2012

GAODENG SHUXUE JINGSAI JIAOCHENG

（第五版）

高等数学竞赛教程

卢兴江 金蒙伟 主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高等数学竞赛教程

（第五版）

主编　卢兴江　金蒙伟

编委　卢兴江　李银飞　应文隆

李　珏　钱　春

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学竞赛教程／卢兴江，金蒙伟主编. —5版. —杭州：浙江大学出版社，2007.12(2012.3重印)

ISBN 978-7-308-05658-8

Ⅰ.高… Ⅱ.①卢…②金… Ⅲ.高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第182370号

高等数学竞赛教程

卢兴江 金蒙伟 主 编

责任编辑 石国华

封面设计 刘依群

出版发行 浙江大学出版社

(杭州市天目山路148号 邮政编码310007)

(网址：http://www.zjupress.com)

排　　版 杭州星云光电图文制作工作室

印　　刷 杭州丰源印刷有限公司

开　　本 787mm×960mm 1/16

印　　张 16

字　　数 340千

版 印 次 2012年3月第5版 2012年3月第7次印刷

书　　号 ISBN 978-7-308-05658-8

定　　价 28.00元

序

浙江省大学生高等数学(微积分)竞赛是浙江省高等数学教育研究会主办的面向浙江省大学生的群众性科技活动,旨在激发大学生学习数学的积极性,提高学生运用数学知识解决问题的能力,培养学生的创新思维,推动大学数学教学体系、教学内容和方法的改革。

自2002年开赛以来连续举办了十届,参赛人数逐年增加。目前每年参赛学校60余所,参赛人数已超过万人。该赛事为一群众性科技活动,深受学生欢迎。为了让大家更好地了解浙江省高等数学(微积分)竞赛,帮助参赛学校和同学复习、交流、提高竞赛水平,特编写此书。

本书是一本参赛的指导书,同时也是一本学习微积分的复习书。我们对微积分的内容进行整理归纳出知识要点,并通过典型例题的解法分析加以综合,使读者对微积分的每个知识点得以融会贯通。每讲后还配了一定的练习题及参考答案,并附有历年的竞赛题和试卷评析。当前,我国从小学到高中都是围绕着升学的指标指挥棒转,学习为应试,其结果是:会套模式解题,不会尝试分析解决问题,长期的教育熏陶,使人形成了思维惯性。我们希望通过数学竞赛,通过本书的学习,能慢慢改变你的思维方式。数学需要运算能力、空间想象能力和抽象思维能力等,做习题对学好数学是重要的,在做运算难度大、步骤长及需要技巧的数学题的过程中有时最能获得数学知识,最能培养分析问题、解决问题的能力。看书和动手解题相结合必能使你学会如何去理解数学知识、如何去分析推理,从而对背景和题型稍新的数学问题不再束手无策,最终培养自己的数学思想,提高自身的数学基本素养,使自己成为具有分析问题解决问题能力的创新型人才。

本书第一讲由卢兴江(浙江大学数学系)编写,第二讲由钱春(浙江工商大学统计学院)编写,第三讲至第六讲由李银飞(浙江工商大学统计学院)编写,第七讲至第十三讲由李珏(浙江工商大学统计学院)编写,第十四讲由应文隆(浙江大学数学系)编写。由卢兴江、金蒙伟统稿。

对编写中存在的不当和错误之处,请读者批评指正,编者表示万分感谢!

金蒙伟

2012年3月15日

目　　录

第一讲 极 限

知识要点

(一)数列极限

1. 数列极限的定义：设$\{a_n\}$是$\mathbf{R}$中的一个数列. 如果存在$a \in \mathbf{R}$，使得对任意的$\varepsilon > 0$，存在正整数N，当$n > N$时，

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

则称a为数列$\{a_n\}$的**极限**，记作：

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \text{ 或 } a_n \to a(n \to \infty).$$

有极限的数列称为是**收敛**的，否则称为是**发散**的.

2. 数列极限的性质：

(1) 唯一性：如果数列$\{a_n\}$收敛，则其极限是唯一的.

(2) 有界性：若$\{a_n\}$收敛，则$\{a_n\}$有界.

(3) 保号性：设$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$，若$a > 0$，则存在正整数$N$及正数$\eta$，当$n > N$时，$a_n > \eta > 0$.

(4) 夹逼性：设数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$满足$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$，且$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} c_n = a$，则$\lim\limits_{n \to \infty} b_n = a$.

3. 数列极限的四则运算：设$\{a_n\}$，$\{b_n\}$皆收敛，$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$，$\lim\limits_{n \to \infty} b_n = b$，则有：

(1) $\lim\limits_{n \to \infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n \to \infty} a_n \pm \lim\limits_{n \to \infty} b_n = a \pm b$.

(2) $\lim\limits_{n \to \infty} k a_n = k \lim\limits_{n \to \infty} a_n = ka$($k$为常数).

(3) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n \to \infty} a_n}{\lim\limits_{n \to \infty} b_n} = \dfrac{a}{b}(b \neq 0)$.

4. 柯西(Cauchy)序列：设$\{a_n\}$是$\mathbf{R}$中的数列. 如果对于任意的$\varepsilon > 0$，存在正整数N，当$m, n > N$时，

$$|a_m - a_n| < \varepsilon,$$

则称$\{a_n\}$是**柯西序列**.

$\{a_n\}$收敛的充分必要条件是$\{a_n\}$为柯西序列.

5. 单调数列$\{a_n\}$收敛当且仅当$\{a_n\}$有界.

6. 子数列及其性质：

(1) 定义：设$\{a_n\}$是$\mathbf{R}$中的数列，$\{n_k\}$是正整数$\mathbf{Z}^+$的无限子集，且满足$n_1 < n_2 < \cdots$

$< n_k < \cdots$,则称$\{a_{n_k}\}$是$\{a_n\}$的一个**子数列**.

(2) 数列$\{a_n\}$收敛的充分必要条件是$\{a_n\}$的任意一个子数列收敛.

(3) 设$\{a_n\}$是$\mathbf{R}$中的一个数列,若$\{a_n\}$有界,则$\{a_n\}$存在收敛的子数列.

(二) 函数极限

1. 函数极限的定义:

(1) 设$f:D \to \mathbf{R}$,D为$\mathbf{R}$的子集且包含x_0的某个去心邻域$U^0(x_0,\delta_0)(\delta_0 > 0)$使得对任意的$\varepsilon > 0$,存在$\delta > 0$,当$x \in U^0(x_0,\delta) \cap D$时,即$0 < |x - x_0| < \delta$时,

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称A为$f(x)$**当x趋向于x_0时的极限**.记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A(x \to x_0).$$

如果$D \supset (x_0 - \delta, x_0)$,且对$\forall \varepsilon > 0$,$\exists \delta > 0$,当$x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap D$,即$-\delta < x - x_0 < 0$时,

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称f在x_0处有**左极限**A.记为

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A.$$

如果$D \supset (x_0, x_0 + \delta)$,且对$\forall \varepsilon > 0$,$\exists \delta > 0$,当$x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap D$,即$0 < x - x_0 < \delta$时,

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称f在x_0处有**右极限**A.记为

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A.$$

f在x_0处的左、右极限有时分别记为$f(x_0 - 0)$,$f(x_0 + 0)$.

(2) 设$f:D \to \mathbf{R}$,D为$\mathbf{R}$的子集.$A \in \mathbf{R}$,$a \in \mathbf{R}$,

如果$D \supset (a, +\infty)$,且对任意的$\varepsilon > 0$,存在$X > 0$,当$x \in (X, +\infty) \cap D$时,即$x > X$时,

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称A为$f(x)$**当x趋向于$+\infty$时的极限**.记为

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A(x \to +\infty).$$

如果$D \supset (-\infty, a)$,且对任意的$\varepsilon > 0$,存在$X > 0$,当$x \in (-\infty, -X) \cap D$时,即$x < -X$时,

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称A为$f(x)$**当x趋向于$-\infty$时的极限**.记为

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A(x\to-\infty).$$

如果 $D \supset (-\infty,a) \cup (a,+\infty)$，且对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $X > 0$，当 $x \in (-\infty,-X) \cup (X,+\infty)$ 时，即 $|x| > X$ 时，

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称 A 为 $f(x)$ **当 x 趋向于 ∞ 时的极限**. 记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A(x\to\infty).$$

2. 函数极限的性质：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$.

(2) 唯一性：若 f 在 x_0 处有极限，则极限是唯一的.

(3) 局部有界性：若 f 在 x_0 处有极限，则 f 在 x_0 的某邻域内有界.

(4) 局部保号性：设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，若 $A > 0$，则存在某正数 $\eta > 0$ 和 x_0 的某去心邻域 $U^0(x_0,\delta_0)$，使得当 $x \in U^0(x_0,\delta_0)$ 时，

$$f(x) > \eta > 0.$$

(5) 夹逼性：设函数 f,h,g 在 x_0 的某邻域内满足 $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$，且

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = A, \quad \text{则} \lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

3. 归结原理：$f: D \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$，$D$ 包含 x_0 的某个邻域，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是对任意满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$，$x_n \neq x_0$ 的数列 $\{x_n\}$，其对应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 满足

$$\lim_{x\to\infty} f(x_n) = A.$$

4. 函数极限的四则运算：设 $f,g: \mathbf{R} \supset D \to \mathbf{R}$，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$，则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A \pm B$.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} kf(x) = k \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = kA$（$k$ 为常数）.

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \dfrac{A}{B}(B \neq 0)$.

以上 2.，3. 和 4. 对 x 趋向于 ∞ 时（包括正、负无穷大）也有相应的结论.

5. 几个常用极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0(|q| < 1)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1(a > 0)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$;

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$ 或$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$,特别,$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=e$.

例题分析

以下针对不同的求极限方法进行举例分析,从而了解各方法的特点以及求解相关极限的要领.

(一) 用定义证明极限

例 1.1 用定义证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+3}{n^2+2n}=2$.

证明 要使$\left|\dfrac{2n^2+3}{n^2+2n}-2\right|<\varepsilon$ 成立,因为

$\left|\dfrac{2n^2+3}{n^2+2n}-2\right|=\left|\dfrac{4n-3}{n^2+2n}\right|<\dfrac{4n}{n^2}=\dfrac{4}{n}$,所以只要$\dfrac{4}{n}<\varepsilon$ 即可,

即 $n>\dfrac{4}{\varepsilon}$,取 $N=\left[\dfrac{4}{\varepsilon}\right]$. 有

$\forall\varepsilon>0,\exists N=\left[\dfrac{4}{\varepsilon}\right]$,当 $n>N$ 时,$\left|\dfrac{2n^2+3}{n^2+2n}-2\right|<\dfrac{4}{n}<\varepsilon$ 成立.

因此,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+3}{n^2+2n}=2$.

例 1.2 用定义证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{k^n}{n!}=0$,其中 k 为正整数.

证明 $\forall\varepsilon>0$,要找正整数 N,使当 $n>N$ 时,$\left|\dfrac{k^n}{n!}-0\right|<\varepsilon$. 因为

$\left|\dfrac{k^n}{n!}-0\right|=\dfrac{k}{1}\cdot\dfrac{k}{2}\cdots\dfrac{k}{k}\cdot\dfrac{k}{k+1}\cdots\dfrac{k}{n}<\dfrac{k^k}{k!}\cdot\dfrac{k^{n-k}}{(k+1)^{n-k}}\triangleq C\cdot\left(\dfrac{k}{k+1}\right)^{n-k}$.

其中 $C=\dfrac{k^k}{k!}$,$n>k$. 所以只要 $C\cdot\left(\dfrac{k}{k+1}\right)^{n-k}<\varepsilon$ 即可,也就是 $n>\dfrac{\ln\dfrac{\varepsilon}{C}}{\ln\dfrac{k}{k+1}}+k$,

取 $N=\max\left\{\left[\dfrac{\ln\dfrac{\varepsilon}{C}}{\ln\dfrac{k}{k+1}}+k\right],k\right\}$,有 $\forall\varepsilon>0$,当 $n>N$ 时,$\left|\dfrac{k^n}{n!}-0\right|<\varepsilon$ 成立,所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k^n}{n!}=0.$$

例 1.3 用定义证明$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$.

证明 $\forall\varepsilon>0$,要找正数δ,使当$0<|x-0|<\delta$时,$\left|x\sin\dfrac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$.

因为$\left|x\sin\dfrac{1}{x}-0\right|\leqslant|x|$,所以只需取$\delta=\varepsilon$,即有

$\forall\varepsilon>0$,当$0<|x-0|<\delta$时,$\left|x\sin\dfrac{1}{x}-0\right|\leqslant|x-0|<\delta=\varepsilon$成立,因此

$$\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

例 1.4 用定义证明$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x}{3x^2+2x-5}=\dfrac{1}{8}$.

证明 $\forall\varepsilon>0$,要找正数δ,使当$0<|x-1|<\delta$时,$\left|\dfrac{x^2-x}{3x^2+2x-5}-\dfrac{1}{8}\right|<\varepsilon$.

因为$\left|\dfrac{x^2-x}{3x^2+2x-5}-\dfrac{1}{8}\right|=\left|\dfrac{5(x-1)^2}{8(3x^2+2x-5)}\right|=\left|\dfrac{5(x-1)}{8(3x+5)}\right|$,限制$|x-1|<1$,有$0<x<2$,那么

$$\left|\frac{x^2-x}{3x^2+2x-5}-\frac{1}{8}\right|=\left|\frac{5(x-1)}{8(3x+5)}\right|<\frac{5}{8}\cdot\frac{|x-1|}{5}=\frac{|x-1|}{8},$$

所以可取$\delta=\min(8\varepsilon,1)$,即有

$\forall\varepsilon>0$,当$0<|x-1|<\delta$时,$\left|\dfrac{x^2-x}{3x^2+2x-5}-\dfrac{1}{8}\right|<\varepsilon$成立,因此

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{3x^2+2x-5}=\frac{1}{8}.$$

例 1.5 用定义证明$\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2-30})=0$.

证明 $|x-\sqrt{x^2-30}-0|=\left|\dfrac{30}{x+\sqrt{x^2-30}}\right|$.

因为$x\to+\infty$,所以限制$x>5$,有

$$|x-\sqrt{x^2-30}-0|=\frac{30}{x+\sqrt{x^2-30}}<\frac{30}{x},$$

所以取$X=\max\left(\dfrac{30}{\varepsilon},5\right)$,有

$\forall\varepsilon>0$,当$x>X$时,$|x-\sqrt{x^2-30}-0|<\dfrac{30}{x}<\varepsilon$成立,因此

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2-30})=0.$$

(二) 利用夹逼性求极限

例 1.6 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^n\dfrac{3n\pi}{4n+3}$.

解 因为 $\sin\dfrac{3\pi}{4}<\sin\dfrac{3n\pi}{4n+3}\leqslant\sin\dfrac{6\pi}{11}$,所以 $\sin^n\dfrac{3\pi}{4}<\sin^n\dfrac{3n\pi}{4n+3}\leqslant\sin^n\dfrac{6\pi}{11}$,

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^n\dfrac{3\pi}{4}=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^n\dfrac{6\pi}{11}=0$,因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^n\dfrac{3n\pi}{4n+3}=0$.

例 1.7 求:(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n})$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

解 (1) 因为 $\dfrac{1}{n}(1+1+\cdots+1)<\dfrac{1}{n}(1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n})<\dfrac{1}{n}\cdot(\sqrt[n]{n}+\sqrt[n]{n}+\cdots+\sqrt[n]{n})$,

即 $1<\dfrac{1}{n}(1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n})<\sqrt[n]{n}$.

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$,所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n})=1.$$

(2) 因为 $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}<1$,

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}=1$,所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

例 1.8 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot2n}$.

解 设 $u_n=\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot2n}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}$,则有

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-2}{2n-1}<u_n<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n+1},$$

将不等式同乘以 u_n 得

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n}<u_n^2<\frac{1}{2n+1},$$

即有

$$\frac{1}{2\sqrt{n}}<u_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}},$$

而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$. 因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot2n}=0.$$

例 1.9 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{5}\cdot\left[\dfrac{3}{x}\right]$,其中[·]为取整函数.

解 先考虑$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{5}\left[\dfrac{3}{x}\right]$. 设$\left[\dfrac{3}{x}\right]=n$,则 $x\to0^+$ 有 $n\to\infty$,

且 $n\leqslant\dfrac{3}{x}<n+1$,即 $nx\leqslant3<(n+1)x$,所以有

$\dfrac{3n}{5(n+1)}=\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{3}{n+1}\cdot\left[\dfrac{3}{x}\right]<\dfrac{x}{5}\left[\dfrac{3}{x}\right]\leqslant\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{3}{n}\cdot\left[\dfrac{3}{x}\right]=\dfrac{3}{5}$,

而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n}{5(n+1)}=\dfrac{3}{5}$,因此$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{5}\left[\dfrac{3}{x}\right]=\dfrac{3}{5}$.

同理可得$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x}{5}\left[\dfrac{3}{x}\right]=\dfrac{3}{5}$,于是

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{5}\left[\frac{3}{x}\right]=\frac{3}{5}.$$

(三)利用两个常用极限求相关极限

两个最常用的极限为:

(ⅰ)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$;　　(ⅱ)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$,　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$.

例 1.10 计算$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解 $$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

例 1.11 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{\pi}{n}\right)^{n^2}$.

解 $$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^{n^2}&=\lim_{n\to\infty}\left[1+\left(\cos\frac{\pi}{n}-1\right)\right]^{n^2}\\&=\lim_{n\to\infty}\left[1+\left(\cos\frac{\pi}{n}-1\right)\right]^{\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}-1}\cdot n^2\left(\cos\frac{\pi}{n}-1\right)}\end{aligned}$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\cos\dfrac{\pi}{n}-1\right)=-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^2}{\frac{1}{n^2}}=-\dfrac{\pi^2}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right)^2=-\dfrac{\pi^2}{2}$,所以,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^{n^2}=e^{-\frac{\pi^2}{2}}.$$

例 1.12 已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{2x}=\dfrac{1}{e}$，求常数 a.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\dfrac{2a}{x-a}\right]^{\frac{x-a}{2a}\cdot\frac{4ax}{x-a}}=e^{4a}$

由 $e^{4a}=\dfrac{1}{e}$ 得 $a=-\dfrac{1}{4}$.

(四) 用洛必达法则求极限

例 1.13 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$.

解 设 $y=\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$，则 $\ln y=x\ln\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)$.

令$\dfrac{1}{x}=t$，当 $x\to\infty$ 时，$t\to 0$，所以有

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{t\to0}\frac{\ln(\sin2t+\cos t)}{t}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{t\to0}\frac{2\cos2t-\sin t}{\sin2t+\cos t}=2,$$

因此$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}y=e^2$.

例 1.14 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$.

解
$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}&=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}(1+x)^{\frac{1}{x}-1}+(1+x)^{\frac{1}{x}}\ln(1+x)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{1}\\&=\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\lim_{x\to0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}\\&=e\cdot\lim_{x\to0}\frac{-\ln(1+x)}{2x+3x^2}=e\cdot\lim_{x\to0}\frac{-1}{(1+x)(2+6x)}=-\frac{e}{2}.\end{aligned}$$

例 1.15 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(n^3-n^2+\dfrac{n}{2}\right)e^{\frac{1}{n}}-\sqrt{1+n^6}\right]$.

解 将数列的极限化为函数的极限来求，所以先考察极限

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\right].$$

设 $t=\dfrac{1}{x}$，当 $x\to+\infty$ 时，$t\to0^+$，有

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\right]=\lim_{t\to0^+}\frac{(1-t+\frac{1}{2}t^2)e^t-\sqrt{1+t^6}}{t^3}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{(-1+t)e^t + \left(1 - t + \frac{t^2}{2}\right)e^t - \frac{6t^5}{2\sqrt{1+t^6}}}{3t^2}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{1}{2}e^t - \frac{3t^3}{\sqrt{1+t^6}}}{3} = \frac{1}{6}.$$

所以，由归结原理知

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(n^3 - n^2 + \frac{n}{2}\right)e^{\frac{1}{n}} - \sqrt{1+n^6}\right] = \frac{1}{6}.$$

例 1.16 求 $I_n = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^n e^{\frac{1}{x^2}}}$，$n$ 为正整数.

解 $I_n = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x^n}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-n \cdot x^{-n-1}}{e^{\frac{1}{x^2}} \cdot (-2) \cdot \frac{1}{x^3}} = \dfrac{n}{2} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^{-(n-2)}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \dfrac{n}{2} \cdot \dfrac{n-2}{2} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^{-(n-4)}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \cdots$

所以，当 n 为偶数时：$I_n = \dfrac{n}{2} \cdot \dfrac{n-2}{2} \cdot \cdots \cdot \dfrac{2}{2} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0$；

当 n 为奇数时：$I_n = \dfrac{n}{2} \cdot \dfrac{n-2}{2} \cdot \cdots \cdot \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0$.

因此，$I_n = 0$.

(五) 用等价无穷小替换求极限

当 $x \to 0$ 时，常用的等价无穷小有：

(ⅰ) $e^x - 1 \sim x$；

(ⅱ) $\ln(1+x) \sim x$；

(ⅲ) $\sin x \sim x$；

(ⅳ) $1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$；

(ⅴ) $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$.

例 1.17 求 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-3x^3)}{(e^{2x}-1)^2 \sin x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-3x^3)}{(e^{2x}-1)^2 \sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-3x^3}{(2x)^2 \cdot x} = -\dfrac{3}{4}$.

例 1.18 求 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x) - x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{[\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}][x\ln(1+x)-x^2]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x[\ln(1+x)-x]}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x\cdot[\ln(1+x)-x]}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\ln(1+x)-x}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\frac{1}{1+x}-1}=\frac{-1}{2}\lim_{x\to 0}(1+x)=-\frac{1}{2}.$$

例 1.19 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^5+7x^4+3)^a-x]=b\neq 0$，求 a,b 的值.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^5+7x^4+3)^a-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^{5a}\left(1+\dfrac{7}{x}+\dfrac{3}{x^5}\right)^a-x\right]$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\left[x^{5a-1}\left(1+\frac{7}{x}+\frac{3}{x^5}\right)^a-1\right]=b\neq 0.$$

所以 $5a-1=0$，得 $a=\dfrac{1}{5}$，从而有

$$b=\lim_{x\to+\infty}x\left[\left(1+\frac{7}{x}+\frac{3}{x^5}\right)^{\frac{1}{5}}-1\right]=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{7}{x}+\frac{3}{x^5}\right)=\frac{7}{5}.$$

即得：$a=\dfrac{1}{5}$，$b=\dfrac{7}{5}$.

例 1.20 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln 2^x+\ln\left(1+\dfrac{1}{2^x}\right)\right]\cdot\dfrac{3}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x}\cdot x\ln 2+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x}\cdot\dfrac{1}{2^x}=3\ln 2.$

(六) 用泰勒公式(带皮亚诺余项)求极限

用等价无穷小求极限其实就是用低阶的泰勒公式求极限，但常常需要用更高阶的泰勒公式来求某些极限.

设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点具有 n 阶导数，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点的泰勒公式为：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$
$$+o((x-x_0)^n),x\to x_0.$$

特别，当 $x_0=0$ 时，上述公式称为 $f(x)$ 的马克劳林公式：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n),x\to 0.$$

例 1.21　求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$.

解　$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4),\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+o(x^3),x\to 0$,所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}-x\left(1-\frac{x^2}{2!}\right)+o(x^3)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)x^3+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}.$$

例 1.22　求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+2-2\sqrt{1+x^2}}{x^2(\cos x-e^{x^2})}$.

解　$\sqrt{1+x^2}=1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4),x\to 0.$

$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+o(x^3),x\to 0.$

$e^{x^2}=1+x^2+o(x^2),x\to 0.$

代入得:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2-2\sqrt{1+x^2}}{x^2(\cos x-e^{x^2})}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2-2-x^2+\frac{x^4}{4}+o(x^4)}{x^2\left[1-\frac{x^2}{2!}+o(x^3)-1-x^2-o(x^2)\right]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4}x^4+o(x^4)}{-\frac{3}{2}x^4+o(x^4)}=-\frac{1}{6}.$$

例 1.23　试确定当$x\to 0$时,无穷小量$f(x)=\sqrt[5]{x^2+\sqrt[3]{x}}-\sqrt[3]{x^2+\sqrt[5]{x}}$关于$x$的阶.

解　$f(x)=(x^2+x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{5}}-(x^2+x^{\frac{1}{5}})^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{1}{15}}[(1+x^{\frac{5}{3}})^{\frac{1}{5}}-(1+x^{\frac{9}{5}})^{\frac{1}{3}}]$

$$=x^{\frac{1}{15}}\left[1+\frac{1}{5}x^{\frac{5}{3}}+o(x^{\frac{5}{3}})-\left(1+\frac{1}{3}x^{\frac{9}{5}}+o(x^{\frac{9}{5}})\right)\right]$$

$$=\frac{1}{5}x^{\frac{26}{15}}+o(x^{\frac{26}{15}})-\frac{1}{3}x^{\frac{28}{15}}+o(x^{\frac{28}{15}})=\frac{1}{5}x^{\frac{26}{15}}+o(x^{\frac{26}{15}}),$$

因此,$f(x)$当$x\to 0$时是关于x的$\frac{26}{15}$阶无穷小.