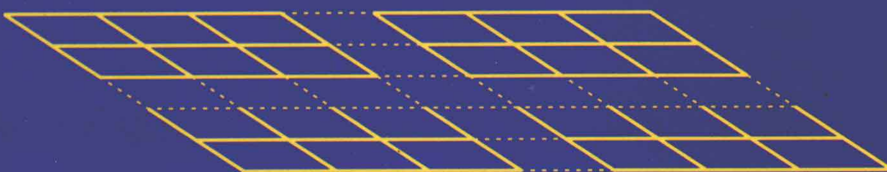
Resistance Network Model





电阻网络模型

谭志中 著

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

电阻网络模型

谭志中　著

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书是作者基于多年从事数物方法创新研究并将其应用于电阻网络模型研究的大量原创成果撰写而成的一本专著，基于基础研究侧重于问题解决与方法创新，学术思想新颖，是一部系统研究电阻网络模型的学术专著. 本书发现或创立了一些新的数学定理，发现并证明了一些新的物理规律(普适公式)，创建了电阻网络等效电阻研究的通用方法，给出了任意 $m\times n$ 阶电阻网络等效电阻的普适公式，提出了一些猜想. 该书的问世源于作者对科学的兴趣与热爱，书中的不少内容为国内外最新研究成果.

全书共分为四篇 17 章，以研究问题解决的系统方法为宗旨. 内容编排具有层次性，即从基础理论与创新到平面矩形电阻网络模型，再到平面蛛形电阻网络模型，最后是三维空间电阻网络模型. 这种由浅入深的编排方式有利于读者对电阻网络研究的现状和研究的发展方向有一个基本的认识，有利于科研工作者选择合适的内容开展科学研究.

本书可作为数学类、物理学类、电子信息类、自动化类、电气工程类的本科生和研究生教材，也可供高等院校理工科专业的教师以及科技工作者、科学爱好者、数学爱好者、奥林匹克竞赛人员等阅读与参考.

图书在版编目(CIP)数据

电阻网络模型/谭志中著. —西安：西安电子科技大学出版社，2011.12

ISBN 978-7-5606-2722-9

Ⅰ. ① 电…　Ⅱ. ① 谭…　Ⅲ. ① 电阻—网络模型　Ⅳ. ① O441.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 278748 号

策　　划　秦志峰
责任编辑　秦志峰
出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)
电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　　编　710071
网　　址　www.xduph.com　　电子邮箱　xdupfxb001@163.com
经　　销　新华书店
印刷单位　西安文化彩印厂
版　　次　2011 年 12 月第 1 版　2011 年 12 月第 1 次印刷
开　　本　787 毫米×1092 毫米　1/16　印　张　15.5
字　　数　362 千字
印　　数　1～1000 册
定　　价　50.00 元

ISBN 978-7-5606-2722-9/O·0121

XDUP 3014001-1

前　　言

电阻网络模型的建立与研究已有一百多年历史. 自从 1845 年德国物理学家基尔霍夫(1824—1887)创立了节点电流定律和回路电压定律，人类就开始通过建立电阻网络模型来解决许多抽象和复杂的科学问题. 由于电阻网络模型符合物质世界的自然属性，并且其简洁性与直观性满足了人类思维的基本要求，因此电阻网络模型自然地成为科学研究的基本模型. 然而，电阻网络等效电阻的普适公式这一难题一直悬而未决，本书给出的研究方法较好地解决了这一科学难题，并且在解决这一难题的过程中取得了一些有价值的研究成果.

2010 年的诺贝尔物理学奖被授予了石墨烯网络的发现者，这一奖项的颁发再一次充分彰显了电阻网络模型研究的价值. 电阻网络模型被应用于许多科学领域，但在此之前尚没有一本系统研究电阻网络模型的书籍，本书可谓中外专门系统研究电阻网络模型的第一部理论专著. 正如石墨烯的发现过程简单而朴实一样，电阻网络模型的表象也同样具有简单而朴实的特点.

电阻网络模型不仅适合理论工作者研究，而且适合实验工作者研究. 理论工作者可以在纯理论方面研究等效电阻的普适公式，实验工作者可以通过实验途径探索等效电阻的规律，理论与实验结论可以相互验证，所得普适公式结论可以作为广大科技工作者应用的理论工具.

电阻网络模型在应用中具有完全的自由度，可以任意选择其阶数的高低(如 1×3 阶，$1\times n$ 阶，2×3 阶，$2\times n$ 阶，……)，为各种研究提供了方便. 这体现了电阻网络模型的优良特性(不同于相对论较难用实验验证)，也体现了电阻网络模型的博大精深. 电阻网络模型无疑是供广大科技工作者耕作的“良田”. 这也正是人们乐于使用电阻网络模型的原因之一，也是本书的价值所在.

本书是一部问题解决与方法创新性质的学术专著，也是一部基于电阻网络模型的自然哲学书籍. 问题解决是人类适应环境、获取知识并形成智慧的基本方式. 人类的文明史——从火药发明到宇宙飞船上天，就是一部问题解决的过程史. 问题解决与方法创新是本书的特色之一. 本书研究的主要内容是创新数学理论与方法解决科学难题. 每一次创新都可能包含一些传奇，每一个传奇都可能成为一个经典. 方法源自于技巧，技巧源自于智慧，通俗化的技巧成了常用的方法. 本书所创建的数学理论及获得的普适公式可能会成为人们解决问题的基本理论工具.

任意 $k\times n$ 阶网络等效电阻的普适公式研究是对人类智慧的挑战，一百多年来人类关于电阻网络等效电阻普适公式的研究一直没有大的进展，原因在于复杂的 $k\times n$ 阶网络等效电阻的普适公式研究依赖于多方面的知识与智力优势，如需要相关的电路理论知识，需

要特殊的数学创新才能，等等. 作者所学恰恰形成了这些方面的优势. 一般 $2n+1$ 次方程的求根公式是对人类智慧的挑战，人们在研究一元五次方程的求根公式时就产生了不少传奇. 年轻的伽罗瓦在证明了一般五次方程没有根式解的情形下，法国的埃尔米特和德国的克莱因却分别给出了一般五次方程的求根公式. 作者从中学时代就迷恋上寻找五次方程的求根公式，一直持续了 20 多年的研究，现在终于有了一些令人满意的结果，作者用巧妙的方法给出了亚一般 $2n+1$ 次方程的统一求根公式.

原创是本书的主要特色，书中给出的一些结论可能会成为科学研究的经典，每一个优美的等效电阻普适公式的获得都是一次探索与创新. 电阻网络等效电阻的普适公式不仅优美与和谐，而且与数学规律存在着内在关联：n 阶多边形网络等效电阻的普适公式可以用著名的费波那契数列表达；多边形概念可以拓展到非平直空间的二边形情形；采用七种不同的方法给出了二端梯形电阻网络等效电阻的普适公式，这实际上构建了研究分式差分方程的七种不同方法. 本书给出的任意 $k\times n$ 阶矩形网络或蛛形网络等效电阻的普适公式包含了 $t\pi/(k+1)$ 的三角函数，这是比较有意义的发现. 基于同一个 $k\times n$ 阶矩形电阻网络等效电阻的不同表达形式具有等价性，作者意外收获了两个三角函数恒等式，这两个恒等式在数学上很难证明. 作者根据实际需要构建了含双变量的 $\mathrm{tz}(x, n)$ 函数与 $\mathrm{taz}(n, x)$ 函数，在矩形电阻网络等效电阻的研究中得到了重要应用. 这两个双变量新函数的创建，为深入研究电阻网络等效电阻的普适公式这一难题提供了基本理论工具. 在平面无穷电阻网络研究中，作者采用二维傅里叶级数展开研究等效电阻，得到了任意两个节点间等效电阻的普适公式，并且建立了等效电阻的平均值理论公式. 本书定义了 $k\times n$ 阶蛛形电阻网络模型. 一般 $k\times n$ 阶蛛网等效电阻的普适公式研究同样属于科学难题，笔者发现 $k\times n$ 阶蛛网等效电阻的普适公式可以用双曲余切函数来表达，由此提出了一般 $k\times n$ 阶蛛网等效电阻普适公式的猜想. 作者定义了三维空间电阻网络模型的类型，发现了平面电阻网络与空间电阻网络模型的转化关系，给出了不少新的研究结论.

全书包括四篇，第一篇是基础理论与创新，包括数学知识和网络分析理论，如一元高次方程的研究、差分方程通解的研究、矩阵变换方法的研究、$\mathrm{tz}(x, n)$ 与 $\mathrm{taz}(x, n)$ 函数的构造等；第二篇是平面矩形电阻网络模型，研究了 $k=1, 2, 3, 4, 5$ 时的平面矩形网络等效电阻的普适公式，给出了一般 $k\times n$ 阶平面矩形网络等效电阻的普适公式，捡拾到两个三角函数恒等式，采用二维傅里叶级数展开研究了平面无穷电阻网络的等效电阻；第三篇是平面蛛形电阻网络模型，研究了 $k=1, 2$ 时的 $k\times n$ 阶蛛形网络等效电阻的普适公式，提出了一般 $k\times n$ 阶蛛网等效电阻普适公式的猜想；第四篇是三维空间电阻网络模型，主要研究了三维 $\triangle\times n$ 阶网络和三维 $\square\times n$ 阶网络等效电阻的普适公式.

本书以问题为载体，以过程与方法的创建为核心，以普适公式的获得为目的，这是本书的特色之一，也是一种尝试. 本书属于理论研究型专著，研究的内容具有原创性与前沿性，研究内容深入浅出，层次分明，提出的一些问题实际上是该领域今后研究的方向. 电阻网络模型这一领域的内容博大精深，其中还有不少问题有待进一步研究，读者可以从中

找到自己感兴趣的问题开展研究. 本书的作用还在于授人以渔、抛砖引玉.

等效电阻普适公式的研究会涉及大量的方程及其求解与推理，很容易出错. 由于时间仓促，书中的不足之处在所难免，热忱欢迎广大读者不吝指正.

本书承蒙南京师范大学陆建隆教授、南通大学王金华教授的审阅，并提出了一些宝贵建议，西安电子科技大学阔永红教授提出了一些中肯建议，在此一并表示感谢.

最后要感谢家人和朋友对本书出版给予的支持和关心，也感谢西安电子科技大学出版社的编辑为本书的出版付出的辛勤劳动.

本书的出版得到南通大学学术著作出版基金资助，对此表示衷心感谢.

作者联系方式：江苏省南通大学理学院　　　E-mail：tanz@163. com

谭　志　中

2011 年 10 月于南通大学

目　　录

第一篇　基础理论与创新

第二篇　平面矩形电阻网络模型

第三篇　平面蛛形电阻网络模型

第四篇　三维空间电阻网络模型

第一篇

基础理论与创新

引　言

问题解决是人类适应环境、获取知识并形成智慧的基本方式. 电阻网络问题解决的基本工具是数学与物理学(电路理论). 本篇主要给出电阻网络问题解决的基础数学理论与基础电路理论，包含电路分析基础、代数方程、差分方程、矩阵变换等理论工具. 这里的基础理论不是对现行已有理论的简单摘编，而主要是作者在理论和方法上的原创.

研究发现，代数方程、差分方程、电阻网络三者仿佛是孪生三兄弟. 电阻网络模型的研究涉及差分方程模型的建立，差分方程的通解需要代数方程的求根公式，而差分方程的一些性质可以由电阻网络模型来揭示，这些都是值得研究的问题.

这里的基础物理学(电路)理论主要是德国物理学家基尔霍夫(G. R. Kirchhoff，1824—1887)于1845 年创立的节点电流定律(KCL，又叫基尔霍夫第一定律)和回路电压定律(KVL，又叫基尔霍夫第二定律)，它们是差分方程模型建立的理论基础.

这里的基础数学理论主要是一元高次代数方程、差分方程及差分方程组、矩阵理论及变换、$\mathrm{tz}(x, n)$函数与 $\mathrm{taz}(x, n)$ 函数的构造等. 其中的主要内容是作者的原创成果.

电阻网络等效电阻的普适公式研究是一个科学难题，21 世纪之前的研究总是步履艰难，无法取得进展，原因在于没有找到合适的方法且缺乏基本的理论工具，如差分方程模型的建构、高次代数方程的求根公式、差分方程组的通解等.

一般高次方程的求根公式是对人类最高智慧的挑战，尤其是人类在五次方程求根公式方面的研究. 在伽罗瓦证明了一般五次方程没有根式解的情形下，法国的埃尔米特和德国的克莱因却分别给出了一般五次方程的求根公式，得到的解是由椭圆模函数来表达的. 本

书创造性地建立了具有根式解的亚一般 $2n+1$ 次方程及亚一般 $2n$ 次方程，特别是给出了亚一般 $2n+1$ 次(包括三次、五次、七次……)方程的求根公式. 在高次方程的研究中还提出了一种"倍幂"方法，使得一些特殊方程的根可以得到简洁表达.

双变量的 $\mathrm{tz}(x, n)$函数与 $\mathrm{taz}(x, n)$ 函数是作者基于实际需要而构建的，这两个函数在有些方面可能与双曲正(余)切函数有着相似的性质，它们的构建是一次有意义的创新. 双变量 $\mathrm{tz}(x, n)$函数与 $\mathrm{taz}(x, n)$ 函数在电阻网络等效电阻的研究中获得了重要应用.

作者将差分方程组用矩阵表示，并且构造了相应的矩阵变换方法——采用左乘矩阵的变换方法. 该方法的构造大大简化了电阻网络问题的研究.

在第 5 章中给出了二阶方阵 n 次幂的普适公式，得到了重要应用，为差分方程通解的研究提供了新的方法.

正是作者创造了以上这些基础数学理论的原创成果，才使得电阻网络等效电阻的普适公式研究获得了突破性进展. 这些基础数学理论的原创成果将成为人类解决科学问题的基本理论工具.

(注：在无特殊说明的情况下，文中所用到的 m，n，k，K，N 均为自然数.)

第 1 章　网络分析理论基础

关于电阻网络等效电阻的研究已有百年历史. 1826 年德国科学家欧姆(Geory Simon Ohm，1787—1854)发现欧姆定律 $I=U/R$，由此推动了电路的设计与研究. 为了求解复杂电路网络问题，1845 年 21 岁的德国物理学家基尔霍夫(G. R. Kirchhoff ，1824—1887)创立了节点电流定律(KCL)和回路电压定律(KVL)，分别被称为基尔霍夫第一定律和基尔霍夫第二定律，解决了电气设计和计算电路方面的难题. 随着科学的发展与进步，许多抽象的复杂问题需要通过建立直观的模型来解决，由于电阻网络模型符合物质世界的自然属性，并且其简洁性与直观性满足了人类思维的基本要求，因此电阻网络模型已经成为科学研究的基本模型.

1.1　网络模型类型与研究方法

电阻网络的类型较多，但按照一定的标准划分，规则连接的电阻网络类型还是可以归类的. 从网络单元数量的有限性来划分，可以将其分为有限网络和无限网络；从结构特征来划分，可以将其分为平面矩形网络(如图 1.1 所示)、平面蛛形网络(如图 1.2 所示)等；从空间维度特征来划分，可以将其分为二维平面网络(如图 1.1、图 1.2 所示)和三维立体网络(如图 1.3 所示). 研究发现，如图 1.1、图 1.2、图 1.3 所示的不同类型的规则连接的电阻网络，通常有等效电阻的普适公式. 研究不同类型网络等效电阻的普适公式是本书的主要目标.

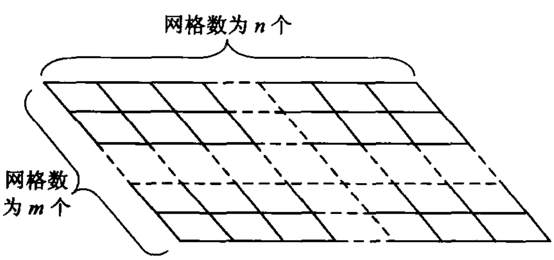


图 1.1　平面 $m\times n$ 阶矩形网络模型

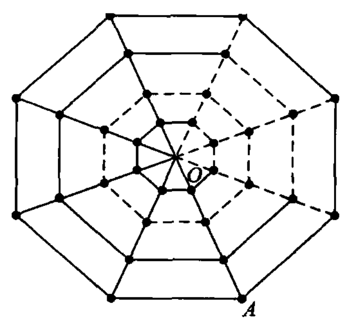


图 1.2　$m\times n$ 阶蛛形网络模型

不要小觑这些简洁而优美的网络模型，就如同我们不要小觑简洁的费马大定理(当 $n\geqslant 3$ 时，方程 $x^n+y^n=z^n$ 没有整数解)一样，一般的 $m\times n$ 阶矩形或蛛形网络等效电阻的普适公式是之前人类一直未能解决的科学难题. 本书旨在揭示研究此类电阻网络等效电阻的通用

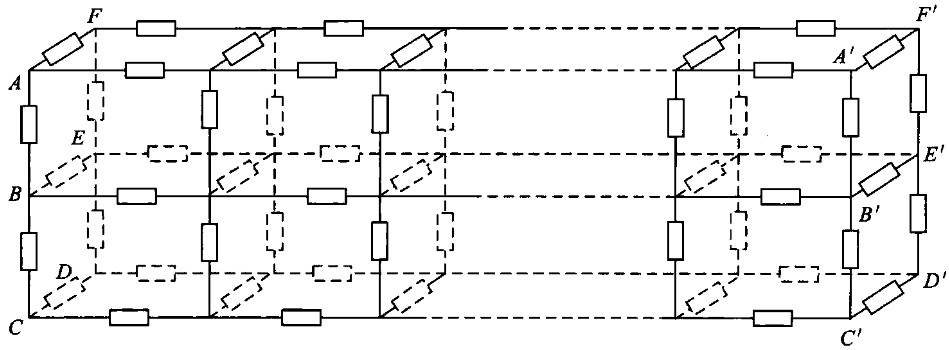


图 1.3 三维日×n 阶电阻网络模型

计算方法，完全解决等效电阻的普适公式这一科学难题. 根据作者长期的研究与探索，本书建立了计算 $m\times n$ 阶矩形(或蛛形)网络模型及三维立体网络模型等的等效电阻的通用方法. 其中使用的基尔霍夫定律包括节点电流定律(KCL)和回路电压定律(KVL)是电路分析的最基本定律.

作者根据多年的研究总结，概括出计算规则连接的电阻网络(包括平面网络和三维立体网络)等效电阻的通用方法如下：

(1) 网络分析. 根据 KCL、KVL 和元件 VCR，建立电流参数的差分方程组模型.

(2) 解方程. 根据适当的方法给出差分方程组的通解，可能涉及高次方程的解.

(3) 边界条件. 根据 KCL、KVL 和元件 VCR，建立边界条件的差分方程组模型.

(4) 边界电流的通解. 基于电流连续性方程，结合差分方程组的通解，综合计算.

(5) 根据适当方法求出所求节点间的电压表达式，应用欧姆定律计算等效电阻.

上述五个步骤表明电阻网络等效电阻的研究是一项系统工程，涉及相关的电路理论知识与数学知识，其中数学方法的创新是关键. 对于 $m\times n$ 阶矩形或蛛形网络模型，当 m 比较大时需要建立的方程(代数方程和差分方程)比较多(可能达到上百个)，具体的计算量非常庞大，需要严谨的科学态度.

1.2 基尔霍夫定律概述

1.2.1 复杂网络

并非所有的电路都能化简为串联和并联的组合，求解复杂网络问题的方法由德国物理学家基尔霍夫首先提出.

电路分析必须设定参考方向，变量参考方向又称正方向，电流的正方向是正电荷流动的方向. 参考方向的设定对电路分析没有影响.

下面解释几个与基尔霍夫定律有关的名词术语(以图 1.4 为例).

节点：三个或三个以上元件的连接点. 图 1.4 中有 a、b、c、d 四个节点。

支路：连接两个节点之间的电路. 图 1.4 中共有六条支路，每条支路有一个支路电流。

回路：电路中任一闭合路径. 图 1.4 中可以有七个回路。

网孔：内部不含支路的单孔回路．图 1.4 中有三个网孔回路 1、2、3，图中标出了三个网孔的绕行方向。

电路中的节点数、支路数和网孔数应该满足：网孔数＝支路数－节点数＋1.

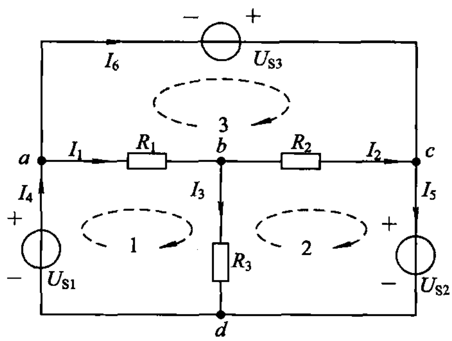


图 1.4　电路分析案例图

1.2.2　基尔霍夫定律

为了求解复杂电路网络问题，1845 年，21 岁的德国物理学家基尔霍夫创立了基尔霍夫第一定律和基尔霍夫第二定律.

基尔霍夫第一定律(KCL)，亦称节点电流定律——对于网络中任一节点，流入该节点的电流与流出该节点的电流的代数和为零，即

$$\sum I_i = 0 \tag{1.2-1}$$

基尔霍夫第二定律(KVL)，亦称回路电压定律——任一回路的电动势的代数和等于在这个回路中的 IR 乘积的代数和，即

$$\sum IR = \sum \varepsilon \tag{1.2-2}$$

基尔霍夫第一定律说明在网络的节点上不会有电荷积累．这其实是电流的恒定条件，它体现了电荷守恒．基尔霍夫定律可以用静电场的环路定理 $\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$ 以及普遍形式的欧姆定律 $j=\sigma(E+k)$ 来导出．它表明把单位正电荷沿回路移动一周，非静电力做的功等于电场力所做的功，这一点体现了能量守恒.

应用基尔霍夫定律解复杂网络的困难，不在于对定律本身物理内涵的理解，而在于对其中涉及代数和的各物理量，如电流、电动势的正、负的取法.

在节点电流定律中，依照通常的惯例，规定从节点流出的电流取正，流入节点的电流取负(或者相反，把流入节点的电流取正，流出节点的电流取负).

应用回路电压定律对回路列方程时：

(1) 先设定回路的绕行方向(譬如顺时针或逆时针).

(2) 如果支路电流流向与绕行方向相同，则 I 取正值；反之，I 取负值.

(3) 如果电动势的方向与绕行方向相同，则 ε 取正值；反之，ε 取负值.

以图 1.5 所示的电路为例，如果各元件的参量为已知，对所要求的三条支路的电流 I_1、I_2、I_3 标出假设的方向，再对两个闭合回路选定其绕行方向，如图 1.5 所示．应用基尔

霍夫第一定律，有

对节点 a：$I_1+I_2-I_3=0$

对节点 b：$-I_1-I_2+I_3=0$

对于两个回路，相对于标出的绕行方向，回路电压方程分别为

$$I_1(R_1+r_1)-I_2(R_2+r_2)=\varepsilon_1-\varepsilon_2$$

$$I_2(R_2+r_2)+I_3R_3=\varepsilon_2$$

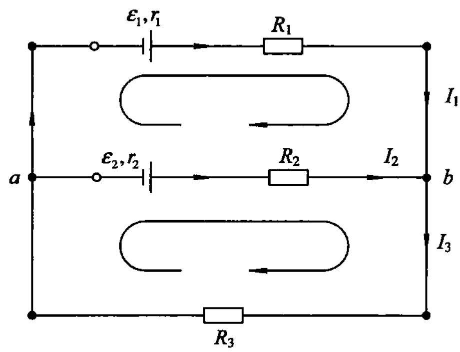


图 1.5　电路分析案例图

1.2.3　应用基尔霍夫定律的注意事项

复杂网络的典型问题是已知各电源和电阻求解各支路的电流．理论上应用基尔霍夫定律完全能解决复杂网络问题．在应用基尔霍夫定律时，必须注意以下几点：

(1) 对于有 n 个节点的复杂网络，其中只有 $n-1$ 个节点的电流方程是独立的，剩余 1 个节点的电流方程必然是这 $n-1$ 个节点的电流方程的叠加．

(2) 选取回路及写回路电压方程时，必须注意回路的独立性，即要选取独立回路．独立回路是指在新选定的回路中，至少有一段支路是在已选取的回路中未曾出现过的．这样的一组回路的电压方程组才是独立的．

(3) 独立方程的个数应等于所求未知数的个数．可以证明对于一个由 p 条支路、n 个节点组成的复杂网络，独立回路数必定为 $p-n+1$ 个．

(4) 支路上电流方向可以任意假定．计算结果电流如为负值，说明该支路中电流的实际方向与原假定方向相反．

在某些实际的电路网络计算中，运用由基尔霍夫定律导出的一些定理，如等效电源定理、叠加定理、置换定理、Y－△变换等，可以使计算大为简化．由于本书基本不涉及这些定理，故这里不再介绍．有关这方面的内容，可参考有关电路分析方面的书籍．

1.3　二端口网络的 T 参数方程

端口：从端子 1 流入的电流等于从端子 1′流出的电流，则 1 和 1′两个端子构成一个端口，该端口与元件构成的整体称为二端网络(或单口网络)．如果一个二端网络的伏安关系与另外一个二端网络的伏安关系完全相同，则称这两个二端网络等效．

二端口网络(双口网络)：一对端子 $1-1'$为输入端子，一对端子 $2-2'$为输出端子，这种具有输入和输出端口的网络被称为双口网络. 变压器、滤波器、运算放大器等均属于双口网络. 双口网络示意图如图 1.6 所示.

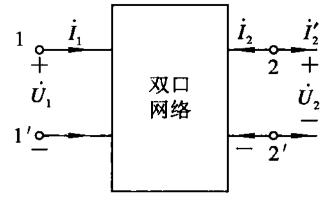


图 1.6　双口网络示意图

本节所研究的二端口网络，由线性元件 R、L、C 及受控源组成，不含有独立电源和初始值构成的附加电源. 当二端口网络不含受控源时，称为无源线性双口网络. 这里只研究二端口网络的 T 参数方程(传输参数方程).

1.3.1　二端口网络的 T 参数方程(传输参数方程)

根据图 1.6 所示的双口网络，可以得到两个端口处的电流、电压之间的关系方程为

$$\begin{cases}\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 - B\dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 - D\dot{I}_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2' \\ \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2'\end{cases} (\dot{I}_2' = -\dot{I}_2)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\dot{U}_1 \\ \dot{I}_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A & B \\ C & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2'\end{bmatrix} = \boldsymbol{T}\begin{bmatrix}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2'\end{bmatrix}$$

$$T \stackrel{\text{def}}{=\!=} \begin{bmatrix}A & B \\ C & D\end{bmatrix}$$

此即为 $\boldsymbol{T}$ 参数矩阵或双口网络传输矩阵.

1. $\boldsymbol{T}$ 参数的测定

$$\begin{cases}A = \left.\dfrac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}\right|_{\dot{I}_2=0} \text{(开路电压比)} \\ B = \left.\dfrac{\dot{U}_1}{-\dot{I}_2}\right|_{\dot{U}_2=0} \text{(短路转移阻抗)}\end{cases},\quad \begin{cases}C = \left.\dfrac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2}\right|_{\dot{I}_2=0} \text{(开路转移导纳)} \\ D = \left.\dfrac{\dot{I}_1}{-\dot{I}_2}\right|_{\dot{U}_2=0} \text{(短路电流比)}\end{cases}$$

2. $\boldsymbol{T}$ 参数的特点

(1) A、B、C、D 都具有转移函数性质；

(2) 无源线性二端口，A、B、C、D 4 个参数中只有 3 个是独立的：$AD-BC=1$；

(3) 如果是对称二端口，还将有 $A=D$.

1.3.2　二端口的级联

实现一个复杂的二端口，可以用简单的二端口作为“积木块”，把它们按一定方式连接成为具有所需特性的二端口.

如果无源二端口 P_1、P_2、…、P_n 按 n 个级联方式连接构成复合二端口，如图 1.7 所示，则复合二端口各级网络的 $\boldsymbol{T}$ 参数分别为

$$\boldsymbol{T}_1 = \begin{bmatrix}A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{T}_2 = \begin{bmatrix}A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2\end{bmatrix},\ \cdots,\ \boldsymbol{T}_n = \begin{bmatrix}A_n & B_n \\ C_n & D_n\end{bmatrix}$$

所以

$$\begin{bmatrix}\dot{U}_1 \\ \dot{I}_1\end{bmatrix} = \boldsymbol{T}_1\begin{bmatrix}U_2 \\ \dot{I}_2\end{bmatrix} = \boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_2\begin{bmatrix}U_3 \\ \dot{I}_3\end{bmatrix}\cdots = (\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_2\cdots\boldsymbol{T}_{n-1}\boldsymbol{T}_n)\begin{bmatrix}\dot{U}_{n+1} \\ \dot{I}_{n+1}\end{bmatrix}$$

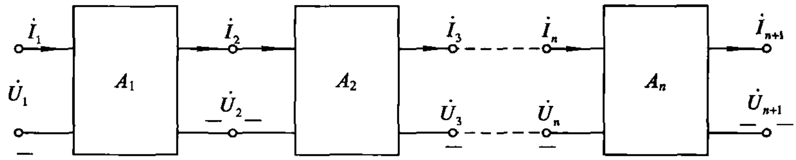


图 1.7 无源二端口网络的 n 个级联模型

记 $\boldsymbol{T}^n=\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_2\cdots\boldsymbol{T}_{n-1}\boldsymbol{T}_n$，即

$$\boldsymbol{T}^n=\begin{bmatrix}A_1 & B_1\\ C_1 & D_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_2 & B_2\\ C_2 & D_2\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}A_n & B_n\\ C_n & D_n\end{bmatrix}$$

特别地，如果每个级联方式都是完全相同的，即

$$\begin{bmatrix}A_1 & B_1\\ C_1 & D_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_2 & B_2\\ C_2 & D_2\end{bmatrix}=\cdots=\begin{bmatrix}A_n & B_n\\ C_n & D_n\end{bmatrix}$$

则可以得到(由第 5 章得到)

$$T^n=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}J_{n+1}-DJ_n & BJ_n\\ CJ_n & J_{n+1}-AJ_n\end{bmatrix}$$

设 λ_1、λ_2 是方程 $|\lambda E-\boldsymbol{T}|=0$ 的两个根，对于判别式 $\Delta=(A-D)^2+4BC$ 的不同情形，J_n 有不同的结果(此结论由第 5 章得到). 可总结如下：

(1) 当 $\Delta\neq 0$ 时，有 $J_n=\dfrac{\lambda_1^n-\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}$；

(2) 当 $\Delta=0$ 时，有 $J_n=n\lambda_1^{n-1}$；

(3) 当 $\Delta<0$ 时，有 $J_n=(\sqrt{AD-BC})^{n-1}\dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}$，其中 $\theta=\arccos\dfrac{A+D}{2\sqrt{AD-BC}}$.

如果第 N 个级联网络的右端接负载 R_0，则 $U_{n+1}=R_0 I_{n+1}$. 所以可得

$$\begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{I}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}^n\begin{bmatrix}\dot{I}_{n+1}R_0\\ \dot{I}_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}J_{n+1}-DJ_n & BJ_n\\ CJ_n & J_{n+1}-AJ_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{I}_{n+1}R_0\\ \dot{I}_{n+1}\end{bmatrix}$$

解得

$$\begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{I}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[R_0J_{n+1}+(B-DR_0)J_n]\dot{I}_{n+1}\\ [J_{n+1}+(CR_0-A)J_n]\dot{I}_{n+1}\end{bmatrix}$$

则等效电阻为

$$R_1(n)=\frac{U_1}{I_1}=\frac{R_0J_{n+1}+(B-DR_0)J_n}{J_{n+1}+(CR_0-A)J_n}$$

则有端接二端口的转移函数分别为

转移导纳 $$\frac{I_{n+1}(s)}{U_1(s)}=\frac{1}{R_0J_{n+1}+(B-DR_0)J_n}$$

转移阻抗 $$\frac{U_{n+1}(s)}{I_1(s)}=\frac{R_0}{J_{n+1}+(CR_0-A)J_n}$$

电流转移函数 $$\frac{I_{n+1}(s)}{I_1(s)}=\frac{1}{J_{n+1}+(CR_0-A)J_n}$$

电压转移函数 $$\frac{U_{n+1}(s)}{U_1(s)}=\frac{R_0}{R_0J_{n+1}+(B-DR_0)J_n}$$