金题典

初中几何思维训练

王瑞松　王小勐　编著

安徽科学技术出版社

责任编辑　倪颖生
封面设计　武　迪

◎ 重在对初中生思维能力的培养
◎ 几何证题是有效的思维训练体操
◎ 对目标的直观把握
◎ 对可行道路分析的细致入微
◎ 坚韧不拔，终获成功
◎ 反思小结，再进一步

学习两百题　轻松考几何

ISBN 978-7-5337-3446-6

9 787533 734466 >

定价：20.00元

金题典

——初中几何思维训练

编著　王瑞松　王小勐

安徽科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

金题典:初中几何思维训练/王瑞松,王小勐编著.
—合肥:安徽科学技术出版社,2006.2
ISBN 978-7-5337-3446-6

Ⅰ.金… Ⅱ.①王…②王… Ⅲ.几何课-初中-解题
Ⅳ.G634.635

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 010603 号

金题典:初中几何思维训练 王瑞松 王小勐 编著

出 版 人:黄和平
责任编辑:倪颖生
封面设计:武 迪
出版发行:安徽科学技术出版社(合肥市政务文化新区圣泉路 1118 号
出版传媒广场,邮编:230071)
电 话:(0551)3533330
网 址:www.ahstp.net
E - mail:yougoubu@sina.com
经 销:新华书店
排 版:安徽事达科技贸易有限公司
印 刷:合肥东方红印务有限责任公司
开 本:850×1168 1/32
印 张:13.625
字 数:295 千
版 次:2009 年 9 月第 3 次印刷
定 价:20.00 元

出 版 说 明

中学数学分数和形两大块。初中几何思维训练对中学生的形象思维能力和逻辑推理能力培养是极其重要的。各种各样的辅助线的巧妙添加，对铺平思维道路，增强思维的条理性、多角度、全面和深入性是有效的训练。本书是作者多年研究的结晶，它具有以下特点：

一、本书选题适中，无难题、偏题、怪题。并且按初中课本的顺序进行编写。可作为初中平面几何学习的辅导教材，也可供高中学生复习平面几何之用。

二、本书共选 210 道题，平均每题有 5 种以上不同的解法，最多的一题有 16 种解法。本书的最大优点是通过追求一题多解开启读者多角度的思路，打开读者的数学智慧之门。

三、本书与已往的一题多解书不同的是：本书针对全体初中学生和教师，而不仅针对部分学习尖子。作者是为学习平面几何有困难的学生而写，是为教平面几何方法不多的教师而写，也是为想辅导孩子平面几何，又苦于无从着手的家长而写。因此，学生可以从本书中学到各种各样的解平面几何题的方法；教师可以从本书中挑选施教的例题；家长可以从中挑选合适的题目辅导孩子或布置相关的家庭作业；本书是家庭教师不可多得的教材，是家庭教师的好帮手。

四、本书共分三讲：第一讲　直线与三角形；第二讲　四边形和多边形；第三讲　圆。本书选题虽少，但是做一道题等于做五道题，做 200 道题等于做 1000 道题，从而可以减轻学生负担，提高学习效果。

限于作者的水平和时间，书中证法难免挂一漏万。对指出本书不足或提供新的解题方法的热心读者，作者将给予一定方式的感谢！

作　者

目　录

第一讲　直线与三角形

【题1】　如图 1－1,已知:$\angle B+\angle D+\angle F=360^\circ$.求证:$AB/\!/EF$.

证　过 D 作 $HD/\!/AB$,

则 $\angle B+\angle 1=180^\circ$.

$\because \angle B+\angle 1+\angle 2+\angle F=360^\circ$,

$\therefore \angle 2+\angle F=360^\circ-(\angle B+\angle 1)$

$=180^\circ$.

$\therefore EF/\!/HD$.故 $AB/\!/EF$.

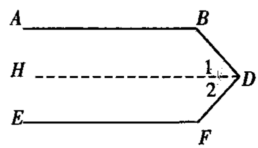

图 1－1

另证1　如图 1－2,过 B 作 BC 交 EF 于 C.

$\because \angle 1+\angle 3+\angle D+\angle F=360^\circ$,

$\therefore \angle 1=360^\circ-(\angle 3+\angle D+\angle F)$.

$\because \angle 2+\angle 3+\angle D+\angle F=360^\circ$(四边形的内角和等于 $180^\circ\times 2$),

$\therefore \angle 2=360^\circ-(\angle 3+\angle D+\angle F)$.　故 $\angle 1=\angle 2$.

$\therefore AB/\!/EF$.

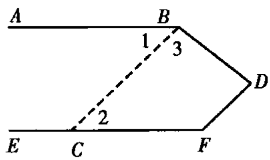

图 1－2

另证2　如图 1－3,连接 BF.

$\because \angle 1+\angle 3+\angle 2+\angle 4+\angle D=360^\circ$,

$\angle 3+\angle D+\angle 4=180^\circ$,

$\therefore \angle 1+\angle 2=360^\circ-180^\circ=180^\circ$.

$\therefore AB/\!/EF$.

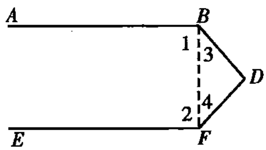

图 1－3

另证3　如图 1－4,延长 BD、EF 交于 H.

$\because \angle H=\angle 2-\angle 3$

$=\angle 2-(180^\circ-\angle BDF)$

$=\angle 2-180^\circ+\angle BDF$,

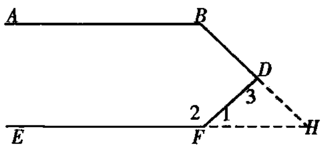

图 1-4

$\because \angle BDF = 360° - \angle B - \angle 2$,

$\therefore \angle H = \angle 2 - 180° + 360° - \angle B - \angle 2 = 180° - \angle B$.

即$\angle H + \angle B = 180°$, $\therefore AB /\!/ EF$.

另证 4 如图 1-5,过 D 作直线交 AB、EF 的延长线于 H、Q.

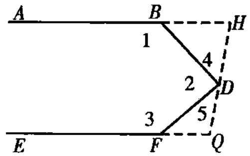

图 1-5

$\because \angle H = \angle 1 - \angle 4, \angle Q = \angle 3 - \angle 5, \angle 4 + \angle 5 = 180° - \angle 2$,

$\therefore \angle H + \angle Q = \angle 1 + \angle 3 - (\angle 4 + \angle 5) = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 - 180°$.

而$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 360°$,

$\therefore \angle H + \angle Q = 180°$. 故 $AB /\!/ EF$.

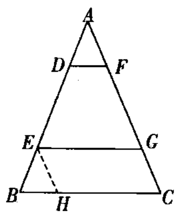

图 1-6

【题 2】 如图 1-6,在$\triangle ABC$ 的一边上截取 $AD = BE$.由 D、E 分别作BC 的平行线交AC 于F、G,则 $BC = DF + EG$.

证 过 E 作$EH /\!/ AC$ 交BC 于H.

$\because EG /\!/ BC$,$\therefore EGCH$ 为平行四边形,

$\therefore EG = HC$.

$\because DF /\!/ BC$, $EH /\!/ AC$, $\therefore \angle ADF = \angle B$, $\angle DAF = \angle BEH$.

又$\because AD = EB$,$\therefore \triangle ADF \cong \triangle EBH$.$\therefore DF = BH$.

$\therefore BC = BH + HC = DF + EG$.

另证 1 如图 1-7,过 B 作$BH /\!/ AC$ 交GE 的延长线于H,

$\therefore \angle HBE = \angle FAD$.

$\because DF /\!/ BC, EG /\!/ BC$,$\therefore DF /\!/ EG$.

$\therefore \angle ADF = \angle DEG$.

$\because \angle DEG = \angle BEH$,$\therefore \angle ADF = \angle BEH$.

又$\because AD = BE$,$\therefore \triangle ADF \cong \triangle BEH$.

$\therefore EH = DF$,

$HG = EH + EG = DF + EG$.

$\because BH /\!/ CG, HG /\!/ BC, \therefore HBCG$ 是平行四边形.

$\therefore HG = BC$.　$\therefore BC = DF + EG$.

另证 2　如图 1－7,取 DE、FG 的中点 P、Q,连接 PQ,则 PQ 是梯形 $DEGF$ 的中位线. $\therefore PQ = \frac{1}{2}(DF + EG)$(梯形中位线定理).

$\because AD = BE, \therefore AD + DP = BE + EP$.

$\therefore PQ$ 亦是$\triangle ABC$ 的中位线. $\therefore PQ = \frac{1}{2}BC$(三角形中位线定理).

$\therefore BC = DF + EG$.

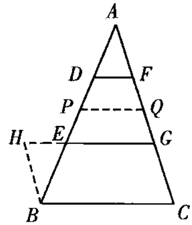

图 1－7

【题 3】　从等腰三角形底边上一点到两腰作垂线,则此两垂线之和等于一腰上的高.

已知:如图 1－8,$\triangle ABC$, $AB = AC$. BD 为 AC 边上的高,$PE \perp AB$, $PF \perp AC$.

求证:$PE + PF = BD$.

证　作 $PG \perp BD$ 于 G. 根据已知得矩形 $PFDG$. $\therefore GD = PF$.

$\because GP /\!/ AC, \therefore \angle GPB = \angle ACB$.

又$\because \angle EBP = \angle ABC = \angle ACB, \therefore \angle EBP = \angle GPB$.

$PB = BP, \angle PEB = \angle BGP = 90°$,

$\therefore \triangle PEB \cong \triangle BGP$.　$\therefore PE = BG$.

故　$BD = BG + GD = PE + PF$.

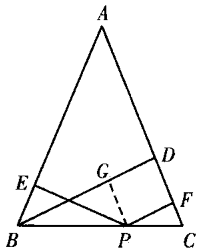

图 1－8

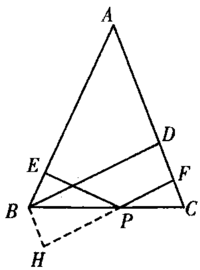

图 1－9

另证 1　如图 1－9,延长 FP 到 H,使 $FH = BD$. 根据已知得矩形 $BHFD$.

$\therefore BH /\!/ AC, \angle HBP = \angle ACB$.

又$\angle EBP = \angle ABC = \angle ACB$,　$\therefore \angle HBP = \angle EBP$.

故以 PB 为公共边的两直角三角形 PEB 和 PHB 全等. $\therefore PE = PH$.

$\therefore BD = FH = PH + PF = PE + PF$.

另证 2　如图 1-8，设$\angle ABC=\angle ACB=\alpha$，则根据三角函数关系，有：$BD=BC\sin\alpha$，$PE=BP\sin\alpha$，$PF=PC\sin\alpha$，

$\therefore PE+PF=(BP+PC)\sin\alpha=BC\sin\alpha$.

$\therefore BD=PE+PF$.

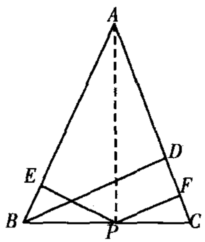

图 1-10

另证 3　如图 1-10，连接 AP. 根据面积关系有：

$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle APB}+S_{\triangle APC}$，$AB=AC$，

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BD$，$S_{\triangle APC}=\frac{1}{2}AC\cdot PF$，

$S_{\triangle APB}=\frac{1}{2}AB\cdot PE=\frac{1}{2}AC\cdot PE$，

$\therefore \frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}AC\cdot PE+\frac{1}{2}AC\cdot PF$.

$\therefore BD=PE+PF$.

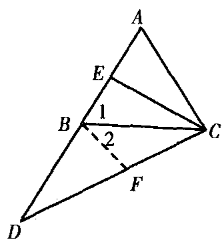

图 1-11

【题 4】　等腰三角形 ABC 的顶点为 A，延长腰 AB 到 D，使 $BD=AB$，那么 CD 就等于中线 CE 的两倍.

证　如图 1-11，取 CD 的中点 F，则 $CF=\frac{1}{2}CD$，连接 BF.

$\because BD=AB$，$\therefore BF\parallel AC$，$BF=\frac{1}{2}AC$（三角形中位线逆定理）.

又 $AB=AC$，$\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}AB=BE$，

$\therefore BF=BE$.

又$\angle 2=\angle ACB=\angle 1$，$BC=BC$，

$\therefore \triangle CEB\cong\triangle CFB$.　$\therefore CF=CE$，则$\frac{1}{2}CD=CE$，$\therefore CD=2CE$.

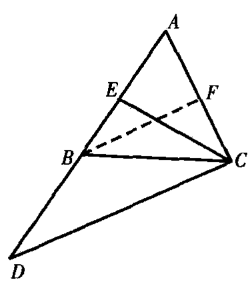

图 1-12

另证 1　如图 1-12，作 AC 的中线 BF.

$\because AB=AC$，$\therefore BF=CE$.

又$\because AF=FC, AB=BD$,

$\therefore BF=\dfrac{1}{2}CD$(三角形中位线定理).

则 $CE=\dfrac{1}{2}CD$,故 $CD=2CE$.

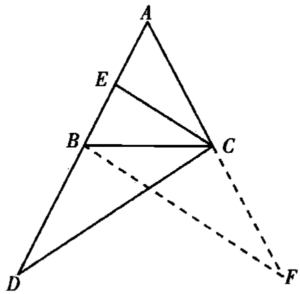

图 1-13

另证 2　如图 1-13,延长 AC 到 F,使 $CF=AC$.连接 BF,又 $AE=BE$,

$\therefore BF=2CE$(三角形中位线定理).

在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle AFB$ 中,$\because AC=AB$, $\angle DAC=\angle FAB$, $AD=AF$.

$\therefore \triangle ADC \cong \triangle AFB$.　$\therefore CD=BF$.　故 $CD=2CE$.

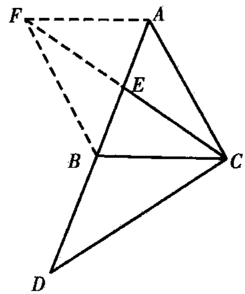

图 1-14

另证 3　如图 1-14,延长 CE 到 F,使 $EF=CE$.连接 AF、BF,又 $BE=AE$,$\therefore$四边形 $AFBC$ 为平行四边形(对角线互相平分的四边形为平行四边形).

$\therefore \angle FBA=\angle BAC, FB=AC$.

而 $AC=AB$, $\angle ACB=\angle ABC$, $\therefore FB=AB$, $\angle FBC=\angle FBA+\angle ABC=\angle BAC+\angle ACB$.

又 $\angle DBC=\angle BAC+\angle ACB$, $\therefore \angle FBC=\angle DBC$.

又 $DB=AB=FB$, BC 为公共边,$\therefore \triangle FBC \cong \triangle DBC$.　$\therefore CD=CF$.

而 $CF=2CE$,故 $CD=2CE$.

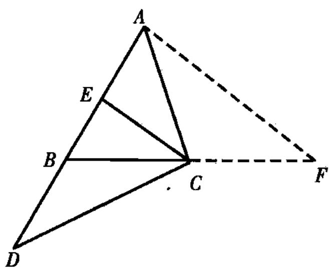

图 1-15

另证 4　如图 1-15,延长 BC 到 F,使 $CF=BC$,连接 AF.

$\because AE=BE$,显然 $AF \mathrel{\underline{\parallel}} 2CE$(三角形中位线定理).

在$\triangle DBC$ 和$\triangle ACF$ 中,有 $CF=BC$.

$\because DB=AB, AB=AC, \therefore DB=AC$.

又$\angle ACF=\angle BAC+\angle ABC$, $\angle DBC=\angle BAC+\angle ACB=\angle BAC+\angle ABC$,

$\therefore \angle ACF=\angle DBC$.　$\therefore \triangle DBC \cong \triangle ACF$.

$\therefore DC=AF$. 即 $DC=2CE$.

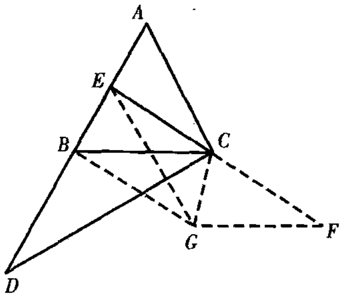

图 1-16

另证 5 如图 1-16,延长 EC 到 F,使 $CF=CE$.过 E 作 $EG\mathrel{\underset{=}{\parallel}}AC$,连接 BG、CG、FG,则 $AEGC$ 是平行四边形,$\therefore AE\mathrel{\underset{=}{\parallel}}CG$.

$\because AE=BE$, $\therefore BE\mathrel{\underset{=}{\parallel}}CG$.于是 $BECG$ 也是平行四边形,$\therefore BG\mathrel{\underset{=}{\parallel}}EC$.于是 $BG\mathrel{\underset{=}{\parallel}}CF$,$\therefore BGFC$ 亦为平行四边形.$\therefore BC=FG$.

$\because CG/\!/AB$,$FG/\!/BC$,$EG/\!/AC$,

$\therefore \angle CGF=\angle ABC$,$\angle EGC=\angle BAC$.

而 $\angle DBC=\angle BAC+\angle ACB=\angle BAC+\angle ABC$,$\angle EGF=\angle BAC+\angle ABC$,

$\therefore \angle DBC=\angle EGF$.

而 $BD=AB=AC=EG$,$\therefore \triangle DCB\cong\triangle EGF$.

$\therefore CD=EF$. 故 $CD=2CE$.

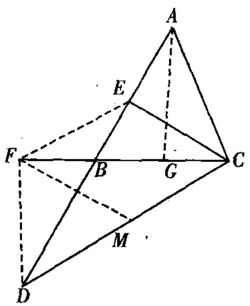

图 1-17

另证 6 如图 1-17,过 D 作 $DF\perp BC$,交 CB 的延长线于 F.取 CD 的中点 M,连接 FM、EF,过 A 作 $AG\perp BC$ 于 G,显然 $CD=2FM$,$BG=\frac{1}{2}BC$.

$\because AB=BD$,$\angle FBD=\angle GBA$, $\therefore \text{Rt}\triangle DFB\cong\text{Rt}\triangle AGB$. $\therefore BF=BG$.

$\therefore BF:BC=1:2$,$BE:BD=1:2$,故 $BF:BC=BE:BD=1:2$.

又 $\angle EBF=\angle DBC$,$\therefore \triangle BEF\backsim\triangle BDC$,$EF:DC=1:2$,$\angle EFB=\angle DCB$,

$\therefore EF/\!/CD$,$EF=CM$.$\therefore EFMC$ 为平行四边形. $\therefore FM=CE$.

又 $FM=\frac{1}{2}CD$,$\therefore CD=2CE$.

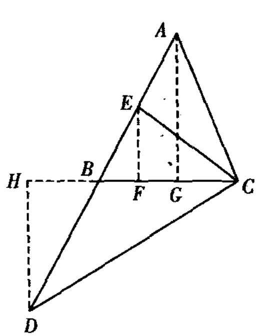

图 1-18

另证 7 如图 1-18,过 E 作 $EF\perp BC$ 于 F,过 D 作 $DH\perp BC$,交 CB 的延长线于 H,则 $EF/\!/DH$.

$\therefore \frac{EF}{DH}=\frac{BE}{BD}=\frac{1}{2}$,$\frac{BF}{BH}=\frac{1}{2}$.

作 BC 上的高 AG，则 $BG=CG$，$BF=GF$（三角形中位线定理）.

$\therefore CF:CH=\frac{3}{4}BC:\frac{3}{2}BC=1:2$.

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle CEF\backsim \mathrm{Rt}\triangle CDH$.

$\therefore \frac{CE}{CD}=\frac{CF}{CH}=\frac{1}{2}$，即 $CD=2CE$.

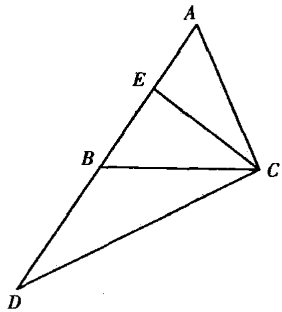

图 1－19

另证 8　如图 1－19，$\because AE=\frac{1}{2}AB$，$AB=AC$，$\therefore \frac{AE}{AC}=\frac{1}{2}$.

又 $\because \frac{AB}{AD}=\frac{1}{2}$，$\therefore \frac{AC}{AD}=\frac{1}{2}$.　$\therefore \frac{AE}{AC}=\frac{AC}{AD}$.

又 $\angle A$ 为公共角. $\therefore \triangle AEC\backsim\triangle ACD$.

$\therefore \frac{CE}{CD}=\frac{AE}{AC}=\frac{1}{2}$.　故 $CD=2CE$.

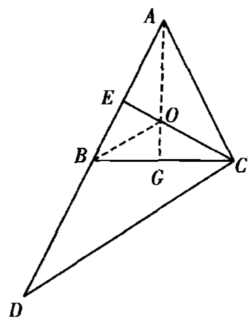

图 1－20

另证 9　如图 1－20，作 BC 的高 AG，交 CE 于 O，AG 亦是 BC 的中线.

又 CE 是 AB 的中线.　$\therefore O$ 为 $\triangle ABC$ 的重心.

故有 $\frac{EO}{EC}=\frac{1}{3}$.

又 $\frac{EB}{ED}=\frac{1}{3}$，$\therefore \frac{EO}{EC}=\frac{EB}{ED}$，故 $BO/\!/DC$.

$\therefore \frac{BO}{CD}=\frac{EB}{ED}=\frac{1}{3}$（$\because EB=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}BD$），

而 $BO=CO$，$\therefore \frac{CO}{CD}=\frac{1}{3}$.

又 $\because CO=\frac{2}{3}CE$，$\therefore CD=2CE$.

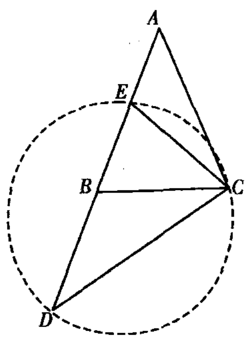

图 1－21

另证 10　如图 1－21，作 $\triangle DCE$ 的外接圆.

$\because AC=AB$，$\therefore AC^2=AB^2=\frac{1}{2}AB\cdot 2AB=AE\cdot AD$（切线定理）.

$\therefore AC$ 是 $\triangle DCE$ 外接圆的切线.　$\therefore \angle ACE=\angle D$.

又 $\because \angle BCE=\angle ACB-\angle ACE$，$\angle BCD=\angle ABC-\angle D$，故 $\angle BCE=$

$\angle BCD$.

则 BC 平分 $\angle DCE$，$\frac{CE}{CD}=\frac{BE}{BD}=\frac{1}{2}$（三角形角平分线分对边两线段之比等于夹这个角的两边之比）.

$\therefore CD=2CE$.

另证 11[*] 如图 1－19，设 $AB=AC=a$，则 $AD=2a$，$AE=\frac{1}{2}AB=\frac{a}{2}$. 在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle ACD$ 中，根据余弦定理[**]有：

$$CE^2=a^2+\frac{a^2}{4}-2\times a\times\frac{a}{2}\cos A=\frac{1}{4}(5a^2-4a^2\cos A)$$

$$CD^2=4a^2+a^2-2\times2a\times a\cos A=5a^2-4a^2\cos A.$$

$\therefore CD^2=4CE^2$. $\therefore CD=2CE$.

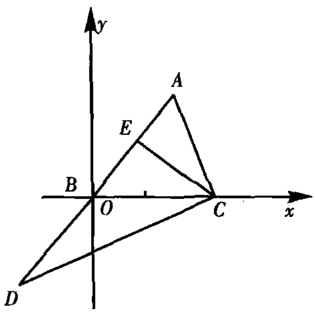

图 1－22

另证 12 如图 1－22，以 BC 为横轴，B 为原点建立直角坐标系，根据已知条件，设各点坐标如下：$A(a,b)$，$C(2a,0)$，$D(-a,-b)$，$E\left(\frac{1}{2}a,\frac{1}{2}b\right)$. 则根据两点间距离公式有：

$$CE^2=\left(\frac{a}{2}-2a\right)^2+\left(\frac{b}{2}-0\right)^2=\frac{9}{4}a^2+\frac{b^2}{4},$$

$$CD^2=(2a+a)^2+(0+b)^2=4\left(\frac{9}{4}a^2+\frac{b^2}{4}\right).$$

$\therefore CD^2=4CE^2$. 故 $CD=2CE$.

简评 首证及另证 1、2、4、7 是根据三角形中位线定理，并以此为出发点作辅助线，使某线段成为三角形的中位线. 这种作辅助线的方法，一般称为"中点法"，是一种很常用的作辅助线的方法. 另证 9 是"中点法"的另一种形式，它的根据是中线定理.

---

* 此证用了三角函数知识.

** 余弦定理：设三角形的三个内角分别为 A、B、C，其所对边分别为 a、b、c，则 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

另证3、5是根据平行四边形的有关定理，并以相关的定理为出发点作辅助线，形成新的平行四边形.这种作辅助线的方法一般称为“平行四边形法”，也是一种很常用的作辅助线方法.

另证6是“中点法”和“平行四边形法”的综合运用.

另证10比较简单，它是巧妙地利用切线定理和三角形角平分线性质定理达到证题目的.另证8是利用相似三角形达到证题目的.

另证11是利用余弦定理达到证题目的.另证12是解析法，也是一种常用的证法.

【题5】　如图1－23，已知$\angle 1+\angle 2=\angle BCD$，求证：$AB\parallel DE$.

证　如图1－23，连接BD.

则$\angle BCD+\angle 3+\angle 4=180°$，

而$\angle BCD=\angle 1+\angle 2$，$\therefore \angle 1+\angle 3+\angle 2+\angle 4=180°$.

$\therefore AB\parallel DE$.

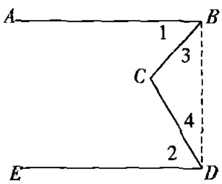

图1－23

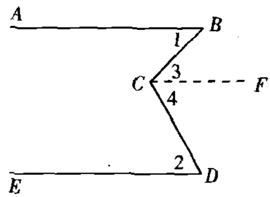

图1－24

另证1　如图1－24，过C作$CF\parallel AB$.则$\angle 1=\angle 3$.　$\because \angle BCD=\angle 3+\angle 4=\angle 1+\angle 2$，$\therefore \angle 2=\angle 4$.

$\therefore CF\parallel DE$.　故$AB\parallel DE$.

另证2　如图1－25，延长DC交AB于F，则$\angle BCD=\angle 1+\angle 3=\angle 1+\angle 2$.　$\therefore \angle 3=\angle 2$.

$\therefore AB\parallel DE$.

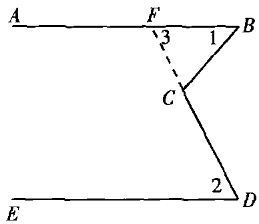

图1－25

【题6】　证明定理：三角形三内角之和等于180°.

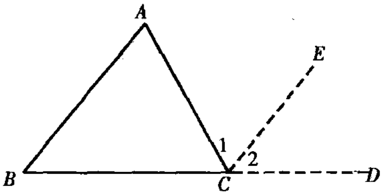

图 1－26

证 如图 1－26，延长 BC 到 D，过 C 作 $CE // AB$，则 $\angle 1=\angle A$，$\angle 2=\angle B$.

$\because \angle ACB+\angle 1+\angle 2=180^\circ$，

$\therefore \angle ACB+\angle A+\angle B=180^\circ$.

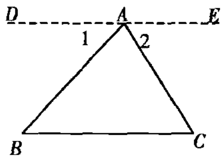

图 1－27

另证 1 如图 1－27，过 A 作 $DE // BC$，则 $\angle 1=\angle B$，$\angle 2=\angle C$.

$\because \angle 1+\angle BAC+\angle 2=180^\circ$，$\therefore \angle B+\angle BAC+\angle C=180^\circ$.

另证 2 如图 1－28，作三角形的外接圆 $\odot O$，则 $\angle A\overset{m}{=}\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$，$\angle B\overset{m}{=}\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$，$\angle C\overset{m}{=}\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$（“$\overset{m}{=}$”表示等号两边度数相等）.

$\therefore \angle A+\angle B+\angle C\overset{m}{=}\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{AB})=\frac{1}{2}$圆度数$=180^\circ$. 即 $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$.

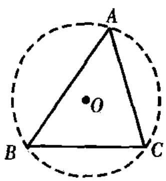

图 1－28

【题 7】 已知等腰 $\triangle ABC$，$AB=AC$，CD 为腰 AB 的高，则 $\angle BCD=\frac{1}{2}\angle A$.

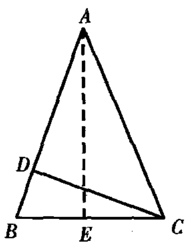

图 1－29

证 如图 1－29，$\because \angle B=\angle ACB$，$\angle B+\angle ACB=180^\circ-\angle A$，$\therefore 2\angle B=180^\circ-\angle A$. 即 $\angle B=90^\circ-\frac{1}{2}\angle A$.

又 $\because \angle BCD=90^\circ-\angle B=90^\circ-\left(90^\circ-\frac{1}{2}\angle A\right)$，

$\therefore \angle BCD=\frac{1}{2}\angle A$.

另证 1 如图 1－29，作 BC 的高 AE，则 AE 平分 $\angle BAC$.

$\because \angle BAE + \angle B = 90^\circ$，$\angle BCD + \angle B = 90^\circ$，$\therefore \angle BCD = \angle BAE = \frac{1}{2}\angle BAC$.

另证 2 如图 1－30，在 DA 上取 $DE = DB$，连接 CE，则$\triangle CBE$ 亦为等腰三角形，$\therefore \angle BCD = \frac{1}{2}\angle BCE$.

$\because$ 等腰三角形 ABC 和 CBE 有公共底角 B，$\therefore \angle A = \angle BCE$.

故$\angle BCD = \frac{1}{2}\angle A$.

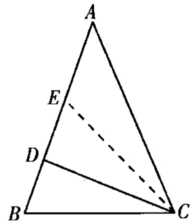

图 1－30

另证 3 如图 1－31，过 B 作 $BE \perp BC$，交 CA 的延长线于 E.

$\because \angle ABC = \angle ACB$，$\angle BCD + \angle ABC = 90^\circ$，$\angle ABE + \angle ABC = 90^\circ$，$\angle BEA + \angle ACB = 90^\circ$.

$\therefore \angle BCD = \angle ABE = \angle BEA$.

又$\angle ABE + \angle BEA = \angle BAC$，即 $2\angle BCD = \angle BAC$.

$\therefore \angle BCD = \frac{1}{2}\angle BAC$.

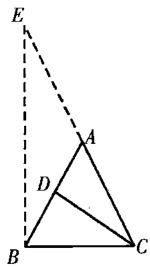

图 1－31

另证 4 如图 1－32，作 AC 上的高 BE 交 CD 于 F.

$\because \angle CBD = \angle BCE$，$BC$ 公共.

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle BCD \cong \mathrm{Rt}\triangle CBE$. $\therefore \angle BCD = \angle CBE$.

又$\because \angle BFC = \angle DFE = 360^\circ - \angle ADF - \angle AEF - \angle A = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \angle A = 180^\circ - \angle A$.

而 $2\angle BCD = 180^\circ - \angle BFC$.

$\therefore \angle BCD = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BFC) = \frac{1}{2}(180^\circ - 180^\circ + \angle A) = \frac{1}{2}\angle A$.

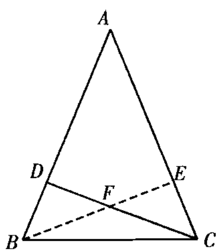

图 1－32

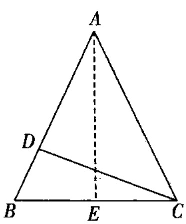

图 1－33

另证 5 如图 1－33，作 BC 上的高 AE，则 AE 平分$\angle BAC$，则$\angle BAE = \frac{1}{2}\angle A$.

$\because \angle AEC = \angle ADC = 90^\circ$，$\therefore A$、$D$、$E$、$C$ 4 点共圆.

$\therefore \angle BCD = \angle BAE$，故$\angle BCD = \frac{1}{2}\angle A$.