常微分方程

CHANGWEIFEN FANGCHENG

严国政 主编

科学出版社

常微分方程

严国政　主编

科　学　出　版　社

北　京

内容简介

常微分方程是数学专业学生的一门重要的基础课程.作者经过多年的教学实践，在原有讲义的基础上，编写了这本教材.内容主要包括常微分方程中一些重要的概念、求解一阶常微分方程的一些基本方法、二阶常微分方程及常微分方程组的基本概念和处理方法、一阶常微分方程解的存在与唯一性理论、常微分方程定性理论的一些基本理论和方法、一些比较常见的求解常微分方程的数值解方法以及两类重要的特殊函数.

本书既可以作为师范类大学数学专业的教材，也可以作为相关专业的参考书和自学用书.

图书在版编目（CIP）数据

常微分方程/严国政主编.—北京：科学出版社，2012.2

ISBN 978-7-03-033406-0

Ⅰ.常…　Ⅱ.严…　Ⅲ.常微分方程－高等学校－教材　Ⅳ.O175.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 013233 号

责任编辑：曾　莉/责任校对：董艳辉　蔡　莹

责任印制：彭　超/封面设计：苏　波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉中科兴业印务有限公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

开本：B5（720×1000）

2012 年 2 月第　一　版　印张：10

2012 年 2 月第一次印刷　字数：192 000

定价：20.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

常微分方程是数学专业学生的一门重要的基础课程. 编者经过多年的教学实践,在原有讲义的基础上,根据教育部师范类大学常微分方程教学大纲的要求,总结编写了本教材,并试图使本书既可以作为师范类大学的教材,也可以成为有关专业的参考书和自学用书.

本书包含 7 个章节及附录. 第 1 章主要介绍常微分方程中的一些重要概念,并通过一些简单的实例,使读者对常微分方程及其求解有一个初步的认识. 第 2 章总结了求解一阶常微分方程的一些基本方法. 关于二阶常微分方程及常微分方程组的概念和处理方法分别放在第 3 章和第 4 章. 第 5 章介绍了一阶常微分方程解的存在与唯一性理论. 常微分方程定性理论的一些基本理论和方法放在第 6 章. 第 7 章主要介绍了一些比较常见的求解常微分方程数值解的方法. 附录中包含几类比较特别的非线性一阶和二阶常微分方程及其相应的特殊求解方法,以及两类重要的特殊函数.

本书得到了教育部财政部 2010 年度国家级精品课程“偏微分方程”建设项目(教高函[2010]14 号)资助.

本书也得到了教育部财政部 2010 年度国家级教学团队“数学与应用数学专业主干课程”建设项目(教高函[2010]12 号)资助.

本书还得到湖北省教育厅 2010 年高等学校教学研究项目“数学专业分析类课程群教学的综合研究与实践”(项目批号:2010070)资助.

本书在编写过程中得到华中师范大学数学与统计学学院领导的大力支持,也得到了函数论与微分方程教研室老师的大力支持和帮助. 同时,本书的出版得到了科学出版社的大力支持. 部分研究生对本教材的打印和校正提供了具体的协助. 在此谨致谢意.

由于编者水平所限,书中如有不妥之处恳请读者批评指正.

编　者

2011 年 11 月

目　　录

第1章　引　论

常微分方程的研究已经有三百多年的历史,而且继续保持着进一步发展的活力,其主要原因是它与社会发展中生产技术的需求密切相关. 同时,它也是近代数学中最古老的分支之一.

常微分方程最早的发展动力来源于力学,例如,牛顿(Newton) 利用微积分讨论的质点力学问题,就归结为常微分方程组的研究. 在19世纪中期,柯西(Cauchy)给微积分学提供了严格性的要素,也为常微分方程的发展奠定了基石 —— 解的存在性唯一性定理.

常微分方程讨论的基本问题是:方程的求解问题以及解的各种相关属性.

人们经过长期实践,对常微分方程中一些比较特别的方程建立了初等积分法. 但是,这种方法有很大的局限性,有些看起来非常简单的方程,也不能够用这种方法求解. 例如,里卡蒂(Riccati) 方程

$$y' + p(x)y + q(x)y^2 = f(x). \tag{1.0.1}$$

现在已经证明它是不能用初等积分法求解的. 因此,在大多数情况下,只能求方程的数值解,而解的存在性和唯一性就是求数值解的前提条件.

到19世纪末期,对非线性力学的研究和发展,庞加莱(Poincaré) 和李雅普诺夫(Lyapunov) 分别创立了常微分方程的定性理论和稳定性理论. 后来,随着天体力学的发展需要,伯克霍夫(Birkhoff) 继承和发展了庞加莱的理论和方法,创立了拓扑动力系统和各态历经的理论,把常微分方程的研究提升到了一个新的水平.

在众多数学家的共同努力下,常微分方程自身作为一个学科得到了长足的发展,同时,常微分方程的应用范围也不断扩大,现在已经应用到机械、化工、经济、生物和其他社会学科的各个领域.

本章主要做两件事情:一是介绍常微分方程的基本概念;二是简单介绍线素场的基本知识. 通过一些比较容易理解的实例,把有关常微分方程的一些重要的基本概念讲清楚,从简单到复杂,力求使读者能够用较短的时间了解常微分方程的基本概念、基本理论和一般问题的基本处理方法.

1.1　基本概念

数学分析是重要的基础课,完成了这门课程学习的读者一定有印象:数学分析

中有很大篇幅处理的就是微分与积分. 下面我们就从数学分析中的简单例子开始,逐步过渡到常微分方程,一步一步地介绍有关常微分方程的基本概念.

例 1.1.1 给定函数 $y=\frac{1}{5}x^4$,求出 y 关于自变量 x 的导数.

解 显然 $y'=\frac{4}{5}x^3$.

反过来,已知 $y'=\frac{4}{5}x^3$,要求出未知函数 y 就麻烦一些,要用到不定积分.

容易知道

$$y=\frac{1}{5}x^4+c,$$

其中 c 为任意常数.

现在改变问题的已知条件:假设未知函数 y 满足等式

$$y'+\frac{y}{x}=x^3 \quad (x\neq 0), \tag{1.1.1}$$

试求出 y.

这时问题就变得比较困难了. 目前,我们还没有办法求出 y,但如果我们仔细观察,或许会发现

$$y=\frac{1}{5}x^4+\frac{c}{x}$$

就是所有满足等式(1.1.1) 的 y,其中 c 为任意常数(下一章中将会说明原因).

从这个具体的例子,可以归纳出以下三点:

(1) 式(1.1.1) 中的未知函数 y 只有一个自变量 x,而且只依赖于这一个自变量.

(2) 式(1.1.1) 中含有未知函数 y,未知函数的导数 y' 和自变量 x.

(3) $y=\frac{1}{5}x^4+\frac{c}{x}$ 是满足等式(1.1.1) 所有的 y.

如果不严格地说,式(1.1.1) 就是一个常微分方程,而 $y=\frac{1}{5}x^4+\frac{c}{x}$ 称为常微分方程(1.1.1) 的解.

例 1.1.2 设 $y=\sin x$,试求 y',y''.

解 显然,$y'=\cos x, y''=-\sin x$.

反过来,假设

$$y''+y=0, \tag{1.1.2}$$

试求出 y.

容易验证，$y = c_1\sin x + c_2\cos x$ 满足上面的等式，其中 c_1, c_2 为任意常数.

同样，可以从式(1.1.2)中归纳出类似于例 1.1.1 的三点，只是式(1.1.2)中有 y 的二阶导数.

由例 1.1.1 和例 1.1.2，可以给出下面几个重要的概念：

定义 1.1.1 假设 y 是只含有一个自变量 x 的函数，联系着自变量 x，未知函数 y，以及未知函数的导数 $y', y'', \cdots, y^{(n)}$ 的等式

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.1.3}$$

称为**常微分方程**.

在不引起混淆的情况下，通常把常微分方程简称为**微分方程**.

如果未知函数是多元函数，那么微分方程中就会出现偏导数，这类方程称为**偏微分方程**.

式(1.1.3)中实际出现的未知函数的导数的最高阶数 n 称为常微分方程(1.1.3)的**阶**.

根据上面的定义，方程(1.1.1)是一阶常微分方程，方程(1.1.2)是二阶常微分方程.

我们还可以举一些常微分方程的例子，如

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2, \tag{1.1.4}$$

$$y'' + yy' = x, \tag{1.1.5}$$

$$y'^2 + ty' + 4y = 0. \tag{1.1.6}$$

方程(1.1.4)和(1.1.6)是一阶常微分方程，而方程(1.1.5)是二阶常微分方程.

定义 1.1.2 如果常微分方程(1.1.3)能够写成如下形式：

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x),$$

则称方程(1.1.3)是**线性常微分方程**；否则称为**非线性常微分方程**. 另外，如果 $f(x) = 0$，则称该方程为**齐次线性常微分方程**；否则称该方程为**非齐次线性常微分方程**.

上面的方程(1.1.1)和(1.1.2)是线性的，方程(1.1.4)～(1.1.6)是非线性的.

定义 1.1.3 设 $y = \varphi(x)$ 在区间 I 上连续，且有直到 n 阶的导数. 如果 $y = \varphi(x)$

满足等式(1.1.3),即

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x))=0$$

对一切 $x\in I$ 成立,则 $y=\varphi(x)$ 称为方程(1.1.3) 在区间 I 上的一个**解**.

如果 $y=\varphi(x,c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 是方程(1.1.3) 的解,而且 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是 n 个相互独立的常数,则 $y=\varphi(x,c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 称为方程(1.1.3) 的**通解**.

这里所说的独立性是指雅可比(Jacobi) 行列式

$$\frac{D[\varphi,\varphi',\cdots,\varphi^{(n-1)}]}{D[c_1,c_2,\cdots,c_n]}\triangleq\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial c_1} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial c_2} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi}{\partial c_n}\\ \dfrac{\partial\varphi'}{\partial c_1} & \dfrac{\partial\varphi'}{\partial c_2} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi'}{\partial c_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial c_1} & \dfrac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial c_2} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial c_n}\end{vmatrix}\neq 0.$$

如果方程(1.1.3) 有解 $y=\varphi(x)$ (不包含任意常数),则称此解为**特解**.

例如,$y=\frac{1}{5}x^4$ 就是方程(1.1.1) 在$(-\infty,0)$ 或$(0,+\infty)$ 内的一个特解,$y=\frac{1}{x}+\frac{1}{5}x^4$ 也是该方程的一个特解.而 $y=\frac{c}{x}+\frac{1}{5}x^4$ (c 为任意常数) 为方程(1.1.1) 在相应区间的通解. $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 都是方程(1.1.2) 的特解,而 $y=c_1\sin x+c_2\cos x$ 为方程(1.1.2) 在$(-\infty,+\infty)$ 内的通解,其中 c_1,c_2 为任意常数.

例 1.1.3 在平面上找一条光滑的曲线 $y=y(x)$,使其在任意一点(x,y) 处切线的斜率等于 $2x$,且通过一给定点(x_0,y_0).

解 从题目所给的条件知

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x. \tag{1.1.7}$$

不必找出所有满足这个方程的解,只需求出经过已知点(x_0,y_0) 的解,即 $y=y(x)$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x,\qquad y(x_0)=y_0. \tag{1.1.8}$$

(1.1.8) 称为**初值问题**(或**定解问题**).

定义 1.1.4 对一般的一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y), \tag{1.1.9}$$

如果给定初始条件

$$y(x_0) = y_0, \tag{1.1.10}$$

则称(1.1.9)和(1.1.10)为一阶微分方程的**初值问题**(或**定解问题**).

事实上,可以在式(1.1.7)两边从 x_0 到 x 积分,即

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} y(s)\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} 2s\mathrm{d}s,$$

得

$$y(x) = x^2 + y_0 - x_0^2,$$

此即为所求解.

1.2 等 斜 线

事实上,即使对于一阶常微分方程,求解也是很困难的事情.在下面的章节中我们将会介绍一些求解特定常微分方程的基本方法.在这里,我们来探讨一下常微分方程及其解的几何意义.

考虑如下的一阶常微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y), \tag{1.2.1}$$

其中 $f(x,y)$ 是平面区域 G 内给定的连续函数.

该方程的任意一个解 $y = y(x)$ 都是平面上的一条光滑曲线.如果在 f 的定义域中任给一点 $Q(x_0,y_0)$,在这一点处 y 的切线斜率为 $f(x_0,y_0)$,那么,可以画出一个方向场.详细讨论如下:

假设方程(1.2.1)有一个解

$$y = \varphi(x) \quad (x \in I), \tag{1.2.2}$$

其中 I 是这个解的存在区间.

此解在平面上的图形是一条光滑曲线,记为 Γ.

任意一点 $Q(x_0,y_0) \in \Gamma$,意味着 $y_0 = \varphi(x_0)$ $(x_0 \in I)$.而且,由方程(1.2.1)可知

$$\varphi'(x_0) = f(x_0,y_0) \tag{1.2.3}$$

是曲线 Γ 在点 $Q(x_0,y_0)$ 处切线的斜率.这样,在不求解微分方程(1.2.1)的情况

下，可以得到曲线 Γ 经过点 $Q(x_0, y_0)$ 的切线方程为

$$y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0). \tag{1.2.4}$$

事实上，在区域 G 中的任意一点 $P(x,y)$ 处，都可以作一个以 $f(P(x,y))$ 为斜率的一小段直线 $k(P(x,y))$ 来标明解曲线在该点处切线的方向. 称 $k(P(x,y))$ 为微分方程(1.2.1) 在点 $P(x,y)$ 处的**线素**. 另外，称区域 G 加上该区域上的全体线素为微分方程(1.2.1) 的**线素场**(或**方向场**).

因此，微分方程(1.2.1) 的任何解曲线 Γ 都与其方向场吻合，即对任意一点 $P(x,y) \in \Gamma$，Γ 在该点的切线与该点的线素 $k(P(x,y))$ 重合.

反之，假设区域 G 内有一条光滑曲线

$$\Lambda: y = \varphi(x) \quad (x \in J), \tag{1.2.5}$$

它与微分方程(1.2.1) 的线素场吻合，则 Λ 就是微分方程(1.2.1) 的一条解曲线.

如果在 Λ 上任意取一点 $P(x,y)$，则 $y = \varphi(x)$，同时 Λ 在点 $P(x,y)$ 的切线斜率为 $\varphi'(x)$；另外，点 $P(x,y)$ 的线素 $k(P(x,y))$ 的斜率为 $f(P(x,y)) = f(x,\varphi(x))$. 因为 Λ 与线素场吻合，即

$$\varphi'(x) = f(x,\varphi(x)) \quad (x \in J). \tag{1.2.6}$$

这就证明了 Λ 是微分方程(1.2.1) 的一条解曲线.

这样，求解初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{1.2.7}$$

就是求一条经过点(x_0, y_0) 并且与其线素场吻合的光滑曲线.

注 (1) 要通过线素场来寻找微分方程(1.2.1) 的精确解是比较困难的，但只要线素取得足够细密，就可以描绘出相当精确的解曲线.

(2) 在无法得到微分方程(1.2.1) 精确解的表达式的时候，可以用线素场来推断解的某些属性，从而使所讨论的问题在某种程度上获得解决.

(3) 即使知道解存在，也可以通过线素场去获得解的直观几何形象.

有一个比较可行的方法，即等斜线方法，通过这个方法，在一定的条件下，能够求出相应微分方程的解或者描绘出解曲线的基本形态.

等斜线由方程的右端来定义，即对方程(1.2.1) 来说，如果 k 是一个给定常数，满足 $f(x,y) = k$ 的曲线称为**等斜线**.

下面通过几个例子来说明这种方法的可行性.

例 1.2.1 通过等斜线求解方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}. \tag{1.2.8}$$

解 等斜线为

$$\frac{y}{x}=k \quad 或 \quad y=kx.$$

幸运的是,$y=kx$ 正好与方向场相吻合,所以,$y=kx$ 即为方程(1.2.8) 的解.图 1.1 为方程(1.2.8) 的方向场.

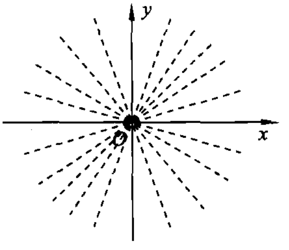

图 1.1

注 (1) 吻合是指方向场的方向正好与通过该点的曲线的切线相吻合.具体含义见上面的讨论.

(2) 原点 O 是这个方程的奇异点,即在这一点处无法确定方向场的方向.

例 1.2.2 用等斜线的方法求解下面的方程:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2+y^2.$$

解 设 $k>0$,则等斜线为 $x^2+y^2=k$,它们是一些圆心在原点的同心圆.图 1.2 粗略地表现了解的形态.

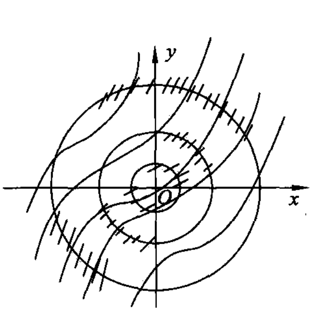

图 1.2

1.3 附　　注

1.3.1 常数消去法

给定一个常微分方程,如果可能的话,我们可以求得其通解,其中含有任意常数.反过来,如果给一个通解一样的函数,我们可以通过消去任意常数得到其满足的常微分方程.

该方法归纳起来有如下三个步骤:

(1) 常微分方程的阶数等于其通解中任意常数的个数.

(2) 通过求导数获得若干个关系式.

(3) 通过得到的关系式消去任意常数获得常微分方程.

例 1.3.1 求一个常微分方程使其中的未知函数 y 满足

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}, \tag{1.3.1}$$

其中 c_1, c_2 为任意常数.

解 y 中有两个任意常数,所以求导两次得

$$y' = -2c_1 e^{-2x} + 3c_2 e^{3x}, \tag{1.3.2}$$

$$y'' = 4c_1 e^{-2x} + 9c_2 e^{3x}. \tag{1.3.3}$$

(可以验证 c_1 和 c_2 是相互独立的.)

从式(1.3.2)和(1.3.3)中消去 c_1 得

$$y'' + 2y' = 15c_2 e^{3x}, \tag{1.3.4}$$

然后从式(1.3.1)和(1.3.2)中消去 c_1 得

$$y' + 2y = 5c_2 e^{3x}, \tag{1.3.5}$$

联合式(1.3.4)和(1.3.5)得

$$y'' - y' - 6y = 0.$$

这就是 y 满足的常微分方程.

1.3.2 奇解

一个非线性一阶常微分方程的奇解是指它满足:

(1) 它不包含在通解中.

(2) 奇解曲线上每一点处,都有通解曲线族中的某一条与其相切.

例 1.3.2 求解方程

$$y^2\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-a^2+y^2=0, \tag{1.3.6}$$

其中 $a>0$ 是常数.

解 易知 $|y|\leqslant a$,且 $y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\pm\sqrt{a^2-y^2}$. 因此

$$\frac{y\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2-y^2}}=\mathrm{d}x \tag{1.3.7}$$

或

$$-\frac{y\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2-y^2}}=\mathrm{d}x \tag{1.3.8}$$

或

$$a^2-y^2=0. \tag{1.3.9}$$

从式(1.3.7)得

$$x=c_1-\sqrt{a^2-y^2}, \tag{1.3.10}$$

从式(1.3.8)得

$$x=c_2+\sqrt{a^2-y^2}, \tag{1.3.11}$$

从式(1.3.9)得

$$y=a \quad 或 \quad y=-a. \tag{1.3.12}$$

联合式(1.3.10)和(1.3.11)得

$$(x-c)^2+y^2=a^2. \tag{1.3.13}$$

它是方程(1.3.6)的通解.

很明显,$y=a$ 和 $y=-a$ 也是方程(1.3.6)的解,但不包含在通解(1.3.13)中. 可以验证,$y=a$ 和 $y=-a$ 是方程(1.3.6)的奇解.

习　　题

1. 对下面所列方程，判断哪些方程是常微分方程，哪些方程是偏微分方程. 如果是常微分方程，请指出是线性还是非线性常微分方程以及它们的阶数.

(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+5x=0$;

(2) $\dfrac{d^2\omega}{dx^2}=a^2\dfrac{d^2\omega}{dy^2}$;

(3) $(x^2+2y^2)dx+(3x^2-4y^2)dy=0$;

(4) $y'''-3y'+2y=0$;

(5) $y'+p(x)y=q(x)$;

(6) $\dfrac{dy}{dx}=1-xy+y^2$.

2. 检验下面所列函数是相应常微分方程的解：

(1) $y(x)=4+ce^{3x}$, $y'-3y=-12$;

(2) $y(x)=c_1+c_2e^{3x}$, $y''-3y'=0$;

(3) $y(t)=\dfrac{1}{t}+\dfrac{3t^2}{c-t^3}$, $y'=y^2-\dfrac{2}{t^2}$;

(4) $y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x$, $y''+y=0$;

(5) $x\sin y+x^2y=c$, $(\sin y+2xy)dx+(x\cos y+x^2)dy=0$.

3. 通过下面所给的通解，寻找它们应该满足的常微分方程.

(1) $y(x)=\sin(x+c)$;

(2) $(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=c_3$;

(3) $y(x)=c_1x+c_2e^x$.

4. 假设平面上有一条光滑曲线，其上每一点处切线的斜率等于该切线在 y 轴上的截距. 求该曲线方程.

5. 通过等斜线寻找下面所列方程的近似解：

(1) $\dfrac{dy}{dx}=x$;

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2y}{x}$;

(3) $\dfrac{dy}{dx}=y-x^2$.