普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套参考书

数学分析（第四版）学习指导书

下册

毛羽辉　韩士安　吴畏　编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书是与华东师范大学数学系编《数学分析》(第四版)配套的学习指导书,主要是作为学习该课程的课后复习和提高之用。本书按主教材的章节次序编写,每节包括:内容提要、释疑解惑、范例解析、习题选解,每章后附有该章总练习题的解答及测试题。本书切合实际,针对学生学习中常见的错误、常出现的问题进行剖析、解答和指导,注意提高学生对数学分析的基本概念、基本理论、基本方法和技能的理解和应用,可作为数学类专业学生学习数学分析的参考书,对教师也有一定的参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析(第4版)学习指导书.下册/毛羽辉,韩士安,吴畏编著.—北京:高等教育出版社,2012.1
ISBN 978-7-04-033792-1

Ⅰ.①数… Ⅱ.①毛… ②韩… ③吴… Ⅲ.①数学分析-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第217793号

策划编辑 李蕊　责任编辑 李蕊　特约编辑 董达英　封面设计 张楠
版式设计 王艳红　责任校对 殷然　责任印制 刘思涵

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社址	北京市西城区德外大街4号	网址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.edm.cn
印刷	山东鸿杰印务集团有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开本	787mm×960mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印张	35	版次	2012年1月第1版
字数	660千字	印次	2012年1月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定价	51.00元

物料号 33792-00

目　　录

第十二章　数项级数 …… 1

§1　级数的收敛性 …… 1

§2　正项级数 …… 11

§3　一般项级数 …… 28

总练习题解答 …… 40

第十二章测试题 …… 44

第十三章　函数列与函数项级数 …… 47

§1　一致收敛性 …… 47

§2　一致收敛函数列与函数项级数的性质 …… 60

总练习题解答 …… 70

第十三章测试题 …… 74

第十四章　幂级数 …… 77

§1　幂级数与幂级数的性质 …… 77

§2　函数的幂级数展开 …… 92

总练习题解答 …… 102

第十四章测试题 …… 106

第十五章　傅里叶级数 …… 108

§1　傅里叶级数与周期函数的傅里叶展开 …… 108

§2　收敛定理的证明 …… 123

总练习题解答 …… 132

第十五章测试题 …… 136

第十六章　多元函数的极限与连续 …… 138

§1　平面点集与多元函数 …… 138

§2　二元函数的极限 …… 153

§3　二元函数的连续性 …… 164

总练习题解答 …… 176

第十六章测试题 …… 179

第十七章　多元函数微分学 …… 181

§1　可微性与偏导数 …… 181

§2　复合函数微分法与方向导数 …… 194
§3　泰勒公式与极值问题 …… 210
总练习题解答 …… 227
第十七章测试题 …… 231
第十八章　隐函数定理及其应用 …… 233
§1　隐函数与隐函数定理 …… 233
§2　隐函数组与隐函数组定理 …… 242
§3　几何应用 …… 257
§4　条件极值 …… 267
总练习题解答 …… 277
第十八章测试题 …… 287
第十九章　含参量积分 …… 289
§1　含参量正常积分 …… 289
§2　含参量反常积分 …… 299
§3　欧拉积分 …… 312
总练习题解答 …… 321
第十九章测试题 …… 325
第二十章　曲线积分 …… 327
§1　第一型曲线积分 …… 327
§2　第二型曲线积分 …… 333
总练习题解答 …… 342
第二十章测试题 …… 344
第二十一章　重积分 …… 346
§1　二重积分的概念 …… 346
§2　直角坐标系下二重积分的计算 …… 352
§3　格林公式・曲线积分与路线的无关性 …… 361
§4　二重积分的变量变换 …… 370
§5　三重积分 …… 377
§6　重积分的应用 …… 388
*§7　n 重积分 …… 398
*§8　反常二重积分 …… 405
总练习题解答 …… 413
第二十一章测试题 …… 419
第二十二章　曲面积分 …… 422
§1　第一型曲面积分 …… 422

§2 第二型曲面积分 …… 435
§3 高斯公式与斯托克斯公式 …… 445
*§4 场论初步 …… 456
总练习题解答 …… 462
第二十二章测试题 …… 467
***第二十三章 向量函数微分学 …… 470**
§1 n维欧氏空间与向量函数 …… 470
§2 向量函数的微分 …… 476
§3 反函数定理和隐函数定理 …… 485
总练习题解答 …… 492
第二十三章测试题 …… 495
测试题提示与解答 …… 497
附录 硕士研究生入学考试试题选编(附答案) …… 533

第十二章　数 项 级 数

§1　级数的收敛性

一、内容提要

（教材下册 §1）

1°　设$\{u_n\}$是一个数列，形如

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \tag{1.1}$$

的表达式称为一个**数项级数**或**无穷级数**（简称**级数**），其中u_n称为级数的**通项**.

级数的基本问题是：(1) 讨论级数(1.1)的收敛性；(2) 在级数(1.1)收敛时求级数的和.

2°　无论是讨论级数的收敛性还是求级数的和，其最初的出发点都是考察由级数(1.1)的**部分和**

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

所组成的数列$\{S_n\}$. 如果$\{S_n\}$收敛于S，即

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

则称级数(1.1)**收敛**，并称S为级数(1.1)的**和**，记作

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

否则，称级数(1.1)**发散**.

3°　级数收敛的**柯西准则**

级数(1.1)收敛的充分必要条件是：对任意给定的正数ε，总存在正整数N，使得当$m > N$及对任意的正整数p，都有

$$\left| u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+p} \right| < \varepsilon.$$

上述柯西准则的条件又可改写为：对任意给定的正数ε，总存在正数N，使得当$n > m > N$时，有

$$\left| u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_n \right| < \varepsilon.$$

4° 级数(1.1)发散的充分必要条件是:存在正数 ε_0,使对任意给定的正整数 N,总存在正整数 $m_0>N$ 及 p_0,使

$$|u_{m_0+1}+u_{m_0+2}+\cdots+u_{m_0+p_0}|\geqslant\varepsilon_0.$$

5° 等比级数

$$a+aq+\cdots+aq^{n-1}+\cdots\quad(a\neq0)$$

当 $|q|\geqslant1$ 时发散;当 $|q|<1$ 时收敛,其和为

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}=\frac{a}{1-q}.$$

6° 级数的性质:

(1) 去掉、增加或改变级数的有限个项,不会影响级数的敛散性(只影响级数的和).

(2) 在收敛级数的项中任意加括号,既不改变级数的收敛性,也不改变级数的和.

(3) 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛,则对任意常数 a,b,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(au_n+bv_n)$ 也收敛,且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(au_n+bv_n)=a\sum_{n=1}^{\infty}u_n+b\sum_{n=1}^{\infty}v_n.$$

这称为收敛级数的线性性质.

7° 级数

$$R_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k$$

称为级数(1.1)的第 n 个**余项**.级数(1.1)收敛的充分必要条件是

$$\lim_{n\to\infty}R_n=0.$$

8° 级数(1.1)收敛的必要条件为

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0.$$

我们常用 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq0$ 来判别级数(1.1)发散.

二、释疑解惑

问题 1 有人说,既然一个级数是无限多个数“相加”的结果,而数的加法满足交换律和结合律,所以在一个级数中,可以任意交换项的次序,也可以任意加括号.这种说法对吗?

答 不对.一个收敛级数,适当改变项的次序以后,可能得到一个发散级数;即使得到的仍为收敛级数,其和也可能与原级数的和不同(参见教材下册 p.21

的例). 这就是无限项相加与有限项相加的质的不同. 当然,如果仅仅交换一个级数的有限项的次序,则级数的敛散性不变. 在后两节中将看到,如果一个级数是正项级数或是绝对收敛的级数,则可以任意改变一个级数的项的次序,其敛散性不变,且在收敛的情况下,其和也不变.

类似地,一个收敛级数可以任意加括号,加括号后的级数依然收敛,且具有相同的和;但对于发散级数,经适当添加无限个括号后,可能变成一个收敛级数(参见教材下册 p.5 上的例). 有一种特殊情形,如果添加括号后,每个括号中的项都保持同一正、负号,则所得级数与原级数同敛散,且和(如有的话)也不变(参见本节习题 10).

问题 2 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$、$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n+v_n)$ 的敛散性之间有何联系?

答 (1) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n+v_n)$ 收敛,且

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n+v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n;$$

(2) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 中一个收敛,一个发散,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n+v_n)$ 必发散.

(3) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n+v_n)$ 可能收敛,也可能发散. 例如级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{2n},\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n+1}$$

都发散,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 发散,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$ 收敛 $\left(\text{其部分和 } S_n = 1-\frac{1}{n+1}\to 1, n\to\infty\right)$.

问题 3 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是发散级数,讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{v_n}(v_n \neq 0)$ 是否必定收敛或必定发散?

答 无肯定结论. 例如对于发散级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n,\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},\ \sum_{n=1}^{\infty} 2^n,\ \sum_{n=1}^{\infty} 3^n,$$

有下列不同情形:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(\text{收敛}),\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\cdot n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} 1(\text{发散}),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n(\text{收敛}),\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n(\text{发散}).$$

问题 4 据理回答以下问题:

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散,是否必有 $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$?

(2) 若对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的项加括号后所得级数发散,则原级数是否也发散?

答 (1) 否. 例如 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散,但仍有 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

(2) 是. 因若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则对它任意加括号后所得级数必收敛,这与已知条件矛盾.

三、范例解析

例 1 按收敛级数的定义,证明:级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \tag{1.2}$$

当 $p>1$ 时收敛,当 $0<p\leqslant 1$ 时发散.

证 考察级数(1.2)的部分和数列

$$S_n = 1+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}, \quad n=1,2,\cdots$$

的收敛性. 由于级数(1.2)的各项为正,因此 $\{S_n\}$ 是递增数列,下面分别讨论 $\{S_n\}$ 是否有上界.

(1) 当 $p\neq 1$ 时,由微分中值定理得

$$\frac{1}{1-p}\left[n^{1-p}-(n+1)^{1-p}\right] = -\frac{1}{\xi^p}, \quad \xi\in(n,n+1). \tag{1.3}$$

当 $p>1$ 时,由(1.3)式得

$$\frac{1}{(n+1)^p}<\frac{1}{\xi^p}=\frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{n^{p-1}}-\frac{1}{(n+1)^{p-1}}\right], \quad n=1,2,\cdots,$$

于是

$$\begin{aligned}
S_n &= 1+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{n^p} \\
&< 1+\frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{2^{p-1}}\right)+\frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{2^{p-1}}-\frac{1}{3^{p-1}}\right)+\cdots+ \\
&\quad \frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}}-\frac{1}{n^{p-1}}\right] \\
&= 1+\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p-1}\cdot\frac{1}{n^{p-1}}
\end{aligned}$$

$$<1+\frac{1}{p-1}=\frac{p}{p-1}.$$

由单调有界定理知$\{S_n\}$收敛,即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$当$p>1$时收敛.

当$0<p<1$时,由(1.3)式又得

$$\frac{1}{n^p}>\frac{1}{\xi^p}=\frac{1}{1-p}[(n+1)^{1-p}-n^{1-p}],\quad n=1,2,\cdots,$$

于是

$$\begin{aligned}S_n&=1+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}\\&>\frac{1}{1-p}(2^{1-p}-1)+\frac{1}{1-p}(3^{1-p}-2^{1-p})+\cdots+\frac{1}{1-p}[(n+1)^{1-p}-n^{1-p}]\\&=\frac{1}{1-p}[(n+1)^{1-p}-1]\to+\infty\quad(n\to\infty),\end{aligned}$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}S_n=+\infty.$$

由此得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$当$0<p<1$时发散.

(2) 当$p=1$时,(1.3)为发散的调和级数(参见教材下册 p.3 上的例3),这里介绍另一种证明方法. 这可由

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n},\quad n=1,2,\cdots$$

出发,得到

$$\begin{aligned}S_n&=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\\&>\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}\\&=\ln(n+1)\to+\infty\quad(n\to\infty),\end{aligned}$$

从而$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$,即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$当$p=1$时发散. □

注 应用级数收敛的定义来判别级数的敛散性,关键就在于讨论$\{S_n\}$的敛散性. 通常要把S_n表示为比较简略的形式,或者通过适当放大或缩小,得到S_n的估计式,以便于讨论$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$的存在性.

例 2 试用柯西收敛准则证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}\tag{1.4}$$

收敛.

证 由于对任意的 $n>m>1$,有

$$\left|\frac{\sin(m+1)}{(m+1)^2}+\frac{\sin(m+2)}{(m+2)^2}+\cdots+\frac{\sin n}{n^2}\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(m+2)^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$$

$$<\frac{1}{m(m+1)}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}$$

$$=\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)+\left(\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{m}-\frac{1}{n}<\frac{1}{m},$$

因此 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$,当 $n>m>N$ 时,满足

$$\left|\frac{\sin(m+1)}{(m+1)^2}+\frac{\sin(m+2)}{(m+2)^2}+\cdots+\frac{\sin n}{n^2}\right|<\frac{1}{m}<\varepsilon,$$

故由柯西收敛准则推知级数(1.4)收敛. □

例 3 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散,$a_n>0$,$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$. 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$ 也发散.

分析 为了应用柯西收敛准则证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$ 发散,根据"内容提要"之 4°,需要找到某 $\varepsilon_0>0$,使得 $\forall N>0$, $\exists m_0>N$ 及 p_0,满足

$$\left|\frac{a_{m_0+1}}{S_{m_0+1}}+\cdots+\frac{a_{m_0+p_0}}{S_{m_0+p_0}}\right|\geqslant\varepsilon_0. \tag{1.5}$$

为此,我们将(1.5)式左边适当缩小,化为

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{m_0+1}}{S_{m_0+1}}+\cdots+\frac{a_{m_0+p_0}}{S_{m_0+p_0}}\right|&=\frac{a_{m_0+1}}{S_{m_0+1}}+\cdots+\frac{a_{m_0+p_0}}{S_{m_0+p_0}}\\&\geqslant\frac{a_{m_0+1}+\cdots+a_{m_0+p_0}}{S_{m_0+p_0}}\\&=\frac{S_{m_0+p_0}-S_{m_0}}{S_{m_0+p_0}}\\&=1-\frac{S_{m_0}}{S_{m_0+p_0}}.\end{aligned} \tag{1.6}$$

由此可见,只要取合适的 p_0,使 $\frac{S_{m_0}}{S_{m_0+p_0}}<\frac{1}{2}$,则可得 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$.

证 取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$, $\forall N>0$,取 $m_0=N+1>N$,因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散,$a_n>0$,故

$\lim\limits_{n\to\infty} S = +\infty$，由此可知 $\exists p_0>0$，使

$$S_{m_0+p_0} > 2S_{m_0}.$$

于是由以上(1.6)式，得到

$$\left|\frac{a_{m_0+1}}{S_{m_0+1}}+\cdots+\frac{a_{m_0+p_0}}{S_{m_0+p_0}}\right| \geqslant 1-\frac{S_{m_0}}{S_{m_0+p_0}} > \frac{1}{2} = \varepsilon_0.$$

从而由柯西收敛准则证得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$ 发散. □

例 4 试求下列级数的和 S：

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2+n-2}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}$；

(3) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}+\cdots$.

解 (1) 因为

$$\frac{1}{n^2+n-2}=\frac{1}{(n-1)(n+2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+2}\right),$$

所以

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2+k-2}=\frac{1}{3}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+2}\right)\\ &=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right).\end{aligned}$$

由此求得

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{11}{18}.$$

(2) 因为

$$S_n=\frac{1}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{5}{3^3}+\cdots+\frac{2n-3}{3^{n-1}}+\frac{2n-1}{3^n},$$

$$\frac{1}{3}S_n=\frac{1}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{5}{3^4}+\cdots+\frac{2n-3}{3^n}+\frac{2n-1}{3^{n+1}},$$

两式相减后又得

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}S_n &= S_n-\frac{1}{3}S_n\\ &=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\cdots+\frac{2}{3^n}-\frac{2n-1}{3^{n+1}}\\ &=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^{n-2}}\right)-\frac{2n-1}{3^{n+1}}\\ &=\frac{2}{3}-\frac{1}{3^n}-\frac{2n-1}{3^{n+1}},\end{aligned}$$

所以有

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3^n}-\frac{2n-1}{3^{n+1}}\right)=1.$$

（3）对此级数的部分和作如下处理：

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{1}{2k+1}\\&=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\int_0^1x^{2k}\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\sum_{k=0}^{n-1}[(-1)^kx^{2k}]\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\frac{1-(-1)^nx^{2n}}{1+x^2}\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}-(-1)^n\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}\mathrm{d}x\\&=\arctan x\Big|_0^1-(-1)^n\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{4}-(-1)^n\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

而

$$0<\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1x^{2n}\mathrm{d}x=\frac{1}{2n+1}\to0\quad(n\to\infty),$$

于是求得

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\pi}{4}-(-1)^n\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$$ □

注 级数求和的问题，一般来说是一个比较困难的问题，没有一定之规可循. 我们在上面介绍了三种方法：(1) 拆项法；(2) 变形法；(3) 逐项积分法. 这些方法的共同目的都是为了把 S_n 化为有限形式（原来的 $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$ 随 n 无限增大而为无限形式），以便求出 S_n 的极限.

以后，我们还可以借助幂级数（第十四章）和傅里叶级数（第十五章）去求级数的和. 此外，应用数学软件的符号求和程序，也能求出级数和. 下面是用MATLAB求本例三个级数和的程序与结果：

```
syms n
S1 = symsum(1/(n^2 + n - 2),2,inf)
S2 = symsum((2 * n - 1)/3^n,1,inf)
S3 = symsum((-1)^(n - 1)/(2 * n - 1),1,inf)
```

S1 = 11/18

S2 = 1

S3 = 1/4 * pi

四、习题选解

(教材下册第 5 页)

1. 证明下列级数的收敛性,并求和:

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}$.

解 令 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2k-1}{2^k}$,则

$$\begin{aligned}S_n-\frac{1}{2}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^{k+1}}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}-\sum_{k=2}^{n+1}\frac{2k-3}{2^k}\\&=\frac{1}{2}+\sum_{k=2}^{n}\frac{2}{2^k}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}\\&=\frac{3}{2}-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}},\end{aligned}$$

于是

$$S_n=3-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}\right)=3,$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=3.$$

级数的和存在,即级数收敛. □

5. 证明:若数列 $\{b_n\}$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$,则

(1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)$ 发散;

(2) 当 $b_n\neq 0$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)=\dfrac{1}{b_1}$.

证 (1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)$ 的部分和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_1,$$

而

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (b_{n+1} - b_1) = \infty,$$

从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_n)$ 发散.

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}}\right)$ 的部分和

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{b_k} - \frac{1}{b_{k+1}}\right) = \frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_{n+1}}.$$

而

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_{n+1}}\right) = \frac{1}{b_1},$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}}\right) = \frac{1}{b_1}.$ □

9. 举例说明:若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 对每个固定的 p 满足条件

$$\lim_{n\to\infty} (u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}) = 0,$$

此级数仍可能不收敛.

解 考察级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. 已知此级数发散,但对每个固定的 p,

$$u_{n+1} + \cdots + u_{n+p} = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p} \leqslant \frac{p}{n+1}.$$

而

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p}{n+1} = 0,$$

从而也有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p}\right) = 0.$$ □

10. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足:加括号后的级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} (u_{n_k+1} + \cdots + u_{n_{k+1}})$$

收敛($n_1 = 0$),且在同一括号内的加数 $u_{n_k+1}, \cdots, u_{n_{k+1}}$ 符号相同(注:对不同的括号,这个符号可以是不同的). 试证原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 亦收敛.

证 分别记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和为 $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$，加括号后的级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k = \sum_{k=1}^{\infty} (u_{n_k+1} + \cdots + u_{n_{k+1}})$$

的部分和为 T_k，则

$$T_k = \sum_{i=1}^{k} v_i = \sum_{i=1}^{k} (u_{n_i+1} + \cdots + u_{n_{i+1}})$$
$$= \sum_{j=1}^{n_{k+1}} u_j = S_{n_{k+1}}.$$

由于 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ 中同一括号内的所有加数有相同的符号，因此当 $n_k + 1 \leqslant n \leqslant n_{k+1}$ 时，S_n 将单调地变化，因而

$$T_{k-1} = S_{n_k} \leqslant S_n \leqslant S_{n_{k+1}} = T_k$$
$$(\text{或 } T_k \leqslant S_n \leqslant T_{k-1}).$$

又因 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ 收敛，则存在极限

$$\lim_{k\to\infty} T_{k-1} = \lim_{k\to\infty} T_k = T,$$

且当 $k\to\infty$ 时，随之有 $n\to\infty$（反之亦然），所以有

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{k\to\infty} S_n = T.$$

这就证得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，且与 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ 有相同的和. □

§2 正项级数

一、内容提要

（教材下册 §2）

1° 各项符号相同的级数称为**同号级数**，各项都是正数的级数称为**正项级数**，各项都是负数的级数称为**负项级数**. 负项级数可以转化为正项级数来处理.

2° 正项级数收敛的充分必要条件是：部分和数列 $\{S_n\}$ 有界，即存在正数 M，使对一切正整数 n，有

$$S_n \leqslant M.$$

3° **比较原则** 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 是两个正项级数，如果存在某正数 N，使对一切 $n > N$，有

$$u_n \leqslant v_n,$$

则

(1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散,则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

4° 比较原则的极限形式 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是两个正项级数. 若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l,$$

则

(1) 当 $0<l<+\infty$ 时,两级数同时收敛同时发散;

(2) 当 $l=0$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(3) 当 $l=+\infty$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

5° 达朗贝尔判别法(或称比式判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数,且存在某正整数 N_0 及常数 $q(0<q<1)$.

(1) 如果对一切 $n>N_0$,有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant q,$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(2) 如果对一切 $n>N_0$,有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant 1,$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

6° 比式判别法的极限形式 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数. 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q, \tag{2.1}$$

则

(1) 当 $q<1$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(2) 当 $q>1$ 或 $q=+\infty$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.