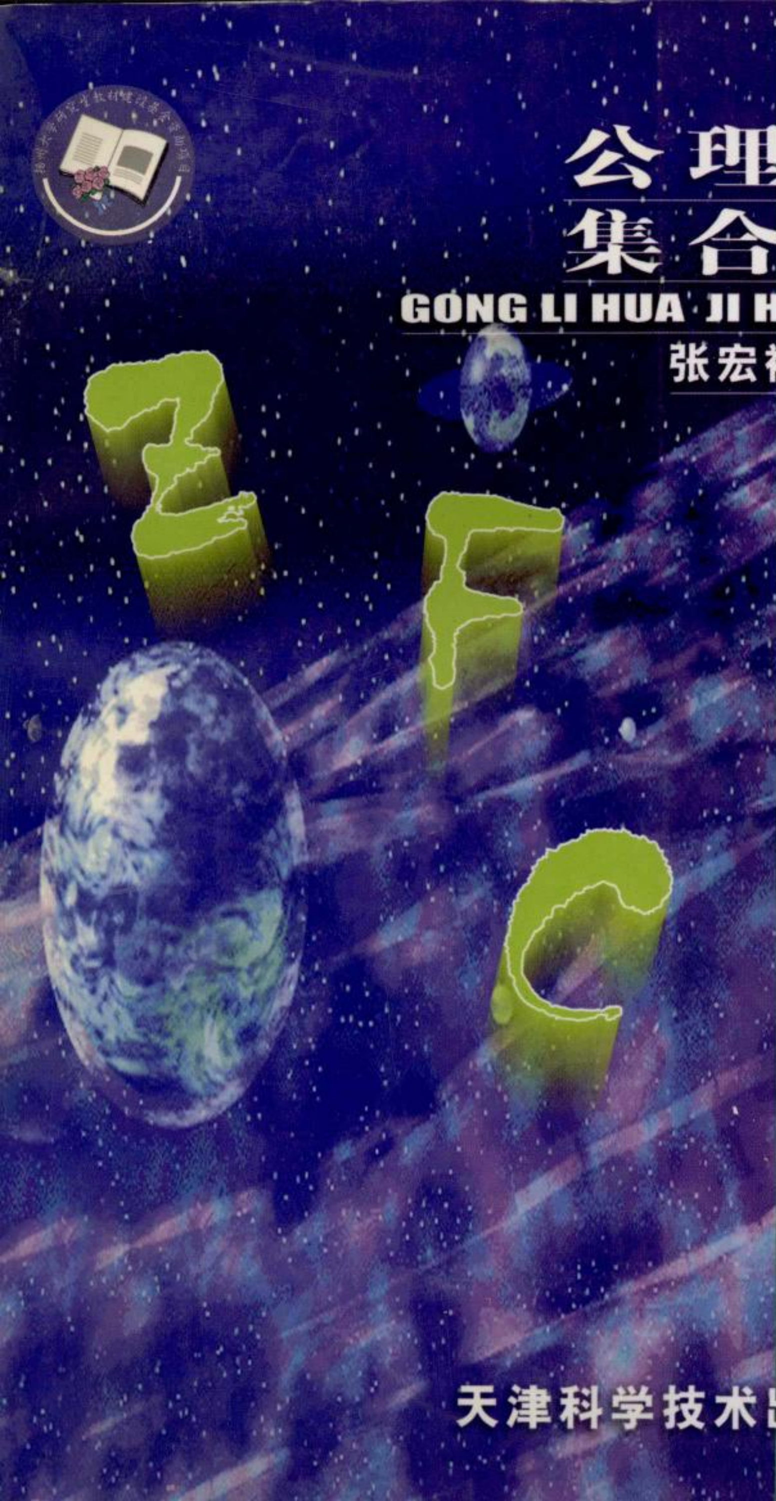

公理化集合论

GONG LI HUA JI HE LUN

张宏裕 著

天津科学技术出版社

扬州大学研究生教材建设基金资助项目

公理化集合论

张宏裕 著

天津科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

公理化集合论/张宏裕著.—天津:天津科学技术出版社,2000.8

ISBN 7_5308_2889_4

Ⅰ.公...　Ⅱ.张...　Ⅲ.集论公理系统
Ⅳ.0144.3

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第40460号

天津科学技术出版社出版、发行
出版人:王树泽
天津市张自忠189号　邮编300020　电话(022)2730631
扬州师院印刷厂印刷

开本787×1092　1/32　印张14.5　字数303 000
2000年8月第1版
2000年8月第1次印刷
定价:22.00

前　　言

在公理化集合论中，自然数、有理数、实数都可以通过空集和集合运算定义出来。人们习惯于把一个数学分支的研究对象看成一个集合，确定为论域。这时该分支的研究对象和数必须满足集合运算的规律，集合论就成为它的理论基础了。可见，学习并研究集合论有极为重要的意义。朴素集合论研究集合的一般性质，研究无穷序数和无穷基数的运算。事实证明在数学研究中仅依据朴素集合论的知识是不够的，必须应用公理化集合论。公理化集合论以一阶谓词演算为基础，用公理系统来界定集合的性质。它是朴素集合论的深入和发展。由于学术同行的建议，促使本人从事这项艰难的工作。构思的意图为深入细致地论述公理化集合论的基本知识，以满足初学者的需要；同时论述它的近代发展，以供深入学习者参考。本书分三编。第一编公理化集合论，主要任务是展开公理系统 ZFC，论述无穷序数和无穷基数。第二编集论模型，系统介绍自然模型，可构成性模型、布尔值模型、脱殊扩充模型，利用这些模型证明选择公理 AC 独立于 ZF 系统，连续统假设 CH 和苏斯林问题独立于 ZFC 系统。第三编大基数，存在某种大基数是一种强无穷公理形式，我们讨论定义各种大基数的方法，它们的基本性质和互相关系；最后介绍决定性公理 AD，在 ZF + AD 条件下大基数研究的情况。

本书是研究生课程讲稿的扩充，还征求了学员的意见作了修改。由于学识所限，书中不妥或错误之处难免，敬请校正。书稿在经过两年有余的工作后于1994年夏完成。因为经费问题一直无法问世，感谢扬大、理学院和数学系领导的支持，使我有幸把这本书奉献给读者，感到十分欣慰。

张宏裕

1999.7

目　　录

第一编　公理化集合论

第一章　集合论公理系统

第二章　序　　数

第三章　基　　数

第一编　公理化集合论

康托(Cantor)是集合论的创始人.他从1870年开始研究集合论.在1895年和1897年,他发展了两篇学术论文,论述超穷序数和超穷基数,奠定了集合论的基础.现代数学的许多分支,都把它的研究对象看成是满足一组特殊公理的个体集,然后进行推理而形成一个演绎体系.于是,该分支的研究对象必须满足集合运算的规律.可见,集合论就成为他的基础了.研究集合的一般性质,研究无穷基数和无穷序数,构成了朴素集合论(Naive set theory).康托研究的就是模素集合论.他工作中依据两个重要原理:(1)外延原理.若二集合由相同的元素组成,则它们相等;(2)概括原理.给定一性质 P,则所有满足 P 性质的对象构成一个集合.弗雷格(Frege)在1893年,第一次明确地以公理形式给出概括原理:

$$\exists x \forall y(y \in x \leftrightarrow P(y))$$

可是,1901年,罗素(Russell)发现,概括公理可导致矛盾.令 $P(x)$ 表示 $x \notin x$,则有

$$\exists x \forall y(y \in x \leftrightarrow y \notin y)$$

从而可得 $x \in x \leftrightarrow x \notin x$.通常称它的罗素悖论(Paradox).从此,人们开始深入研究引起悖论的原因和消除它的方法,导致了公理化集合论(Axiomatic set Theory)的诞生.1908年,蔡梅罗(Zermelo)给出了一个公理系统,现在我们称它为 Z 系统.后经斯柯伦(Skolem)、傅兰克(Fraenkel)的补充,形成著名的 ZF 系统.在承认选择公理 AC(Axiom of choice)时,就是 $ZFC(ZF+AC)$ 系统.ZFC 的展开是形式化的.它以带等词的一阶谓词演算为基础,加上关于集合基本性质的非逻辑公理组成形式演绎体系.本编致力于 ZFC 系的展开.

第一章　集合论公理系统

§1.1　逻辑基础

集合论形式语言中有下列符号：个体变元 $v_0, v_1, v_2, \cdots$；逻辑符号 $\neg$，$\rightarrow$，$\forall$；技术性符号(,)，　，　,[,]；谓词符号 $\in$，$=$．通常提到集合论语言，只指出两个符号 $\in$，$=$，并记为语言 $\mathscr{L} = \{\in, =\}$．我们以小写字母 $a, b, c, \cdots, x, y, z, \cdots$（或带下标）表示个体变元的元语言符号．以希腊字母 $\varphi, \psi, \chi, \cdots$ 表示合式公式，形成规则为：

[1] 若 x, y 为变元，则 $\in(x, y)$，$=(x, y)$ 是合式公式．

[2] 若 φ, ψ 是合式公式，则 $\neg(\varphi)$，$(\varphi \rightarrow \psi)$ 为合式公式．

[3] 若 $\varphi(x)$ 为合式公式，则 $\forall x\varphi(x)$ 为合式公式．

[4] 合式公式只由[1]～[3]产生．

通常记 $\in(x, y)$，$=(x, y)$ 分别为 $x \in y$，$x = y$，$\neg(x \in y)$，$\neg(x = y)$ 分别记为 $x \notin y$，$x \neq y$．

逻辑公理为：

[1] $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$，

[2] $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \eta)) \rightarrow [(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \eta)]$，

[3] $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

[4] $\forall x[\varphi \rightarrow \psi(x)] \rightarrow [\varphi \rightarrow \forall x\psi(x)]$（$x$ 不在 φ 中自由出现），

[5] $\forall x\varphi(x) \rightarrow \varphi(x)$．

[6] $a = a$

[7] $a = b \rightarrow (\varphi(a) \rightarrow \varphi(b))$

推理规则为:

[1]MP:由 $\varphi \to \psi, \varphi$ 推出 ψ,

[2]GR:由 $\varphi(x)$ 推出 $\forall x\varphi(x)$.

$\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$, $\exists$ 等符号可定义出来,相应地有相关的推理辅助规则.这里不再赘述.我们假定读者熟悉一阶逻辑.根据连接词的函数完全性和 $\forall\ \exists$ 的互相可表示性,以后我们也常常用{$\neg$, $\vee$, $\exists$}或{$\neg$ $\wedge$ $\exists$}作基本逻辑符号体系.形式化公理化集合论就是"逻辑公理 + ZFC"的演绎体系.它的语义背景是所谓朴素集合论的"康托乐园"(*Cantor's paradise*).设想有一个对象全域 V,V 中的元素称为集,V 中有两个二元关系,称为"属于"和"等于".ZFC 的非逻辑公理在全域 V 中是真的.这就是,若把"$\in$"解释成 V 中元素间的"属于"关系,把"$=$"解释成 V 中元素间的"等于"关系,把个体变元解释成任何集合,则公理所表达的形式命题在全域 V 中是真的.从而形式定理也真.于是 V 成为 ZFC 的预定模型.根据这一立场,我们可以假定 $\mathscr{L}$ 的所有合式公式确实是关于集的.于是,可以用非形式的方法进行 ZFC 的演绎推理.即个体变元遍列全域 V, $x \in y$, $(x = y)$ 理解成集合 x 属于(等于)集合 y. ZFC 的公理也有了直觉的意义.当然,这种非形式的推理可以使 ZFC 的展开快得多,它们可以转换成 $\mathscr{L}$ 上的形式演绎推理.并且在形式推理中完全不依赖这种直觉背景.

在 ZFC 系统中,将引入一系列定义.如函数、关系、个体常元等等.为了照顾数学中的习惯或便于识别,增加公式的可读性,表示它们的字母比较灵活多样.

§1.2 集　　合

现在以上节表明的立场来展开 ZFC.以小写字母 $a, b, c, \cdots, x, y, z, \cdots$ 表示集合.以 $x \in y$ $(x = y)$ 表示集合 x 属于(等于)集

合 y. 若 $x \in y$,则也可称 x 是 y 的元素. 已知集合 a(即 $a \in V$),a 的元素的汇总(collection) 直观上称为 a 的外延(Extension). 在带等词的一阶逻辑中,$a = b \rightarrow \forall x(x \in a \leftrightarrow x \in b)$. 但其逆不是普遍有效公式,而是朴素集合论中一个基本要求:集由它的外延唯一确定. 于是我们有下列公理.

1.2.1 外延公理(Axiom of Extensionality)

$Ext: \forall x(x \in a \leftrightarrow x \in b) \rightarrow a = b$

若集合 a, b 由相同的元素组成,则它们相等.

从语义角度来说,外延公理是用属于和等于对集合这个不定义概念的一个性质的刻画. 从语法上来说,外延公理是形式系统中的公式. 为说明它不是普效的,我们来构造一个数学结构使得外延公理在其中不成立. 解释域为 $A = \{+1, +2, +3, +6, -1, -2, -3, -6\}$. $x \in y$ 解释成 A 中"数 x 是数 y 的因子",$x = y$ 解释为 A 中"数 x 等于数 y". 现在 $\forall x(x \in a \leftrightarrow x \in b)$ 解释为 a, b 有相同的因子,而 $+6$ 与 -6 有相同的因子,但 $+6 \neq -6$. 可见,有些数学结构不满足外延性.

1.2.2 定理 若 x 不在合式公式 φ 中自由出现,则

$\exists x \forall y(y \in x \leftrightarrow \varphi(y)) \rightarrow \exists! x \forall y(y \in x \leftrightarrow \varphi(y))$.

其中 $\exists! x$ 表示恰好有一个 x. 由外延公理可得定理的证明.

下面我们引出一组判定集合存在的公理. 由于概括公理会导致矛盾,我们把它减弱成"若已知 a 为集合,则可用条件 $\varphi(x)$ 从 a 中分离出集合 b". 于是有下列公理.

1.2.3 分离公理模式(Axiom schema of separation)

Sep:若 $\varphi(x, t_1, \cdots, t_n)$ 为合式公式,$t_1, \cdots, t_n$ 为项(起参数作用),b 不在 φ 中自由出现,则

$$\exists b \forall x(x \in b \leftrightarrow x \in a \wedge \varphi(x, t_1, \cdots, t_n)).$$

因为对任意集合 a 和任意合式公式 φ,都可由 Sep 推出存在集 b. 所以,Sep 表示有无穷多条公理. 因此它是一种模式. 因为 b

是a 的子集，所以分离公理又称为子集公理.

1.2.4 推论　若 z 不在 φ 中自由出现，则

$\exists z \forall y(\varphi(y) \to y \in z) \to \exists z \forall y(\varphi(y) \leftrightarrow y \in z)$

证　若 $\exists z \forall y(\varphi(y) \to y \in z)$，则可令 $\forall y(\varphi(y) \to y \in z_0)$，由分离公理，$\exists z \forall y(y \in z \leftrightarrow y \in z_0 \wedge \varphi(y))$. 故 $\exists z \forall y(\varphi(y) \leftrightarrow y \in z)$.

1.2.5 定理　$\exists ! x \forall y(y \in x \leftrightarrow y \neq y)$

证　由分离公理

$$\exists x \forall y(y \in x \leftrightarrow y \in a \wedge y \neq y)$$

但 $y \in a \wedge y \neq y \leftrightarrow y \neq y$，故 $\exists x \forall y(y \in x \leftrightarrow y \neq y)$. 由 1.2.2 定理，$\exists ! x \forall y(y \in x \leftrightarrow y \neq y)$.

我们把上述定理中确定的唯一 x 定义为空集.

1.2.6 定义　$\varnothing =_{df} \tau x(\forall y(y \in x \leftrightarrow y \neq y)$

定义式中的"τx"为摹状词符号. 设 $\varphi(v_0)$　$\psi(v_1)$ 是二合式公式，则 $\varphi(\tau x \psi(x)) \leftrightarrow df \exists x[\varphi(x) \wedge \forall y(\psi(y) \leftrightarrow x = y)]$. 于是，又有下列定义.

1.2.7 定义　$y = \tau x \varphi(x) \leftrightarrow df \exists x[y = x \wedge \forall z(\varphi(z) \leftrightarrow z = x)]$

符号 $= df$ 表示用其右端定义(define)了一个集合.

$\leftrightarrow df$ 表示用其右端定义了一个关系.

1.2.8 引理　$\exists ! x \varphi(x) \to \varphi(\tau x \varphi)$

证　设 $\exists ! x \varphi(x)$，则 $\exists x[\varphi(x) \wedge \forall y(\varphi(y) \to x = y)]$，可设 $\varphi(x_0) \wedge \forall y(\varphi(y) \to x_0 = y)$，又有 $\varphi(y_0) \to x_0 = y_0$，而由 $x_0 = y_0$ 和 $\varphi(x_0)$ 得 $\varphi(y_0)$. 于是 $x_0 = y_0 \to \varphi(y_0)$. 可见 $\varphi(y_0) \leftrightarrow x_0 = y_0$，$\forall y(\varphi(y) \leftrightarrow x_0 = y)$. 从而 $\exists x[\varphi(x) \wedge \forall y(\varphi(y) \leftrightarrow x = y)]$. 即 $\varphi(\tau x \varphi)$.

由此可知 $\forall y(y \in \varnothing \leftrightarrow y \neq y)$，$\forall y(y \notin \varnothing)$.

1.2.9 定义　$\{x \mid \varphi(x)\} =_{df} \tau y[\forall x(x \in y \leftrightarrow \varphi(x))]$

其中 y 不在合式公式 $\varphi(x)$ 中自由出现，称 $\{x \mid \varphi(x)\}$ 为集项，项中的 x 是约束变元．当然，不是任何公式 $\varphi(x)$ 都能使 $\{x \mid \varphi(x)\}$ 为集项．关于这个问题留待下一章讨论．

1.10.10 习题[1] 证明在分离公式模式

$$\exists b \forall x(x \in b \leftrightarrow x \in a \land \varphi(x, t_1, \cdots, t_n))$$

中，要求 b 不在 $\varphi(x, t_1, \cdots, t_n)$ 中自由出现是必要的．

[2] 证明 $\forall x(x \notin a) \leftrightarrow a = \varnothing$

§1.3 集合的基本运算

1.3.1 定义 $a \subseteq b \leftrightarrow df \forall x(x \in a \to x \in b)$

$a \subset b \leftrightarrow df a \subseteq b \land a \neq b$

$a \subseteq b$ 表示 a 包含于 b，a 是 b 的子集．$a \subset b$ 表示 a 真包含于 b，a 是 b 的真子集．显然，$a \subseteq a$．$a \subseteq b \land b \subseteq a \to a = b$．$a \subseteq b \land b \subseteq c \to a \subseteq c$．对任何 a，$\varnothing \subseteq a$．

1.3.2 定理 $\exists ! c \forall x(x \in c \leftrightarrow x \in a \land x \in b)$

证 令分离公理模式中的 $\varphi(x)$ 为 $x \in b$，则有 $\exists c \forall x(x \in c \leftrightarrow x \in a \land x \in b)$．由 1.2.2 定理得 $\exists ! c \forall x(x \in c \leftrightarrow x \in a \land x \in b)$．

1.3.3 定义 $a \cap b = af\{x \mid x \in a \land x \in b\}$

称 $a \cap b$ 为 a 与 b 的交．应用一阶逻辑，不难验证下列定理．

1.3.4 定理 [1] $a \cap a = a$，

[2]（交换律） $a \cap b = b \cap a$

[3]（结合律） $a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$

[4] $a \cap b \subseteq a$，$a \cap b \subseteq b$

[5] $a \cap \varnothing = \varnothing$

定义并运算，要新的公理．

1.3.5 替换公理模式（*Axiom schema of Replacement*）

Rep:若 $\varphi(x,y,t_1,\cdots,t_n)$ 是有 $(n+2)$ 个自由变元的合式公式,b 不在 φ 中自由出现,则

$$\forall x,y,z[\varphi(x,y,t_1,\cdots,t_n)\wedge\varphi(x,z,t_1,\cdots,t_n)\rightarrow y=z]$$
$$\rightarrow\exists b\forall y[y\in b\leftrightarrow\exists x(x\in a\wedge\varphi(x,y,t_1,\cdots,t_n))]$$

式中位于两个中括号之间有一个 $\longrightarrow$ 蕴涵号,其前件说 φ 确定一部分函数.其后件说该函数值域为集的充要条件为它的定义域为集.φ 中的 $t_1,\cdots,t_n$ 为项(作参数).*Rep* 是一公理模式,表示无穷多条公理.

1.3.6 定理 $\forall x,y,z(\varphi(x,y)\wedge\varphi(x,y)\rightarrow y=z)$
$\rightarrow\exists!b\forall y(y\in b\leftrightarrow\exists x(x\in a\wedge\varphi(x,y))$
(其中 b 不在 $\varphi(x,y)$ 中自由出现).

1.3.7 幂集公理(*Axiom of power set*)

Pow: $\exists b\forall x(x\in b\leftrightarrow x\subseteq a)$

对任意集 a,存在集合 b,它由 a 的一切子集所组成.

1.3.8 定理 $\exists!b\forall x(x\in b\leftrightarrow x\subseteq a)$

1.3.9 定义 $P(a)=df\{x\mid x\subseteq a\}$

称 $P(a)$ 为 a 的幂集.

1.3.10 定理 [1]$\varnothing\in P(a),a\in P(a)$

[2]$a\subseteq b\rightarrow P(a)\subseteq P(b)$

[3]$P(a\cap b)=P(a)\cap P(b)$

因 $P(\varnothing)=\{x\mid x\subseteq\varnothing\}=\{\varnothing\},P(\{\varnothing\})=\{x\mid x\subseteq\{\varnothing\}\}=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$.显然,$\varnothing\neq\{\varnothing\}$.故可证下列定理.

1.3.11 定理 $\exists!c\forall y(y\in c\leftrightarrow y=a\vee y=b)$

证 $\varphi(x,y)$ 为 $(x=\varnothing\wedge y=a)\vee(x=\{\varnothing\}\wedge y=b)$,则由替换公理和1.3.5定理得 $\exists!c\forall y(y\in c\leftrightarrow y=a\vee y=b)$.

1.3.12 定义 $\{a,b\}=af\{x\mid x=a\vee x=b\}$

称 $\{a,b\}$ 为二元素集或无序对集.

1.3.13 并集公理(*Axiom of Union*)