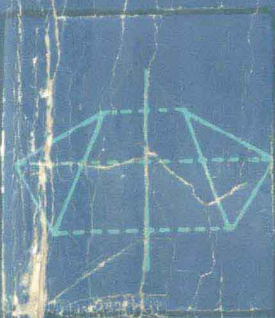
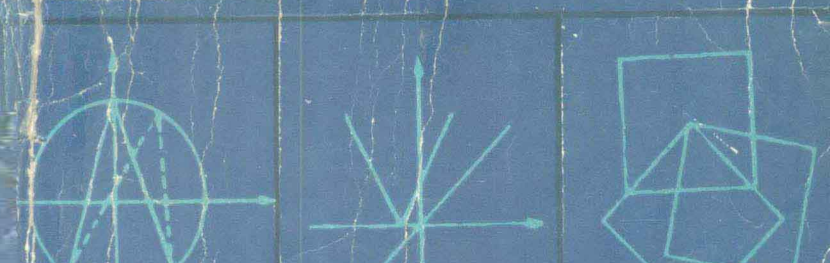
初等数学解题方法引论

龚道法　许炽雄　编著



CHUDENG SHUXUE JIETI FANGFA YINLUN



机械工业出版社

初等数学解题方法引论

蔡道法　许炽雄　编著

机 械 工 业 出 版 社

本书通过一些典型例题和以非常规题为主的各种基本类型（含有代表性的国内外竞赛题）的求解，力图向读者提供解决这些题目的方法、程序、策略和联想，培养读者不仅善于解一些标准题，而且善于解一些要求独立思考、思路合理、见解独到和有发明创造的题。

本书主要内容：数学解题及其思维；数学解题中常用的思想方法；常用解题方法。为使读者更好地领会和掌握书中的内容，书后附有练习题，并作出必要的解答。

本书适合中学生、中学数学教师参考，也可作为高师院校数学专业开设“数学解题方法研究”、“数学解题教学法”的参考用书。

初等数学解题方法引论

蔡道法　许炽雄　编著

●

责任编辑：董薇薇　张　立　尹荣英

封面设计：郭景云

●

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南里一号）

（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）

山东肥城印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

●

开本 787×1092 1/32·印张$9\frac{7}{8}$·字数218千字

1989年11月北京第一版，1989年11月肥城第一次印刷

印数0，001—5，000·定价：4.30元

ISBN 7-111-01816-8/G·103

前　言

数学解题已越来越为人们所推崇，不论当前国际上把数学问题的解决作为数学学习的目的，还是作为过程，还是作为基本技能，却都把数学解题放在重要的位置上。美国的一个数学研究组织（SMSG）指出：“全部数学要与解决问题相联系，一些问题是理论的，一些问题是实践的。”数学教育家伯朗弗尔德把问题解决描写为全部数学学习的中心。

著名数学家G·波利亚讲道：“数学除了是通向工程工作和科学知识的必由之路以外，还可能是一种乐趣并且可能开辟最高水平的智力活动前景”，他又说：“掌握数学就是意味着善于解题”。可见，通过数学解题去掌握数学既要理解和巩固所学的知识，成为“通向工程工作和科学知识之必由之路”，又要为“开辟最高水平的智力活动”而努力。

顺应世界潮流，当前我国各类数学题的灵活性也日趋加强，难度也不断提高，在竞赛题中，非常规题的数量逐渐增多。本书即是为适应上述形势而编写的，目的是为了在解这些题时提供帮助和指导。解这些题目之所以比较困难，是由于它们不似基本题那样能按固定模式，遵照一定步骤一步一步地去做就可获解。鉴于任何事物都有其发生、发展的规律，尽管这些题中有的似乎变化莫测，但同样也有其思路和方向可探，也有其基本特点可寻。本书通过一些典型例题的求解，力图向读者提供解决这些题目的方法、程序、策略和联想，使解题成为揭示“将先前已获得的知识用于新的，不熟悉的情景的过程”（美国全国数学管理者大会（NCSM））。

在编写时，既体现“要善于解题，不仅善于解一些标准的题，而且善于解一些要求独立思考、思路合理、见解独到和有发明创造的题”（G·波利亚），又考虑到我国数学教育的实际。书中列举了以非常规题（非标准题）为主的各种基本类型（含有代表性的国内外竞赛题），介绍了它们解题时的思想方法，有助于读者掌握解题的基本规律。

为使读者更好地领会和掌握书中的内容，还为大家提供了实践的机会——在书后附有练习题，并作出必要的解答。

鉴于本书立足于通过解题以发展智力，因此它适合于想把数学学得更好的中学生；同时可作为中学数学教师进行解题教学、指导数学竞赛、开展第二课堂活动的资料；也可作为高师院校数学专业开设“数学解题方法研究”、“数学解题教学法”的参考用书。

由于我们水平有限，书中难免有许多不当之处，恳请读者批评指正。

蔡道法

许炽雄

1988年9月

目　录

第一章 数学解题及其思维

一、数学解题的意义

学习数学，离不开解题，这是众所公认的．然而，解题的意义何在呢？数学解题不只是为了巩固和促进对有关数学知识、技能的掌握，而且是为了进一步发展智能．通过解题的过程，创造性地体验和学会数学的思考方法，从而提高创造力．G·波利亚说："不落俗套的数学问题的求解，是真正的创造性工作．"我国著名的数学家常庚哲说："学习数学，主要是学习解决由他人提出并已有了答案的问题；而独立从事数学研究的阶段，则是试图解决自己提出的或是由他人提出但至今还没有答案的问题．"可见，无论是"学习数学"者，还是"数学研究"者，他们的任务都是解决问题，其区别只在于前者的问题已有答案，而后者尚无答案而已．尽管前者由于问题已有了答案，其问题的解决对于社会并无价值，但对他本人而言却是一种"创见"，其解题的思维过程仍是创造性的，解决问题的过程与数学家一样，是进行创造活动的过程．正因数学解题如此重要，所以"问题是数学的心脏"（〔美〕P·R·Halmos）．

综上可知，对于学习数学者来说，解决数学问题本身不是目的，而是一种途径、一种手段，通过这条途径去创造性地体验和学会数学思考方法；作为一种手段，由此来发展创造性思维、提高创造力．因此，在解题时我们应着重去掌握数学思考方法，发展自己的创造力．

二、数学解题过程

为了在数学解题中很好地掌握数学思考方法和提高创造力，我们必须研究数学解题的过程及其思维结构.

G·波利亚在他提出的“怎样解题表”中把数学解题过程分作四个阶段：

第一、弄清问题；　　第二、拟定计划；

第三、实行计划；　　第四、回顾.

我们再看一下创造性思维发展的四个阶段：

第一、准备阶段，即发现问题阶段；

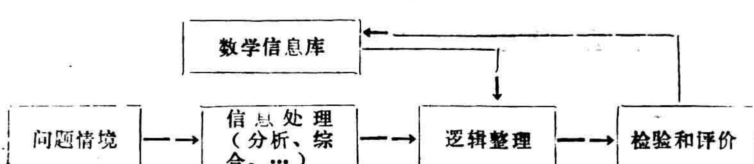
第二、酝酿阶段，即探索如何解决问题，寻找解决办法的阶段；

第三、顿悟阶段，即突破领悟，得出结论，提出设想的阶段；

第四、验证阶段，即对得出的结论，提出的设想进行检验和核实的阶段.

把两者比较一下，可以看出“表”中提出的数学解题过程与发展创造性思维的过程基本上是一致的. 如果我们把解题第一步“弄清问题”中的问题让解题者自己去“发现”，将问题的结论自己去猜测，这样的解题过程就更富有创造性了.

为了更好地掌握解题规律，我们把上面的数学解题过程换一种方式，用下面的框图来表示：



数学信息库：指的是解题者已经掌握的数学概念、法则、定理，由基本题型形成的“知识块”，以及数学解题的基本方法等；

问题情境：包括问题的条件和结论所提供的信息；

信息处理：是解题过程的中心环节．即解题者根据问题情境所提供的信息，不断从已有的数学信息库中提取有关的信息，经过分析、综合、抽象、概括和对比等思维操作，找出问题的解题思路；

逻辑整理：主要是使解题思路具体化．也要不断提取有关的信息，经过归纳和演绎并运用数学语言表达解题的完整过程；

检验和评价：包括检验解题过程的正确性；评价解法的优劣；进而把问题特殊化、普遍化，并选出需要记忆的基本内容（包括思路和方法）存入数学信息库．

对信息的选择与组合是解题能力强弱的表现之一．要从数学信息库的诸多信息中选出对解决问题有用的信息（不妨称之为旧信息）与问题情境所提供的信息（不妨称之为新信息）经过思维操作，加以重新组合，确定解题思路，则是解决问题的关键．

三、数学解题的思维结构

上面我们侧重于从信息处理角度出发分析了数学解题过程，现在再从思维活动过程来研究数学解题．

德国心理学家C·邓克尔按照人们从事解题活动时的心理活动规律，提出了“范围渐趋缩小的汇综的模式”，其过程可分为三个层次：

（1）一般的范围

通过观察问题，明确其一般性质，并定出可能解决的方向；

（2）功能的解决

按可能的方向缩小上述一般的范围，着眼于寻找既符合所定方向，又能指出发挥功能可遵循的途径；

（3）特殊的解决

使功能解决具体化为特殊方法，如果得到可行的方法，问题获解；如行不通再回到第二层次，另找别的特殊解决办法；万一仍行不通，这时再回到第一个层次去，重新寻找其它功能解决途径，甚至要重新确定一般范围，作再一个回合的尝试.

数学解题的思维活动必须要符合这一般的解决问题的心理活动规律，结合数学思维的特点，我们可以提出下述的数学解题思维活动结构：

第一个层次是运用一般逻辑方法的阶段

也就是利用辩证思维的各种方法，对题目的已知、未知及整体结构进行加工，从而明确解题的大致方向.

第二个层次是运用基本数学方法的阶段

经过上述逻辑方法阶段以后，由明确了的解题方向，确定应当采用的基本数学方法，解题一般不可能一下子就能看出合适的基本数学方法，它实际上是思维在第一个层次进行到最后才联想到的.

第三个层次是运用具体的解题方法和技巧

它是根据所确定的基本数学方法的需要而采用的.

从上述的分析，可以看出解题过程的思维活动是一个有层次性的综合结构，这种思维结构说明了要提高数学解题能力和发展智能不能只固定在具体的方法和技巧上，而应当在

更广阔的范围与更高的方位上选取突击点，在形成和发展解题思维结构的总体上下功夫，从高层次到低层次，再从低层次到高层次，有目的地进行解题训练.

四 例 子

通过一些例子来说明上面所说的数学解题的信息处理和思维过程.

要明确解题的大致方向，就必须明确，解这道题的具体目标，也就是G·波利亚提出的"首先，我们必须了解问题，…清楚地看到要求的是什么？"

例1 求证 $$\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{2(\cos\alpha-\sin\alpha)}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$$

现在作如下的思考：

（1）观察本题的三个组成部分和它们的整体结构，注意到无论是从左推右 还是从右推左，关键点是在分母上，如果能把左端两式的分母都化为 $1+\sin\alpha+\cos\alpha$，则在获证的道路上前进了一大步；

（2）分别考察三个分母的形式，促使我们联想到：

$$\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}=\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha+1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$$

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha+1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha+\sin\alpha}$$

（3）这样，只需将原式的左端分别作如上的等量代换，就立刻推得右端.

上述解题的第一步中，通过对整个题目的细致观察——思维的知觉，把右端作为"结果"，确定把左端两个式子的

分母化成右端的分母，明确了题目的要求：把左端的异分母化成同分母一目标是右端的分母，按照这个方向再逐步变形．达到证题目的．这种在证明等式和不等式时常用的思想方法，有人称作“据果变形”．

在解题中所采用的“等量代换”是属于第二层次中所采用的基本数学方法．它是在明确解题方向后通过对题目反复运用综合、分析这些思维方式所联想（思维的桥梁）到的．而解题中采用“等比定理”进行变形则是属于第三层次中所运用的具体解题方法与技巧．它是为“等量代换”服务的．

例2　过M（2，2）作椭圆族

$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{6}=\kappa$（$0\leqslant\kappa\leqslant1$）的切线，求切点轨迹方程．

此题若按常规程序设切点、设方程，再解方程组、求坐标消去κ得切点轨迹，照此程序无论采用哪些具体方法都较繁．

如果想到题目的目的只是要求出κ在〔0，1〕上变化时切点的轨迹，求切点的坐标只不过是手段，若能用“设而不求”之术来达到目的，将会省去许多繁难计算，使解题简捷明快．

解：设切点P（x_0，y_0），则切线方程为

$x_0x+2y_0y-12\kappa=0$．

∵　切线过点M（2，2），

∴　$2x_0+4y_0-12\kappa=0$　①

又∵　P点在椭圆上，

∴　$x_0{}^2+2y_0{}^2-12\kappa=0$　②

由②－①得　$x_0^2+2y_0^2-2x_0-4y_0=0$，

即无论k在〔0，1〕上如何变化，切点$P(x_0,y_0)$均适合方程　$x^2+2y^2-2x-4y=0$

此即为所求之轨迹方程.

从此例可以看出，明确解题的目的，对于确定解题方向，从而对后继层次：采用何种基本数学方法以及具体的解题方法和技巧的影响是多么重大.

例 3　在$\triangle ABC$中，已知$\sin C=\dfrac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}$，求证这个三角形为直角三角形.

观察和分析已知的等式，其特点为：右端是A、B两个角的对称式，若能从已知等式推出A为直角，那么也必能推得B为直角，而一个三角形有两个直角是不可能的．所以，欲使结论成立，只有C为直角（第一层次）

于是，就想到去推得$\sin C=1$或$\sin\dfrac{C}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，这就需要从已知等式和三内角关系$C=180^\circ-(A+B)$出发，把$A$、$B$的三角函数式转化为$C$的三角函数式（第二层次）.

因此考虑到对右端利用和差化积公式（第三层次）.

例 4　数列1，3，9，19，33，……具有这样的性质：相邻两个数的差作成一个等差数列，求已知数列前n项的和.

从题目的要求出发，分析已知条件，不难确定求解的方向：用“相邻两个数的差”作成的等差数列的项来表示原数列的项，借等差数列的求和公式导出原数列的前n项和（第一层次）

现在考虑怎样用更恰当的数学方法得到两个数列的项与

项之间的关系式．显然，原数列相邻两数的差作成的数列为

$$2,\ 6,\ 10,\ 14,\ \cdots\cdots$$

但是，束缚在两个具体的数列上，就局限了一般规律的表示。从而想到"抽象化"这个更好的方法：设原数列为

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \cdots,\ a_k,\ a_{k+1},\ \cdots$$

相应的等差数列为

$$b_1=a_2-a_1,\ b_2=a_3-a_2,\ b_3=a_4-a_3,\ \cdots,$$

$$b_k=a_{k+1}-a_k,\ \cdots$$

且 $$b_k=b_1+(\kappa-1)d,\ (\kappa\geqslant 1)$$

可导出 $$a_k=a_1+(\kappa-1)b_1+\frac{(\kappa-1)(\kappa-2)}{2}d,\quad(\kappa\geqslant 2)$$

从而 $$S_n=\sum_{\kappa=1}^{n}a_k=na_1+[1+2+3+\cdots+(n-1)]$$

$$b_1+\left[\frac{1\times 2}{2}+\frac{2\times 3}{2}+\frac{3\times 4}{2}+\cdots+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\right]d$$

$$=na_1+\frac{n(n-1)}{2}b_1+\frac{d}{2}[1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots$$

$$+(n-2)(n-1)],\ \text{（第二层次）}.$$

接着计算 $1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots+(n-2)(n-1)$ 时，还要用到 $\kappa(\kappa+1)=(\kappa+1)^2-(\kappa+1)$ 这一变换技巧。（第三层次）．

将 S_n 化简后，再代入原数列确定的有关数值即可

从此例可看出．第一层次的思维是为第二层次的思维指出了方向和线索，意义是重大的．而第二层次所采用"抽象化"这个数学思想方法．其选择还需凭籍辩证的逻辑方法去作分析，只是这次比在第一层次时在较小和较具体的范围内

进行. 又第二个层次的基本数学方法也不能代替第三层次中所采用的具体方法与技巧. 这三个层次的任何一部分受阻，解题都不能顺利进行. 它们是一个综合的整体结构，在实际的思维运行中，它们是统一的和连贯的.

第二章　数学解题中常用的思想方法

在数学解题中常用到一些逻辑方法，如分析、综合、抽象、概括、归纳、演绎等，以及一些思想方法，如猜想、联想等，这些方法是极为重要的．在解数学题时，无一不用到其中有关的方法，大家已较为熟悉，这里主要介绍以下几种重要思想方法．

一、类　分　法

"类分法"是数学中的一种基本思想方法，它是建筑在逻辑概念"分类"基础上的一种思想方法。一切事物都必须分门别类加以研究，才能条理清楚，泾渭分明，区别事物间的千差万别，明确事物间的联系，作为反映现实世界各种现象的普遍联系和相互制约关系的数学，是以概念为支柱的。没有分类，数学概念就不复存在，数学也就无法建立和发展．

可以说，几乎所有的数学问题都与分类有关，大到一个数学分支，如平面解析几何，一般要按坐标系、直线、圆锥曲线、……的分类加以研究；小到某个具体问题，如实系数一元二次方程，要按判别式大于零、等于零、小于零的分类讨论根的性质，比比皆是．至于把一个数学问题所研究的对象的集合进行分类，化整为零，各个击破，则是解决数学问题的主要思想方法之一．

所谓"分类"，从集合的观点来讲，就是将全集按一定的原则分成若干非空子集，使得这些子集的并集为全集，而