北大燕园

2012年 李永乐·李正元

考研数学③

数学

数学三

【经济类】

复习全书习题全解

主编 北京大学 刘西垣
清华大学 李永乐
中国人民大学 袁荫棠

赠

特殊防伪
盗版书将丢失重要信息

ISBN 978-7-80140-713-9
9 787801 407139
定价：53.80元

国家行政学院出版社

2012年李永乐·李正元考研数学③

赠

数学复习全书习题全解

【数学三】 经济类

主编 北 京 大 学 刘西垣
清 华 大 学 李永乐
中国人民大学 袁荫棠

编者 （按姓氏笔画）
北 京 大 学 李正元
清 华 大 学 李永乐
北 京 大 学 刘西垣
中 国 人 民 大 学 严 颖
北 京 大 学 范培华
中 国 人 民 大 学 袁荫棠

国家行政学院出版社
·北 京·

目　录

第一篇　微积分

第一章　函数、极限、连续 …… (1)
第二章　一元函数微分学 …… (12)
第三章　一元函数积分学 …… (33)
第四章　多元函数微积分学 …… (41)
第五章　无穷级数 …… (49)
第六章　常微分方程与差分方程 …… (54)

第二篇　线性代数

第一章　行列式 …… (62)
第二章　矩阵及其运算 …… (64)
第三章　n 维向量 …… (68)
第四章　线性方程组 …… (74)
第五章　矩阵的特征值与特征向量 …… (78)
第六章　二次型 …… (82)

第三篇　概率论与数理统计

第一章　随机事件和概率 …… (87)
第二章　随机变量及其分布 …… (91)
第三章　多维随机变量的分布 …… (96)
第四章　随机变量的数字特征 …… (104)
第五章　大数定律和中心极限定理 …… (112)
第六章　数理统计的基本概念 …… (113)
第七章　参数估计 …… (115)

第一篇　微积分

▶ 第一章　函数、极限、连续

一、选择题

1.【分析】　反证法．若$\frac{\varphi(x)}{f(x)}$在 $x=a$ 连续，由连续函数的四则运算法则可得 $\varphi(x)=\frac{\varphi(x)}{f(x)}\cdot f(x)$ 必在 $x=a$ 连续，与假设 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 间断矛盾，从而$\frac{\varphi(x)}{f(x)}$必在 $x=a$ 间断．故选(D)．

也可用举例法来否定(A)，(B)，(C) 三个选项，例如：设 $f(x)\equiv 1,\varphi(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$则 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$连续，$\varphi(x)$ 在 $x=0$ 间断，但 $\varphi[f(x)]\equiv 1(\forall x\in(-\infty,+\infty))$ 成立，$f[\varphi(x)]\equiv 1(\forall x\in(-\infty,+\infty))$ 成立，$\varphi^2(x)\equiv 1(\forall x\in(-\infty,+\infty))$ 成立．这表明不应选(A)，(B)，(C)．

2.【分析】　由 $||f(x)|-|f(a)||\leqslant|f(x)-f(a)|$ 可知当 $f(x)$ 在 $x=a$ 连续可推知 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 连续；而由 $f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant a,\\ -1 & x<a\end{cases}$知 $|f(x)|\equiv 1(\forall x\in(-\infty,+\infty))$ 成立，从而 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 连续，但 $f(x)$ 却在 $x=a$ 间断.

以上讨论表明"$f(x)$ 在点 a 连续"是 $|f(x)|$ 在点 a 处连续的充分非必要的条件．应选(B)．

3.【分析】　由已知条件 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{\frac{1}{x_n}}=0$ 可知，当$\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$是无穷小量时 $\{y_n\}$ 是较$\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$高阶的无穷小量，即(D) 正确．

也可用举例法来否定(A)，(B)，(C) 三个选项．

例如：设 $x_n=n,y_n=0(n=1,2,3,\cdots)$，于是 $\{x_n\}$ 发散，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，但 $\{y_n\}$ 收敛．这表明(A) 不正确．

设 $x_n=\begin{cases}0, & n\text{ 为奇数},\\ n, & n\text{ 为偶数},\end{cases}y_n=\begin{cases}n, & n\text{ 为奇数},\\ 0, & n\text{ 为偶数},\end{cases}$则 $\{x_n\}$ 无界且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，但 $\{y_n\}$ 也无界．这表明(B) 不正确．

设 $x_n=\begin{cases}1, & n\text{ 为奇数},\\ 0, & n\text{ 为偶数},\end{cases}y_n=\begin{cases}\frac{1}{n}, & n\text{ 为奇数},\\ n, & n\text{ 为偶数},\end{cases}$则 $\{x_n\}$ 有界且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，但 $\{y_n\}$ 并非无穷小量．这表明(C) 不正确．

4.【分析】　设 $x_n=n\pi(n=1,2,3,\cdots)$，则 $f(x_n)=0(n=1,2,3,\cdots)$；

设 $y_n=2n\pi+\frac{\pi}{2}(n=1,2,3,\cdots)$，则 $f(y_n)=2n\pi+\frac{\pi}{2}(n=1,2,3,\cdots)$．这表明结论(A)，(B)，(D) 都不正确，而(C) 正确．

5.【分析】　注意当 $x\in(-1,0)$ 时有

$$|f(x)| = \left|\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}\right| = \left|\frac{\sin(x-2)}{x-2}\right| \cdot \frac{1}{|(x-1)(x-2)|}$$

$$< \frac{1}{|(x-1)(x-2)|} < \frac{1}{2}.$$

这表明 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 内有界. 故应选(A).

也可以计算极限:

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to2^-} f(x) = -\infty$, 故 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$ 内都是无界的.

6.【分析】 由计算可得 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$,

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} x e^{-\frac{1}{x}} \xlongequal{t=-\frac{1}{x}} -\lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t} \xlongequal{\frac{\infty}{\infty}} -\lim_{t\to+\infty} e^t = -\infty.$$ 故应选(D).

7.【分析】 $$\frac{1}{ax^2+bx+c} = o\left(\frac{1}{x}\right)(x\to\infty) \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{ax^2+bx+c}}{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{x}{ax^2+bx+c} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+bx+c}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(ax+\frac{c}{x}\right)+b = \infty$$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} ax = \infty\ (\forall b,c)$ 成立 $\Leftrightarrow$ $a\neq0$, b 与 c 任意. 故应选(C).

8.【分析】 计算可得

$$f(0+0) = \lim_{x\to0^+} \frac{x^2-x}{|x|(x^2-1)} = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x+1} = 1,$$

$$f(0-0) = \lim_{x\to0^-} \frac{x^2-x}{|x|(x^2-1)} = -\lim_{x\to0^-} \frac{1}{x+1} = -1,$$

由 $f(0+0)$ 与 $f(0-0)$ 存在但不相等, 故 $x=0$ 不是 $f(x)$ 的可去间断点. 应选(B).

9.【分析】 由题设可知 $\lim\limits_{x\to0} g(x) = \lim\limits_{x\to0} f\left(\frac{1}{x}\right) \xlongequal{x=\frac{1}{t}} \lim\limits_{t\to\infty} f(t) = a$, 从而当 $a=0$ 时 $g(x)$ 在 $x=0$ 连续, 当 $a\neq0$ 时 $g(x)$ 在 $x=0$ 间断. 即 $g(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关. 故应选(D).

10.【分析】 因 $$\lim_{x\to0^+} \frac{\beta}{\alpha} = \lim_{x\to0^+} \frac{\int_0^x (1-\cos\sqrt{t})\,dt}{\tan x - x} = \lim_{x\to0^+} \frac{1-\cos\sqrt{x}}{\frac{1}{\cos^2 x}-1}$$

$$= \lim_{x\to0^+} \cos^2 x \lim_{x\to0^+} \frac{1-\cos\sqrt{x}}{\sin^2 x} = +\infty,$$

即当 $x\to0^+$ 时 α 是比 β 高阶的无穷小量, α 与 β 应排列为 β,α. 故可排除(A)与(D).

又因 $$\lim_{x\to0^+} \frac{\gamma}{\alpha} = \lim_{x\to0^+} \frac{\left(\frac{2-x^3}{2}\right)^x - 1}{\tan x - x} = \lim_{x\to0^+} \frac{e^{x\ln\left(1-\frac{x^3}{2}\right)}-1}{\tan x - x} = \lim_{x\to0^+} \frac{x\ln\left(1-\frac{x^3}{2}\right)}{\tan x - x} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to0^+} \frac{x^4}{\tan x - x}$$

$$= -2\lim_{x\to0^+}\frac{x^3}{\dfrac{1}{\cos^2 x}-1} = -2\lim_{x\to0^+}\cos^2 x\lim_{x\to0^+}\frac{x^3}{\sin^2 x} = 0,$$

即当 $x\to0^+$ 时 γ 是较 α 高阶的无穷小量，α 与 γ 应排列为 α,γ．可排除(B)，即应选(C)．

二、填空题

1.【分析】 $$\lim_{x\to0}[\delta K^{-x}+(1-\delta)L^{-x}]^{-\frac{1}{x}} \overset{1^\infty}{=\!=} e^{-\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln[\delta K^{-x}+(1-\delta)L^{-x}]}{x}} = e^{-\lim\limits_{x\to0}\frac{\delta K^{-x}+(1-\delta)L^{-x}-1}{x}}$$
$$= e^{\delta\lim\limits_{x\to0}\frac{K^{-x}-1}{-x}+(1-\delta)\lim\limits_{x\to0}\frac{L^{-x}-1}{-x}} = e^{\delta\ln K+(1-\delta)\ln L} = K^{\delta}L^{1-\delta}.$$

2.【分析】 对任何常数 a 和 b，$f(x)$ 分别在 $(-\infty,0]$，$(0,+\infty)$ 连续，且 $f(0)=a$，$f_+(0)=b$．故 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续 $\Leftrightarrow$ $f(0)=f_+(0)$ $\Leftrightarrow$ $a=b$．

3.【分析】 $\forall k>0$，有

$$\lim_{x\to0}\frac{1+x^2-e^{x^2}}{x^k} = \frac{1}{k}\lim_{x\to0}\frac{2x-2x\,e^{x^2}}{x^{k-1}} = \frac{2}{k}\lim_{x\to0}\frac{1-e^{x^2}}{x^{k-2}} = -\frac{2}{k}\lim_{x\to0}x^{4-k} = \begin{cases}0, & 0<k<4,\\ -\dfrac{2}{k}, & k=4,\\ \infty, & k>4.\end{cases}$$

即 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+x^2-e^{x^2}}{x^4} = -\dfrac{1}{2}\neq0$，故当 $x\to0$ 时 $1+x^2-e^{x^2}$ 是 x 的 4 阶无穷小．

或用 e^{x^2} 的泰勒展开式 $e^{x^2}=1+x^2+\dfrac{x^4}{2}+o(x^4)$，由 $1+x^2-\left[1+x^2+\dfrac{x^4}{2}+o(x^4)\right]$ 可知其为 x 的 4 阶无穷小．

4.【分析】 $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = 9 \Leftrightarrow e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\frac{x+a}{x-a}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\frac{x+a}{x-a}-1\right)} = e^{2a\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x-a}} = e^{2a} \overset{令}{=\!=} 9 \Leftrightarrow$$
$a=\ln3$．

或 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2a}{x-a}\right)^x = e^{2a} = 9 \Rightarrow a=\ln3$．

5.【分析】 因 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{f(3x)} = 2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(3x)}{x} = \dfrac{1}{2}$，

故 $$\lim_{x\to0}\frac{f(2x)}{x} \overset{2x=3y}{=\!=\!=} \lim_{y\to0}\frac{f(3y)}{\frac{3}{2}y} = \frac{2}{3}\lim_{y\to0}\frac{f(3y)}{y} = \frac{2}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

6.【分析】 注意，当 $a>1$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=+\infty$，当 $0<a<1$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$．从而
$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{a^n+2}-\sqrt{a^n+1}) \overset{a>1}{=\!=\!=} \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(a^n+2)-(a^n+1)}{\sqrt{a^n+2}+\sqrt{a^n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{a^n+2}+\sqrt{a^n+1}} = 0$．又当 $a=1$ 时 $\sqrt{a^n+2}-\sqrt{a^n+1}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，故当 $a=1$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{a^n+2}-\sqrt{a^n+1})=\sqrt{3}-\sqrt{2}$．

当 $0<a<1$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{a^n+2}-\sqrt{a^n+1})=\sqrt{2}-1$，综合得

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{a^n+2}-\sqrt{a^n+1})=\begin{cases}0, & a>1,\\ \sqrt{3}-\sqrt{2}, & a=1,\\ \sqrt{2}-1, & 0<a<1.\end{cases}$$

7.【分析】 注意,当 $|x|>1$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=+\infty$,当 $|x|<1$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=0$,从而当 $|x|>1$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{-2n}}{1+x^{-2n}}=1$,当 $|x|<1$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}=-1$,而当 $|x|=1$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}=0$.

综合得 $$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}x=x\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}=\begin{cases}x, & |x|>1,\\ 0, & |x|=1,\\ -x, & |x|<1.\end{cases}$$

8.【分析一】 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\dfrac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\left[1+\dfrac{1}{(1-2a)n}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\dfrac{1}{(1-2a)n}=\dfrac{1}{1-2a}$.

【分析二】 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[1+\dfrac{1}{(1-2a)n}\right]^{(1-2a)n\cdot\frac{1}{1-2a}}=\dfrac{1}{1-2a}\ln e=\dfrac{1}{1-2a}$.

9.【分析】

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-2x^2}{x^5}=\lim_{x\to0}\frac{xf(x)-2x^3}{x^6}=\lim_{x\to0}\frac{xf(x)+\ln(1-2x^3)-2x^3-\ln(1-2x^3)}{x^6}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{xf(x)+\ln(1-2x^3)}{x^6}-\lim_{x\to0}\frac{2x^3+\ln(1-2x^3)}{x^6}=3-\lim_{x\to0}\frac{2x^3+\ln(1-2x^3)}{x^6}.$$

令 $2x^3=y$,则

$$\lim_{x\to0}\frac{2x^3+\ln(1-2x^3)}{x^6}=\lim_{y\to0}\frac{y+\ln(1-y)}{\left(\frac{y}{2}\right)^2}=4\lim_{y\to0}\frac{y+\ln(1-y)}{y^2}$$

$$=2\lim_{y\to0}\frac{1-\frac{1}{1-y}}{y}=-2\lim_{y\to0}\frac{1}{1-y}=-2.$$

故 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-2x^2}{x^5}=3+2=5$.

三、求下列极限

1.【解】 $$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}=\lim_{x\to0}\frac{(1+x\sin x)-1}{e^{x^2}-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x\sin x}+1}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{e^{x^2}-1}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x^2}{e^{x^2}-1}\cdot\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}.$$

或用等价无穷小因子替换,得 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x\sin x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

2.【解】 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{t}{n}+\dfrac{t^2}{2n^2}\right)^{-n}=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{t}{n}+\dfrac{t^2}{2n^2}\right)^n}$,又

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{t}{n}+\frac{t^2}{2n^2}\right)^n=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\left(1+\frac{t}{n}+\frac{t^2}{2n^2}\right)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{t}{n}+\frac{t^2}{2n^2}\right)}=e^{t+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{t^2}{2n}}=e^t,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{t}{n}+\dfrac{t^2}{2n^2}\right)^{-n}=e^{-t}$.

3.【解】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}-\dfrac{x}{e}\right]=\dfrac{1}{e}\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{e}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x}-1\right)\xlongequal{\frac{1}{x}=t}\dfrac{1}{e}\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\dfrac{e}{(1+t)^{\frac{1}{t}}}-1}{t}$

$$=\frac{1}{e}\lim_{t\to0^+}\frac{e^{1-\frac{\ln(1+t)}{t}}-1}{t}=\frac{1}{e}\lim_{t\to0^+}\frac{1-\dfrac{\ln(1+t)}{t}}{t}$$

$$=\frac{1}{e}\lim_{t\to0^+}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}=\frac{1}{2e}\lim_{t\to0^+}\frac{1-\dfrac{1}{1+t}}{t}$$

$$=\frac{1}{2e}\lim_{t\to0^+}\frac{1}{1+t}=\frac{1}{2e}.$$

4.【解】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-x^2\cos x-1}{\sin(x^2)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1-x^2\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}-\lim\limits_{x\to0}\cos x=-\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{3}{2}.$

5.【解】 设 $J=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)}{\ln x}$,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}=e^J$,且 J 是“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型未定式.用洛必达法则计算可得

$$J=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\dfrac{1}{1+x^2}}{\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{(1+x^2)\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)}$$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)-1},$$

又因 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}=1$,于是 $J=-\dfrac{1}{2-1}=-1$.

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{-1}$.

6.【解】 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\tan x\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}=e^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0^+}\tan x\cdot\ln x}=e^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x}$.

又因 $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=-\lim\limits_{x\to0^+}x=0$,代入即得 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x}=e^0=1$.

7.【解】 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{2x}=\dfrac{1}{2}$.

8.【解】 $\lim\limits_{x\to-\infty} x(\sqrt{x^2+100}+x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x(x^2+100-x^2)}{\sqrt{x^2+100}-x}=100\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x\left(\dfrac{\sqrt{x^2+100}}{x}-1\right)}$

$$=-100\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\dfrac{\sqrt{x^2+100}}{|x|}+1}=-50.$$

9.【解】 $\lim\limits_{x\to0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}\xlongequal{1^\infty}e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(x+e^x)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x+e^x-1}{x}}=e^{1+\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}}=e^2$.

10.【解】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[(x+2)e^{\frac{1}{x}}-x\right]=\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\left(1+\dfrac{2}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}-1\right]\xlongequal{x=\frac{1}{t}}\lim\limits_{t\to0}\dfrac{(1+2t)e^t-1}{t}$

$$=\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}+2\lim_{t\to0}e^t=3.$$

11.【解】 对 $n=1,2,\cdots$ 有 $\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\dfrac{(n+1)^2-n^2}{n^2(n+1)^2}=\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}$,从而

$$\frac{3}{1^2\cdot2^2}+\frac{5}{2^2\cdot3^2}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right]$$

$$=1-\frac{1}{(n+1)^2}.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{3}{1^2\cdot2^2}+\dfrac{5}{2^2\cdot3^2}+\cdots+\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}\right]=1$.

12.【解】 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{1}\dfrac{\cos2t}{t^2}dt=\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{1}\dfrac{1}{t^2}dt-2\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{1}\dfrac{\sin^2t}{t^2}dt=+\infty$,

故属 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式.用洛必达法则,得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_{\frac{1}{x}}^{1}\frac{\cos2t}{t^2}dt=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos\dfrac{2}{x}}{\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\cos\frac{2}{x}=1.$$

13.【解】 本题是 $\infty-\infty$ 型未定式,提出无穷大因子 x^2 后作变量替换 $x=\dfrac{1}{t}$,可得

$$\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{x\to\infty}x^2\left[\frac{1}{x}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]\xlongequal{\frac{1}{x}=t}\lim_{t\to0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to0}\frac{1-\dfrac{1}{1+t}}{t}=\frac{1}{2}\lim_{t\to0}\frac{1}{1+t}=\frac{1}{2}.$$

14.【解】 设常数 $a\neq0$,先求 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\left[\ln\left(1+\dfrac{a}{x}\right)\right]$. 令 $\dfrac{1}{x}=t$,于是 $t\to0$,由等价无穷小关系,得

$$\sin\left[\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)\right]=\sin[\ln(1+at)]\sim\ln(1+at)\sim at,$$

从而 $$\lim_{x\to\infty} x\sin\left[\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)\right] = \lim_{t\to 0}\frac{\sin[\ln(1+at)]}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{at}{t} = a.$$

代入即得 $$w = \lim_{x\to\infty} x\sin\left[\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right] - \lim_{x\to\infty} x\sin\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = 3-1 = 2.$$

评注 本题是求某类含参数极限的一种方法．即：若对一定范围内的常数 a，有 $\lim g(x)f(a,x) = I_a$，则当 a,b 都在此范围内时 $\lim g(x)[f(a,x)-f(b,x)] = I_a - I_b$．

15.【解】 用当 $\square\to 0$ 时的等价无穷小替换 $e^{\square}-1\sim\square$ 与 $\ln(1+\square)\sim\square$ 化简所求极限．

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{3+2\cos x}{5}\right)^x - 1\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{3+2\cos x}{5}\right)^x - 1}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln\left(\frac{3+2\cos x}{5}\right)} - 1}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x\ln\left(\frac{3+2\cos x}{5}\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{3+2\cos x}{5}\right)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{3+2\cos x}{5} - 1}{x^2} = \frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{5}.$$

16.【解】 转化为适当的函数极限．令 $f(x) = \dfrac{\arctan x - \arctan\dfrac{x}{1+x}}{x^2}$，则

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x - \arctan\frac{x}{1+x}}{x^2} \xlongequal{\frac{0}{0}} \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{x}{1+x}\right)^2}\cdot\frac{1+x-x}{(1+x)^2}}{x}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{(1+x)^2+x^2}}{x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^2+x^2-(1+x^2)}{x(1+x^2)[(1+x)^2+x^2]}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2x+x^2}{x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}(2+x) = 1.$$

设 $x_n = \dfrac{1}{n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ 且 $x_n\neq 0(n=1,2,3,\cdots)$．又

$$f(x_n) = n^2\left(\arctan\frac{1}{n} - \arctan\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right) = n^2\left(\arctan\frac{1}{n} - \arctan\frac{1}{n+1}\right),$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$．

四、计算题

1.【解】 $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2} \xlongequal{\frac{0}{0}} \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-1}{2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \frac{1}{2}f''(0) = 1.$$

2.【解】 用夹逼定理，注意 $2,x$ 与 $\dfrac{x^2}{4}$ 的大小关系如下：

当 $0 \leqslant x \leqslant 2$ 时有 $\frac{x^2}{4} \leqslant x \leqslant 2$；当 $2 < x \leqslant 4$ 时有 $2 < x$ 且 $\frac{x^2}{4} \leqslant x$；当 $x > 4$ 时有 $2 < x < \frac{x^2}{4}$.

从而当 $0 \leqslant x \leqslant 2$ 时， $2 \leqslant \sqrt[n]{2^n + x^n + \left(\frac{x^2}{4}\right)^n} = 2\sqrt[n]{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^n + \left(\frac{x^2}{8}\right)^n} \leqslant 2\sqrt[n]{3}$,

当 $2 < x \leqslant 4$ 时， $x \leqslant \sqrt[n]{2^n + x^n + \left(\frac{x^2}{4}\right)^n} = x\sqrt[n]{\left(\frac{2}{x}\right)^n + 1 + \left(\frac{x}{4}\right)^n} \leqslant x\sqrt[n]{3}$,

当 $x > 4$ 时， $\frac{x^2}{4} \leqslant \sqrt[n]{2^n + x^n + \left(\frac{x^2}{4}\right)^n} = \frac{x^2}{4}\sqrt[n]{\left(\frac{8}{x^2}\right)^n + \left(\frac{4}{x}\right)^n + 1} \leqslant \frac{x^2}{4}\sqrt[n]{3}$,

利用 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3} = 1$ 即得

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n + x^n + \left(\frac{x^2}{4}\right)^n} = \begin{cases} 2, & 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ x, & 2 < x \leqslant 4, \\ \frac{x^2}{4}, & x > 4. \end{cases}$$

3.【解】 利用等价无穷小因子替换，导数的定义与极限的四则运算法则求解.

$$\lim_{x\to0}\frac{f(1-\sqrt{\cos x})}{\ln(1-x\sin x)} = \lim_{x\to0}\frac{f(1-\sqrt{\cos x})-f(0)}{1-\sqrt{\cos x}}\cdot\frac{1-\sqrt{\cos x}}{\ln(1-x\sin x)}$$

$$\xlongequal{y=1-\sqrt{\cos x}}\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{\ln(1-x\sin x)}\lim_{y\to0}\frac{f(y)-f(0)}{y}$$

$$= f'(0)\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{-x\sin x}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{\cos x}} = -\frac{1}{2}f'(0)\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2} = -\frac{1}{4}f'(0).$$

4.【解】 由隐函数存在定理知，方程 $y^2 + xy + x^2 - x = 0$ 所确定的满足 $y(1) = -1$ 的连续函数必可导，从而

$$y' = -\frac{y+2x-1}{2y+x},\quad y'(1) = 0,\quad \lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{y+1}\xlongequal{\frac{0}{0}}\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)}{y'}.$$

将 y' 代入，则有

$$原式 = \lim_{x\to1}\frac{2(x-1)}{y'} = \lim_{x\to1}\frac{2(x-1)(2y+x)}{y+2x-1}$$

$$= -2\lim_{x\to1}\frac{2xy-2y+x^2-x}{y+2x-1}\xlongequal{\frac{0}{0}}-2\lim_{x\to1}\frac{2y+2xy'-2y'+2x-1}{y'+2}$$

$$= -2\left(-\frac{1}{2}\right) = 1.$$

5.【解】 因为

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{1+x\arcsin x-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x\arcsin x}+\sqrt{\cos x}}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\arcsin x}{x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{3}{4},$$

故当 $x\to0$ 时 $f(x)$ 的等价无穷小量是 $\frac{3}{4}x^2$，即 $A = \frac{3}{4}, k = 2$.

6.【解】 (Ⅰ) $y=(1+x)\arctan\dfrac{1}{1-x^2}$ 的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$，由初等函数连续性知 y 分别在 $(-\infty,-1),(-1,1),(1,+\infty)$ 内连续. 因 $\left|\arctan\dfrac{1}{1-x^2}\right|<\dfrac{\pi}{2}$,

$\lim\limits_{x\to1^-}\arctan\dfrac{1}{1-x^2}=\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to1^+}\arctan\dfrac{1}{1-x^2}=-\dfrac{\pi}{2}$，且 $\lim\limits_{x\to-1}(1+x)=0$，故

$$\lim_{x\to-1}y=\lim_{x\to-1}(1+x)\arctan\frac{1}{1-x^2}=0,$$

$$\lim_{x\to1^-}y=\lim_{x\to1^-}(1+x)\arctan\frac{1}{1-x^2}=2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi,\quad \lim_{x\to1^+}y=2\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\pi.$$

从而 $x=-1$ 与 $x=1$ 都是函数的第一类间断点，其中 $x=-1$ 是函数的可去间断点，$x=1$ 是函数的跳跃间断点.

(Ⅱ) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}=\begin{cases}1, & |x|>1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|<1,\end{cases}$ 从而 $y=\begin{cases}1-x, & |x|>1,\\ -x, & |x|=1,\\ -1-x, & |x|<1.\end{cases}$ 显然 $x=-1$ 与 $x=1$ 都是函数的第一类(跳跃)间断点.

(Ⅲ) 由初等函数的连续性及 y 的定义可知，y 分别在 $[-1,0)$ 与 $(0,+\infty)$ 连续. 又因

$$\lim_{x\to0^+}y=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to0^-}y=\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{1+x-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$=2\lim_{x\to0^-}\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=1,$$

故 y 仅有 $x=0$ 为第一类(可去)间断点.

(Ⅳ) 方法 1° 先写出 $f[g(x)]$ 的表达式. 考察 $g(x)$ 的值域：

$$g(x)\begin{cases}\leqslant 1, & x\leqslant 1,\\ >1, & x>1,\end{cases}\qquad f[g(x)]=\begin{cases}g^2(x), & x\leqslant 1,\\ 1-g(x), & x>1,\end{cases}$$

即 $f[g(x)]=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1,\\ 1-x, & 1<x\leqslant 2,\\ 1-2(x-1), & 2<x\leqslant 5,\\ 1-(x+3), & x>5,\end{cases}$ 亦即 $f[g(x)]=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1,\\ 1-x, & 1<x\leqslant 2,\\ 3-2x, & 2<x\leqslant 5,\\ -(x+2), & x>5.\end{cases}$

当 $x\neq1,2,5$ 时 $f[g(x)]$ 分别在不同的区间与某初等函数相同，故连续. 当 $x=2,5$ 时，分别由左、右连续得连续. 当 $x=1$ 时，$\lim\limits_{x\to1+0}f[g(x)]=\lim\limits_{x\to1+0}(1-x)=0$, $\lim\limits_{x\to1-0}f[g(x)]=\lim\limits_{x\to1-0}x^2=1$. 从而 $f[g(x)]$ 在 $x=1$ 不连续且是第一类间断点(跳跃间断点).

方法 2° 注意 $u=g(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 2,\\ 2(x-1), & 2<x\leqslant 5,\\ x+3, & x>5,\end{cases}$ 从而 $g(x)$ 处处连续；

$y=f(u)=\begin{cases}u^2, & u\leqslant 1,\\ 1-u, & u>1.\end{cases}$ 当 $u\neq1$ 时连续，由复合函数连续性可知，当 $g(x)\neq1$ 即 $x\neq1$ 时，$f[g(x)]$ 连续. 对 $x=1$，有

$$\lim_{x\to1+0}f[g(x)]\xlongequal{g(x)=x}\lim_{x\to1+0}f(x)=\lim_{x\to1+0}(1-x)=0,$$

$$\lim_{x\to1-0}f[g(x)]\xlongequal{g(x)=x}\lim_{x\to1-0}f(x)=\lim_{x\to1-0}x^2=1.$$

从而 $x=1$ 为 $f[g(x)]$ 的第一类间断点(跳跃间断点).

7.【分析】 已知此 $\infty-\infty$ 型未定式的极限存在且等于2,要确定极限式中的参数 a 与 b 有两种方法:方法1° 直接将所给无理式有理化定出极限式中所含参数之值; 方法2° 先提出 ∞ 因子,将 $\infty-\infty$ 型化为 $\infty\cdot 0$ 型,然后由极限存在的条件定出极限式中所含参数之值.

【解法一】 题目中的极限式可改写为

$$2=\lim_{x\to+\infty}(3x-\sqrt{ax^2+bx+1})=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2-(ax^2+bx+1)}{3x+\sqrt{ax^2+bx+1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(9-a)x^2-bx-1}{x}\cdot\frac{1}{3+\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{1}{x^2}}}$$

$$=\frac{1}{3+\sqrt{a}}\lim_{x\to+\infty}\left[(9-a)x-b-\frac{1}{x}\right]=\frac{9-a}{3+\sqrt{a}}\lim_{x\to+\infty}x-\frac{b}{3+\sqrt{a}}.$$

由此即知 $9-a=0,2=-\frac{b}{3+\sqrt{a}}$,故 $a=9,b=-2(3+\sqrt{a})=-12$.

【解法二】 原式可改写成 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(3-\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=2$. 由于上式成立,所以必有 $3-\sqrt{a}=0$,即 $a=9$. 将 $a=9$ 代入原式,并有理化得

$$\lim_{x\to+\infty}(3x-\sqrt{9x^2+bx+1})=\lim_{x\to+\infty}\frac{-bx-1}{3x+\sqrt{9x^2+bx+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-b-\frac{1}{x}}{3+\sqrt{9+\frac{b}{x}+\frac{1}{x^2}}}$$

$$=-\frac{b}{6}=2.$$

由此得 $b=-12$. 故 $a=9,b=-12$.

8.【解】 由题设知

$$0=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin3x+ax}{x^3}+b\right)=b+\lim_{x\to0}\frac{\sin3x+ax}{x^3}$$

$$\Leftrightarrow\quad\lim_{x\to0}\frac{\sin3x+ax}{x^3}=-b.\qquad(*)$$

利用(*),一方面有

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin3x+ax}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin3x+ax}{x^3}\cdot x^2=0,$$

另一方面,直接计算又有

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin3x+ax}{x}=3+a,$$

这表明 $3+a=0\quad\Leftrightarrow\quad a=-3$.

将 $a=-3$ 代入(*)式,即得

$$-b=\lim_{x\to0}\frac{\sin3x-3x}{x^3}=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{3\cos3x-3}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\cos3x-1}{x^2}=-\frac{3}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{x}=-\frac{9}{2}.$$

故 $b=\frac{9}{2}$. 综合得 $a=-3,b=\frac{9}{2}$.

9.【解】 由于 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{-\frac{x+1}{x}}=\frac{1}{e}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{2x}\cos t^2 dt}{x}=\lim\limits_{x\to 0}2\cos 4x^2=2$,又 $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=\frac{1}{2}$,从而 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=2f(0)$. 故 $I=2\left[\frac{f(0)}{e}+1\right]$.

五、证明题

1.【证明】 引入函数 $f(x)=x-a\sin x-b$,则 $f(x)=0$ 的根即方程 $x=a\sin x+b$ 的根. 因 $f(0)=-b<0$,而 $f(a+b)=a+b-a\sin(a+b)-b=a[1-\sin(a+b)]\geqslant 0$.

若 $f(a+b)=0$,则 $x=a+b>0$ 便是 $f(x)=0$ 的一个正根,若 $f(a+b)>0$,则由 $f(x)$ 在 $[0,a+b]$ 上的连续性可知,$\exists\xi\in(0,a+b)$,使 $f(\xi)=0$. 总之函数 $f(x)$ 在 $(0,a+b]$ 上至少有一个零点,即原方程至少有一个正根不超过 $a+b$.

2.【证明】 引入函数 $f(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x-5$,则 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续偶函数,且 $f(0)=-1<0$,$f'(x)=e^x-e^{-x}-2\sin x$,从而 $f'(0)=0$. 又 $f''(x)=e^x+e^{-x}-2\cos x=(\sqrt{e^x}-\sqrt{e^{-x}})^2+2(1-\cos x)>0(\forall x>0)$ 成立,由此可见 $f'(x)$ 当 $x\geqslant 0$ 时单调增加,于是 $f'(x)>f'(0)=0$ 当 $x>0$ 时成立. 这表明 $f(x)$ 在 $x\geqslant 0$ 是单调增加的. 注意 $f(\pi)=e^{\pi}+e^{-\pi}-7>2^3-7=1>0$,故根据闭区间上连续函数的性质可知 $f(x)=0$ 在 $(0,\pi)$ 内至少有一个根,结合 $f(x)$ 在 $x\geqslant 0$ 的单调性可知 $f(x)=0$ 有且仅有一个正根. 由 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上偶函数,$f(x)=0$ 还有且仅有一个负根. 故方程 $e^x+e^{-x}+2\cos x=5$ 恰有两个根.

3.【证明】 设函数 $f(x)=\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}$,则 $f(x)$ 的零点就是方程 $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0$ 的根. 因函数 $f(x)$ 分别在区间 (a,b) 与 (b,c) 内可导,且

$$f'(x)=-\frac{1}{(x-a)^2}-\frac{1}{(x-b)^2}-\frac{1}{(x-c)^2}<0,$$

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to b^-}f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to b^+}f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to c^-}f(x)=-\infty.$$

这表明在区间 (a,b) 内 $f(x)$ 的函数值从 $+\infty$ 单调减少到 $-\infty$,在区间 (b,c) 内 $f(x)$ 的函数值也从 $+\infty$ 单调减少到 $-\infty$,故 $f(x)$ 分别在 (a,b) 与 (b,c) 内有且仅有一个零点. 即方程 $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0$ 分别在 (a,b) 与 (b,c) 内有且仅有一个实根.

4.【证明】 利用闭区间上连续函数的最大、小值定理与介值定理证明本题.

令 $\eta=\frac{p}{p+q}f(c)+\frac{q}{p+q}f(d)$,则

$$pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi)\quad\Leftrightarrow\quad f(\xi)=\frac{p}{p+q}f(c)+\frac{q}{p+q}f(d)=\eta.$$

由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,而 $[c,d]\subset[a,b]$,可知 $f(x)$ 在 $[c,d]$ 上连续,于是 $\exists m=\min\limits_{x\in[c,d]}f(x)$,$M=\max\limits_{x\in[c,d]}f(x)$,从而

$$\eta\geqslant\frac{p}{p+q}m+\frac{q}{p+q}m=m,\quad \eta\leqslant\frac{p}{p+q}M+\frac{q}{p+q}M=M,$$

即 η 是 $f(x)$ 在 $[c,d]$ 上的值域 $[m,M]$ 上的一个值.

由闭区间上连续函数的最大、小值及介值定理可知,必 $\exists\xi\in[c,d]\subset(a,b)$,使 $f(\xi)=\eta$,即

$$pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi)\text{ 成立}.$$

5.【分析与证明】 即证：$F(x)\triangleq f(x)-f\left(x+\frac{1}{n}\right)$在$[0,1]$存在零点．因$f(x)$在$[0,1]$连续，所以$F(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{n}\right)$在$\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$连续．只要证明$F(x)$在$\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$存在零点即可$\left(\text{只须证}F(x)\text{在}\left[0,1-\frac{1}{n}\right]\text{有两点异号}\right)$．考察

$$\begin{cases} F(0)=f(0)-f\left(\frac{1}{n}\right), \\ F\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{2}{n}\right), \\ F\left(\frac{2}{n}\right)=f\left(\frac{2}{n}\right)-f\left(\frac{3}{n}\right), \\ \cdots\cdots \\ F\left(\frac{n-1}{n}\right)=f\left(\frac{n-1}{n}\right)-f(1), \end{cases} \quad \text{则 } F(0)+F\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots+F\left(\frac{n-1}{n}\right)=f(0)-f(1)=0.$$

于是$F(0),F\left(\frac{1}{n}\right),\cdots,F\left(\frac{n-1}{n}\right)$或全为0，或其中至少有两个值是异号的，于是由连续函数介值定理知，$\exists\xi\in\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$，使得$F(\xi)=0$，即$f(\xi)=f\left(\xi+\frac{1}{n}\right)$.

第二章　一元函数微分学

一、选择题

1.【分析】 反证法．设x_0是$P(x)=0$的最大实根，且$P'(x_0)<0$，$\Rightarrow\exists\delta>0$使$0<x-x_0<\delta$时$P(x)<0$，又$\lim\limits_{x\to+\infty}P(x)=+\infty$，由此可见$P(x)$在区间$\left[x_0+\frac{\delta}{2},+\infty\right)$必由取负值变为取正值，于是$\exists x_1>x_0$，使$P(x_1)=0$，与$x=x_0$是$P(x)=0$的最大实根矛盾．故应选(D)．

另外，该题也可以通过$P(x)=x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$的图形来进行判定．4次函数与$x$轴的交点有如下四种情况，由此可知$P'(x_0)\geqslant0$．

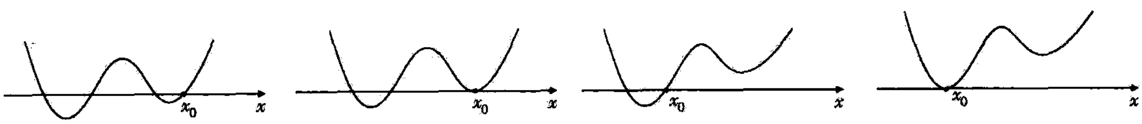

图 2－1

2.【分析】 因$3x^2$在$(-\infty,+\infty)$具有任意阶导数，所以$f(x)$与函数$g(x)=x^2|x|$具有相同最高阶数的导数．因

$$g(x)=\begin{cases} x^3, & x\geqslant0, \\ -x^3, & x\leqslant0, \end{cases}$$

从而 $$g'(x)=\begin{cases} 3x^2, & x>0, \\ -3x^2, & x<0, \end{cases}$$ 且$g'_+(0)=0,g'_-(0)=0$.

综合即得 $$g'(x)=\begin{cases} 3x^2, & x\geqslant0, \\ -3x^2, & x\leqslant0. \end{cases}$$

类似可得 $g''(x)=\begin{cases}6x, & x>0,\\ -6x, & x<0,\end{cases}$ 且 $g''_+(0)=0, g''_-(0)=0$.

综合即得 $g''(0)$ 存在且等于0,于是

$$g''(x)=\begin{cases}6x, & x\geqslant 0,\\ -6x, & x\leqslant 0,\end{cases} \Leftrightarrow g''(x)=6|x|.$$

由于 $g''(x)$ 在 $x=0$ 不可导,从而 $g(x)$ 存在的最高阶导数的阶数 $n=2$,即 $f(x)$ 存在的最高阶导数的阶数也是 $n=2$.故应选(C).

3.【分析】 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(4-x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(2+2-x)-f(2)}{x-2}$

$$\xlongequal{2-x=\Delta x}\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{-\Delta x}=-f'(2).$$

故应选(B).

4.【分析】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x_0-x)-f(x_0+x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x_0-x)-f(x_0)}{x}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0+x)}{x}$

$$=-\lim_{x\to0}\frac{f(x_0+x)-f(x_0)}{x}-\lim_{-x\to0}\frac{f(x_0-x)-f(x_0)}{-x}$$

$$=-f'(x_0)-f'(x_0)=-2f'(x_0).$$

故应选(C).

5.【分析】 因 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$,由极限的保号性质知,$\exists\delta>0$,使当 $0<|x|<\delta$ 时 $\dfrac{f(x)}{1-\cos x}>0$,由于 $1-\cos x>0\Rightarrow$ 当 $0<|x|<\delta$ 时 $f(x)>0$,又 $f(0)=0$,故 $f(x)$ 在 $x=0$ 取得极小值.故应选(D).

可以举反例来说明(A),(B)不正确.取 $f(x)=x\sin x$,满足 $f(0)=0$,$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$ 的条件,但 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,且 $f'(0)=0$,这与(A),(B)矛盾.

6.【分析】 由题设知 $f''(x)=-3[f'(x)]^2+\dfrac{1-e^{-x}}{x}$,又由 $f''(x)$ 存在可知 $f'(x)$ 连续,再由 $\dfrac{1-e^{-x}}{x}$ 在 $x=x_0\neq0$ 附近连续可知 $f''(x)$ 在 $x=x_0$ 附近连续,于是

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}f''(x)=\lim_{x\to x_0}\left(-3[f'(x)]^2+\frac{1-e^{-x}}{x}\right)=\frac{1-e^{-x_0}}{x_0}>0.$$

由 $f'(x_0)=0$ 及 $f''(x_0)>0$ 可知 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.故应选(B).

7.【分析】 令 $f(x)=\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$,$f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,-2)\cup(-2,1)\cup(1,+\infty)$,因 $|f(x)|<\dfrac{\pi}{2}$,从而 $x=1$ 与 $x=-2$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的渐近线.又因

$$\lim_{x\to\infty}\arctan\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}=\arctan1=\frac{\pi}{4},$$

故 $y=\dfrac{\pi}{4}$ 是曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线.综合知曲线 $y=f(x)$ 有且只有一条渐近线.选(A).

二、填空题

1.【分析】 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)\right|_{x=0}=f'\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)\cdot\left.\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)'\right|_{x=0}$

$$=f'(-1)\cdot\left.\frac{3(3x+2)-3(3x-2)}{(3x+2)^2}\right|_{x=0}=3f'(-1)=3\arctan(-1)^2=\frac{3}{4}\pi.$$

2.【分析】 $F'(x)=f(\mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^{-x})'-f(x^2)(x^2)'=-\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})-2xf(x^2)$.

3.【分析】 用数学归纳法. 由 $f'(x)=f^3(x)=1\cdot f^3(x)$ 求导得

$f''(x)=1\cdot 3f^2(x)f'(x)=1\cdot 3f^5(x)$,再求导又得

$f'''(x)=1\cdot 3\cdot 5f^4(x)f'(x)=1\cdot 3\cdot 5f^7(x)$,由此可猜想

$f^{(n)}(x)=1\cdot 3\cdots(2n-1)f^{2n+1}(x)=(2n-1)!!f^{2n+1}(x)(n=1,2,3,\cdots)$.

设 $n=k$ 上述公式成立,则有

$$f^{(k+1)}(x)=[f^{(k)}(x)]'=[(2k-1)!!f^{2k+1}(x)]'$$
$$=(2k-1)!!(2k+1)f^{2k}(x)f'(x)=(2k+1)!!f^{2k+3}(x),$$

由上述讨论可知

$f^{(n)}(x)=(2n-1)!!f^{2n+1}(x)$($\forall$ 自然数 n)成立.

4.【分析】 因 $y=\arctan x$ 是奇函数,且 y 具有任何阶连续导数,从而 y',y''' 是偶函数,y'',$y^{(4)}$ 是奇函数,故 $y^{(4)}(0)=0$.

5.【分析】 因为当 $a=0$ 时

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\frac{t^2\mathrm{d}t}{\sqrt{a^2+t^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{b-\cos x}\cdot\frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{b-\cos x}\cdot\frac{1}{|x|}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{b-\cos x}=\begin{cases}0, & b\neq 1,\\ \infty, & b=1,\end{cases}$$

又当 $a\neq 0$ 时,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a^2+t^2}}\mathrm{d}t=\lim_{x\to 0}\frac{1}{b-\cos x}\cdot\frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$$
$$=\frac{1}{|a|}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{b-\cos x}=\begin{cases}\dfrac{2}{|a|}, & b=1,\\ 0, & b\neq 1,\end{cases}$$

故 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\frac{t^2\mathrm{d}t}{\sqrt{a^2+t^2}}=4 \Leftrightarrow |a|=\frac{1}{2}$ 且 $b=1 \Leftrightarrow a=\pm\frac{1}{2}$ 且 $b=1$.

6.【分析】 由 $f(x)$ 的定义可知,当 $x\neq 0$ 时 $f'(x)=2x\ln|x|+x^2\cdot\frac{1}{x}=x(2\ln|x|+1)$,又 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}x\ln|x|=0$,$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln|x|=0$,即 $f'(0)=0$. 从而

$$f'(x)=\begin{cases}x(2\ln|x|+1), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

这表明 $f(x)$ 有三个驻点 $x_1=-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$,$x_2=0$,$x_3=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

列表讨论 $f(x)$ 的单调性如下: