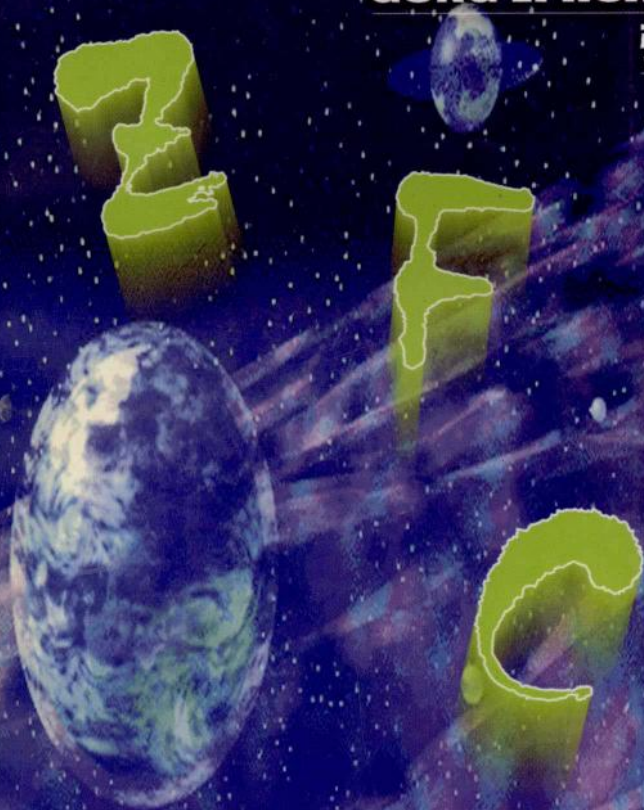




公理化 集合论

GONG LI HUA · JI HE LUN

张宏裕 著



天津科学技术出版社

扬州大学研究生教材建设基金资助项目

公理化集合论

张宏裕 著

天津科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

公理化集合论/张宏裕著. —天津:天津科学技术出版社,
2000.8

ISBN 7_5308_2889_4

I.公... II.张... III.集论公理系统
IV.0144.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 40460 号

天津科学技术出版社出版、发行

出版人:王树泽

天津市张自忠 189 号 邮编 300020; 电话(022)2730631

扬州师院印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 14.5 字数 303 000

2000 年 8 月第 1 版

2000 年 8 月第 1 次印刷

定价:22.00

前 言

在公理化集合论中,自然数、有理数、实数都可以通过空集和集合运算定义出来。人们习惯于把一个数学分支的研究对象看成一个集合,确定为论域。这时该分支的研究对象和数必须满足集合运算的规律,集合论就成为它的理论基础了。可见,学习并研究集合论有极为重要的意义。朴素集合论研究集合的一般性质,研究无穷序数和无穷基数的运算。事实证明在数学研究中仅依据朴素集合论的知识是不够的,必须应用公理化集合论。公理化集合论以一阶谓词演算为基础,用公理系统来界定集合的性质。它是朴素集合论的深入和发展。由于学术同行的建议,促使本人从事这项艰难的工作。构思的意图为深入细致地论述公理化集合论的基本知识,以满足初学者的需要;同时论述它的近代发展,以供深入学习者参考。本书分三编。第一编公理化集合论,主要任务是展开公理系统 ZFC,论述无穷序数和无穷基数。第二编集论模型,系统介绍自然模型,可构成性模型、布尔值模型、脱殊扩充模型,利用这些模型证明选择公理 AC 独立于 ZF 系统,连续统假设 CH 和苏斯林问题独立于 ZFC 系统。第三编大基数,存在某种大基数是一种强无穷公理形式,我们讨论定义各种大基数的方法,它们的基本性质和互相关系;最后介绍决定性公理 AD,在 ZF + AD 条件下大基数研究的情况。

本书是研究生课程讲稿的扩充,还征求了学员的意见作了修改。由于学识所限,书中不妥或错误之处难免,敬请校正。书稿在经过两年有余的工作后于1994年夏完成。因为经费问题一直无法问世,感谢扬大、理学院和数学系领导的支持,使我有幸把这本书奉献给读者,感到十分欣慰。

张宏裕

1999.7

目 录

第一编 公理化集合论

第一章 集合论公理系统

- § 1.1 逻辑基础 (2)
§ 1.2 集合 (3)
§ 1.3 集合的基本运算 (6)
§ 1.4 无穷交与无穷并 (10)
§ 1.5 笛卡尔积 (12)
§ 1.6 关系与函数 (13)
§ 1.7 自然数集 (21)
§ 1.8 实数集 (26)
§ 1.9 良基集 (32)
§ 1.10 几个元定理 (39)

第二章 序 数

- § 2.1 有序集 (42)
§ 2.2 良序集 (44)
§ 2.3 序数 (49)
§ 2.4 序数的算术运算 (53)
§ 2.5 类与序数类 (63)
§ 2.6 累加分层和秩 (67)
§ 2.7 序型 (72)

第三章 基 数

- § 3.1 对等 (76)
§ 3.2 基数 (84)

§ 3.3	基数的三歧性	(89)
§ 3.4	基数算术	(91)
§ 3.5	基数乘幂的基本性质	(98)
§ 3.6	正则基数	(104)
§ 3.7	奇异基数	(113)

第四章 偏 序

§ 4.1	树	(120)
§ 4.2	树性质	(123)
§ 4.3	苏斯林树	(125)
§ 4.4	布尔代数	(128)
§ 4.5	正则开代数	(131)
§ 4.6	链条件	(135)

第二编 集论模型

第五章 集论模型的基本属性

§ 5.1	公式的分层	(142)
§ 5.2	绝对性	(149)
§ 5.3	可满足性的可定义性	(156)
§ 5.4	哥德尔第二不完全性定理	(158)
§ 5.5	可数模型和史柯伦悖论	(161)

第六章 自然模型

§ 6.1	ZC 系统的模型	(166)
§ 6.2	ZF 的自然模型	(167)
§ 6.3	$H(\kappa)$	(169)
§ 6.4	反射原理	(171)

第七章 可构成模型

§ 7.1	可构成集	(175)
§ 7.2	L 是 ZF 的模型	(183)

§ 7.3	可构成性公理	(187)
§ 7.4	$L \vdash AC + GCH$	(189)
§ 7.5	菱形原则	(194)
§ 7.6	相对可构成集	(197)
§ 7.7	遗传序数可定义集	(199)

第八章 布尔值模型

§ 8.1	布尔值模型的构造	(204)
§ 8.2	公代布尔值的计算	(206)
§ 8.3	一阶逻辑适用于 V^B	(208)
§ 8.4	V^B 的饱满性	(210)
§ 8.5	子代数及布尔值子域	(212)
§ 8.6	V^B 是 ZFC 的模型	(216)
§ 8.7	脱殊超滤	(222)
§ 8.8	V^B 的同构	(224)

第九章 脱殊模型

§ 9.1	力迫	(229)
§ 9.2	偏序集上的脱殊滤子	(236)
§ 9.3	CH 与 AC 的独立性	(244)
§ 9.4	乘积力迫	(248)
§ 9.5	一次叠代力迫	(255)
§ 9.6	苏斯林线独立于 ZFC	(259)
§ 9.7	爱斯顿乘积	(266)

第三编 大基数

第十章 马洛基数

§ 10.1	马洛运算	(272)
§ 10.2	对马洛基数的反射原理	(274)

第十一章 可测基数

§ 11.1	可测基数	(276)
§ 11.2	超幂	(280)
§ 11.3	正规超滤	(288)
§ 11.4	可测基数与 GCH	(290)

第十二章 划分基数

§ 12.1	划分基数	(294)
§ 12.2	不可分辨集	(303)
§ 12.3	罗伯特基数	(307)
§ 12.4	讳基数	(312)
§ 12.5	弱紧基数	(315)

第十三章 不可描述基数

§ 13.1	不可描述基数	(319)
§ 13.2	ν -不可描述基数	(325)

第十四章 紧基数

§ 14.1	无穷语言	(330)
§ 14.2	$\mathcal{L}_{\kappa, \omega}$ 的弱紧性	(332)
§ 14.3	强紧基数	(335)
§ 14.4	超紧基数	(344)
§ 14.5	$P_{\kappa} \lambda$ 上的组合性质	(352)
§ 14.6	$Q_{\kappa} \lambda$ 上的测度	(357)

第十五章 可扩基数

§ 15.1	可扩基数	(363)
§ 15.2	巨大基数	(368)

第十六章 $\mathcal{O}^{\#}$

§ 16.1	E - M 集	(373)
§ 16.2	L 的初等嵌入	(385)

第十七章 叠代超幂

§ 17.1	叠代超幂的构造	(391)
--------	---------	-------

§ 17.2	叠代超幂的表示	(396)
§ 17.3	可测性与 GCH 的相对协调性	(404)
第十八章 叠代力迫		
§ 18.1	叠代力迫的构造	(408)
§ 18.2	超紧性蕴涵可测性与 $\neg GCH$ 协调	(415)
第十九章 险峻理想		
§ 19.1	险峻理想	(420)
§ 19.2	脱殊超幂	(425)
§ 19.3	险峻理想的性质	(428)
§ 19.4	$Q_{\kappa, \lambda}$ 上的险峻理想	(435)
第二十章 决定性公理与大基数		
§ 20.1	决定性公理	(438)
§ 20.2	AD 与大基数	(440)
	参考文献	(443)

第一编 公理化集合论

康托(Cantor)是集合论的创始人.他从1870年开始研究集合论.在1895年和1897年,他发展了两篇学术论文,论述超穷序数和超穷基数,奠定了集合论的基础.现代数学的许多分支,都把它的研究对象看成是满足一组特殊公理的个体集,然后进行推理而形成演绎体系.于是,该分支的研究对象必须满足集合运算的规律.可见,集合论就成为他的基础了.研究集合的一般性质,研究无穷基数和无穷序数,构成了朴素集合论(Naive set theory).康托研究的就是朴素集合论.他工作中依据两个重要原理:(1)外延原理.若二集合由相同的元素组成,则它们相等;(2)概括原理.给定一性质 P , 则所有满足 P 性质的对象构成一个集合.弗雷格(Frege)在1893年,第一次明确地以公理形式给出概括原理:

$$\exists x \forall y (y \in x \leftrightarrow P(y))$$

可是,1901年,罗素(Russell)发现,概括公理可导致矛盾.令 $P(x)$ 表示 $x \notin x$, 则有

$$\exists x \forall y (y \in x \leftrightarrow y \notin y)$$

从而可得 $x \in x \leftrightarrow x \notin x$.通常称它的罗素悖论(Paradox).从此,人们开始深入研究引起悖论的原因和消除它的方法,导致了公理化集合论(Axiomatic set Theory)的诞生.1908年,蔡梅罗(Zermelo)给出了一个公理系统,现在我们称它为 Z 系统.后经斯科伦(Skolem)、弗兰克(Fraenkel)的补充,形成著名的 ZF 系统.在承认选择公理 AC (Axiom of choice)时,就是 ZFC ($ZF + AC$)系统. ZFC 的展开是形式化的.它以带等词的一阶谓词演算为基础,加上关于集合基本性质的非逻辑公理组成形式演绎体系.本编致力于 ZFC 系的展开.

第一章 集合论公理系统

§ 1.1 逻辑基础

集合论形式语言中有下列符号:个体变元 v_0, v_1, v_2, \dots ; 逻辑符号 $\neg, \rightarrow, \forall$; 技术性符号 $(,), \cdot, \cdot, [,]$; 谓词符号 $\in, =$. 通常提到集合论语言, 只指出两个符号 $\in, =$, 并记为语言 $\mathcal{L} = \{\in, =\}$. 我们以小写字母 $a, b, c, \dots, x, y, z, \dots$ (或带下标) 表示个体变元的元语言符号. 以希腊字母 $\varphi, \psi, \chi, \dots$ 表示合式公式, 形成规则为:

- [1] 若 x, y 为变元, 则 $\in(x, y), = (x, y)$ 是合式公式.
- [2] 若 φ, ψ 是合式公式, 则 $\neg(\varphi), (\varphi \rightarrow \psi)$ 为合式公式.
- [3] 若 $\varphi(x)$ 为合式公式, 则 $\forall x\varphi(x)$ 为合式公式.
- [4] 合式公式只由 [1] ~ [3] 产生.

通常记 $\in(x, y), = (x, y)$ 分别为 $x \in y, x = y, \neg(x \in y), \neg(x = y)$ 分别记为 $x \notin y, x \neq y$.

逻辑公理为:

- [1] $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi),$
- [2] $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \eta)) \rightarrow [(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \eta)],$
- [3] $(\neg \varphi \rightarrow \neg \psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
- [4] $\forall x[\varphi \rightarrow \psi(x)] \rightarrow [\varphi \rightarrow \forall x\psi(x)]$ (x 不在 φ 中自由出现),
- [5] $\forall x\varphi(x) \rightarrow \varphi(x).$

[6] $a = a$

[7] $a = b \rightarrow (\varphi(a) \rightarrow \varphi(b))$

推理规则为:

[1]MP:由 $\varphi \rightarrow \psi, \varphi$ 推出 ψ ,

[2]GR:由 $\varphi(x)$ 推出 $\forall x\varphi(x)$.

$\wedge, \vee, \leftrightarrow, \exists$ 等符号可定义出来,相应地有相关的推理辅助规则.这里不再赘述.我们假定读者熟悉一阶逻辑.根据连接词的函数完全性和 $\forall \exists$ 的互相可表示性,以后我们也常常用 \neg, \vee, \exists 或 \neg, \wedge, \exists 作基本逻辑符号体系.形式化公理化集合论就是“逻辑公理 + ZFC”的演绎体系.它的语义背景是所谓朴素集合论的“康托乐园”(Cantor's paradise).设想有一个对象全域 V , V 中的元素称为集, V 中有两个二元关系,称为“属于”和“等于”.ZFC 的非逻辑公理在全域 V 中是真的.这就是,若把“ \in ”解释成 V 中元素间的“属于”关系,把“ $=$ ”解释成 V 中元素间的“等于”关系,把个体变元解释成任何集合,则公理所表达的形式命题在全域 V 中是真的.从而形式定理也真.于是 V 成为 ZFC 的预定模型.根据这一立场,我们可以假定 \mathcal{L} 的所有合式公式确实是关于集的.于是,可以用非形式的方法进行 ZFC 的演绎推理.即个体变元遍历全域 $V, x \in y, (x = y)$ 理解成集合 x 属于(等于)集合 y . ZFC 的公理也有了直觉的意义.当然,这种非形式的推理可以使 ZFC 的展开快得多,它们可以转换成 \mathcal{L} 上的形式演绎推理.并且在形式推理中完全不依赖这种直觉背景.

在 ZFC 系统中,将引入一系列定义.如函数、关系、个体常元等等.为了照顾数学中的习惯或便于识别,增加公式的可读性,表示它们的字母比较灵活多样.

§ 1.2 集 合

现在以上节表明的立场来展开 ZFC.以小写字母 $a, b, c, \dots, x, y, z, \dots$ 表示集合.以 $x \in y (x = y)$ 表示集合 x 属于(等于)集

合 y . 若 $x \in y$, 则也可称 x 是 y 的元素. 已知集合 a (即 $a \in V$), a 的元素的汇总 (collection) 直观上称为 a 的外延 (Extension). 在带等词的一阶逻辑中, $a = b \rightarrow \forall x(x \in a \leftrightarrow x \in b)$. 但其逆不是普遍有效公式, 而是朴素集合论中一个基本要求: 集由它的外延唯一确定. 于是我们有下列公理.

1.2.1 外延公理 (Axiom of Extensionality)

$$Ext: \forall x(x \in a \leftrightarrow x \in b) \rightarrow a = b$$

若集合 a, b 由相同的元素组成, 则它们相等.

从语义角度来说, 外延公理是用属于和等于对集合这个不定义概念的一个性质的刻画. 从语法上来说, 外延公理是形式系统中的公式. 为说明它不是普效的, 我们来构造一个数学结构使得外延公理在其中不成立. 解释域为 $A = \{+1, +2, +3, +6, -1, -2, -3, -6\}$. $x \in y$ 解释成 A 中“数 x 是数 y 的因子”, $x = y$ 解释为 A 中“数 x 等于数 y ”. 现在 $\forall x(x \in a \leftrightarrow x \in b)$ 解释为 a, b 有相同的因子, 而 $+6$ 与 -6 有相同的因子, 但 $+6 \neq -6$. 可见, 有些数学结构不满足外延性.

1.2.2 定理 若 x 不在合式公式 φ 中自由出现, 则

$$\exists x \forall y(y \in x \leftrightarrow \varphi(y)) \rightarrow \exists ! x \forall y(y \in x \leftrightarrow \varphi(y)).$$

其中 $\exists ! x$ 表示恰好有一个 x . 由外延公理可得定理的证明.

下面我们引出一组判定集合存在的公理. 由于概括公理会导致矛盾, 我们把它减弱成“若已知 a 为集合, 则可用条件 $\varphi(x)$ 从 a 中分离出集合 b ”. 于是有下列公理.

1.2.3 分离公理模式 (Axiom schema of separation)

Sep: 若 $\varphi(x, t_1, \dots, t_n)$ 为合式公式, t_1, \dots, t_n 为项 (起参数作用), b 不在 φ 中自由出现, 则

$$\exists b \forall x(x \in b \leftrightarrow x \in a \wedge \varphi(x, t_1, \dots, t_n)).$$

因为对任意集合 a 和任意合式公式 φ , 都可由 Sep 推出存在集 b . 所以, Sep 表示有无穷多条公理. 因此它是一种模式. 因为 b

是 a 的子集,所以分离公理又称为子集公理.

1.2.4 推论 若 z 不在 φ 中自由出现,则

$$\exists z \forall y (\varphi(y) \rightarrow y \in z) \rightarrow \exists z \forall y (\varphi(y) \leftrightarrow y \in z)$$

证 若 $\exists z \forall y (\varphi(y) \rightarrow y \in z)$,则可令 $\forall y (\varphi(y) \rightarrow y \in z_0)$,由分离公理, $\exists z \forall y (y \in z \leftrightarrow y \in z_0 \wedge \varphi(y))$.故 $\exists z \forall y (\varphi(y) \leftrightarrow y \in z)$.

1.2.5 定理 $\exists ! x \forall y (y \in x \leftrightarrow y \neq y)$

证 由分离公理

$$\exists x \forall y (y \in x \leftrightarrow y \in a \wedge y \neq y)$$

但 $y \in a \wedge y \neq y \leftrightarrow y \neq y$,故 $\exists x \forall y (y \in x \leftrightarrow y \neq y)$.由1.2.2定理, $\exists ! x \forall y (y \in x \leftrightarrow y \neq y)$.

我们把上述定理中确定的唯一 x 定义为空集.

1.2.6 定义 $\emptyset =_{df} \tau x (\forall y (y \in x \leftrightarrow y \neq y))$

定义式中的“ τx ”为摹状词符号.设 $\varphi(x) \quad \psi(x)$ 是二合式公式,则 $\varphi(\tau x \psi(x)) \leftrightarrow_{df} \exists x [\varphi(x) \wedge \forall y (\psi(y) \leftrightarrow x = y)]$.于是,又有下列定义.

1.2.7 定义 $y = \tau x \varphi(x) \leftrightarrow_{df} \exists x [y = x \wedge \forall z (\varphi(z) \leftrightarrow z = x)]$

符号 $=_{df}$ 表示用其右端定义(define)了一个集合.

\leftrightarrow_{df} 表示用其右端定义了一个关系.

1.2.8 引理 $\exists ! x \varphi(x) \rightarrow \varphi(\tau x \varphi)$

证 设 $\exists ! x \varphi(x)$,则 $\exists x [\varphi(x) \wedge \forall y (\varphi(y) \rightarrow x = y)]$,可设 $\varphi(x_0) \wedge \forall y (\varphi(y) \rightarrow x_0 = y)$,又有 $\varphi(y_0) \rightarrow x_0 = y_0$,而由 $x_0 = y_0$ 和 $\varphi(x_0)$ 得 $\varphi(y_0)$.于是 $x_0 = y_0 \rightarrow \varphi(y_0)$.可见 $\varphi(y_0) \leftrightarrow x_0 = y_0, \forall y (\varphi(y) \leftrightarrow x_0 = y)$.从而 $\exists x [\varphi(x) \wedge \forall y (\varphi(y) \leftrightarrow x = y)]$.即 $\varphi(\tau x \varphi)$.

由此可知 $\forall y (y \in \emptyset \leftrightarrow y \neq y), \forall y (y \notin \emptyset)$.

1.2.9 定义 $\{x \mid \varphi(x)\} =_{df} \tau y [\forall x (x \in y \leftrightarrow \varphi(x))]$

其中 y 不在合式公式 $\varphi(x)$ 中自由出现, 称 $\{x \mid \varphi(x)\}$ 为集项, 项中的 x 是约束变元. 当然, 不是任何公式 $\varphi(x)$ 都能使 $\{x \mid \varphi(x)\}$ 为集项. 关于这个问题留待下一章讨论.

1.10.10 习题[1] 证明在分离公理模式

$$\exists b \forall x (x \in b \leftrightarrow x \in a \wedge \varphi(x, t_1, \dots, t_n))$$

中, 要求 b 不在 $\varphi(x, t_1, \dots, t_n)$ 中自由出现是必要的.

[2] 证明 $\forall x (x \in a) \leftrightarrow a = \emptyset$

§ 1.3 集合的基本运算

1.3.1 定义 $a \subseteq b \leftrightarrow df \forall x (x \in a \rightarrow x \in b)$

$$a \subset b \leftrightarrow df a \subseteq b \wedge a \neq b$$

$a \subseteq b$ 表示 a 包含于 b , a 是 b 的子集. $a \subset b$ 表示 a 真包含于 b , a 是 b 的真子集. 显然, $a \subseteq a$. $a \subseteq b \wedge b \subseteq a \rightarrow a = b$. $a \subseteq b \wedge b \subseteq c \rightarrow a \subseteq c$. 对任何 $a, \emptyset \subseteq a$.

1.3.2 定理 $\exists! c \forall x (x \in c \leftrightarrow x \in a \wedge x \in b)$

证 令分离公理模式中的 $\varphi(x)$ 为 $x \in b$, 则有 $\exists c \forall x (x \in c \leftrightarrow x \in a \wedge x \in b)$. 由 1.2.2 定理得 $\exists! c \forall x (x \in c \leftrightarrow x \in a \wedge x \in b)$.

1.3.3 定义 $a \cap b = a \{x \mid x \in a \wedge x \in b\}$

称 $a \cap b$ 为 a 与 b 的交. 应用一阶逻辑, 不难验证下列定理.

1.3.4 定理 [1] $a \cap a = a$,

[2](交换律) $a \cap b = b \cap a$

[3](结合律) $a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$

[4] $a \cap b \subseteq a, a \cap b \subseteq b$

[5] $a \cap \emptyset = \emptyset$

定义并运算, 要新的公理.

1.3.5 替换公理模式 (Axiom schema of Replacement)

Rep: 若 $\varphi(x, y, t_1, \dots, t_n)$ 是有 $(n+2)$ 个自由变元的合式公式, b 不在 φ 中自由出现, 则

$$\forall x, y, z [\varphi(x, y, t_1, \dots, t_n) \wedge \varphi(x, z, t_1, \dots, t_n) \rightarrow y = z] \\ \rightarrow \exists b \forall y [y \in b \leftrightarrow \exists x (x \in a \wedge \varphi(x, y, t_1, \dots, t_n))]$$

式中位于两个中括号之间有一个 \rightarrow 蕴涵号, 其前件说 φ 确定一部分函数. 其后件说该函数值域为集的充要条件为它的定义域为集. φ 中的 t_1, \dots, t_n 为项(作参数). Rep 是一公理模式, 表示无穷多条公理.

$$1.3.6 \text{ 定理 } \forall x, y, z (\varphi(x, y) \wedge \varphi(x, z) \rightarrow y = z) \\ \rightarrow \exists ! b \forall y (y \in b \leftrightarrow \exists x (x \in a \wedge \varphi(x, y)))$$

(其中 b 不在 $\varphi(x, y)$ 中自由出现).

1.3.7 幂集公理 (Axiom of power set)

$$Pow: \exists b \forall x (x \in b \leftrightarrow x \subseteq a)$$

对任意集 a , 存在集合 b , 它由 a 的一切子集所组成.

$$1.3.8 \text{ 定理 } \exists ! b \forall x (x \in b \leftrightarrow x \subseteq a)$$

$$1.3.9 \text{ 定义 } P(a) = df \{x \mid x \subseteq a\}$$

称 $P(a)$ 为 a 的幂集.

$$1.3.10 \text{ 定理 } [1] \emptyset \in P(a), a \in P(a)$$

$$[2] a \subseteq b \rightarrow P(a) \subseteq P(b)$$

$$[3] P(a \cap b) = P(a) \cap P(b)$$

因 $P(\emptyset) = \{x \mid x \subseteq \emptyset\} = \{\emptyset\}$, $P(\{\emptyset\}) = \{x \mid x \subseteq \{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. 显然, $\emptyset \neq \{\emptyset\}$. 故可证下列定理.

$$1.3.11 \text{ 定理 } \exists ! c \forall y (y \in c \leftrightarrow y = a \vee y = b)$$

证 $\varphi(x, y)$ 为 $(x = \emptyset \wedge y = a) \vee (x = \{\emptyset\} \wedge y = b)$,

则由替换公理和 1.3.5 定理得 $\exists ! c \forall y (y \in c \leftrightarrow y = a \vee y = b)$.

$$1.3.12 \text{ 定义 } \{a, b\} = df \{x \mid x = a \vee x = b\}$$

称 $\{a, b\}$ 为二元素集或无序对集.

1.3.13 并集公理 (Axiom of Union)