

过程能力指数

孙小素 著

统计应用研究

 中国统计出版社
China Statistics Press



过程能力指数统计应用研究

孙小素 著

(京)新登字 041 号

图书在版编目(CIP)数据

过程能力指数统计应用研究/孙小素著. —北京:
中国统计出版社, 2011. 8

ISBN 978—7—5037—6312—0

I. ①过… II. ①孙… III. ①企业管理—生产过程—
质量控制—研究 IV. ①F273

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 157175 号

过程能力指数统计应用研究

作 者/孙小素

责任编辑/钟 钰

装帧设计/黄 晨

出版发行/中国统计出版社

通信地址/北京市西城区月坛南街 57 号 邮政编码/100826

办公地址/北京市丰台区西三环南路甲 6 号

网 址/www.stats.gov.cn/tjshujia

电 话/邮购(010)63376907 书店(010)68783172

印 刷/科伦克三莱印务有限公司

经 销/新华书店

开 本/710×1000mm 1/18

字 数/190 千字

印 张/11.75

版 别/2011 年 8 月第 1 版

版 次/2011 年 8 月第 1 次印刷

书 号/ISBN 978—7—5037—6312—0/F. 3036

定 价/28.00 元

中国统计版图书,版权所有。侵权必究。

中国统计版图书,如有印装错误,本社发行部负责调换。

序

20 世纪的工业革命改变了产品的生产方式,使企业可以借助机器大批量地生产产品。生产方式的革命至少引起两个方面的根本改变。其一,经济生活中的主要矛盾由注重产品的数量转向注重产品的质量。美国著名质量管理专家 J. M. Juran 指出,20 世纪以“生产率的世纪”载入史册,未来的世纪将是“质量的世纪”。质量问题越来越成为经济发展的战略问题,质量水平的高低综合反映着一个国家的经济、科技、教育和管理水平,质量作为关键因素影响着国民经济和对外贸易发展。其二,质量管理模式发生了根本改变。主要表现是:质量管理的对象、思想、方法等都发生了巨大变化。质量管理的对象由产品演化为过程。质量管理对象的变化催生了统计过程控制(Statistical Process Control, SPC)技术的出现,事后的质量检验也被预防为主的质量管理思想所取代。

质量成为经济生活中的新的主要矛盾,而过程又是决定质量的关键要素,从而更加凸显了过程管理的重要意义。把过程作为管理的焦点,面临的首要问题就是,选择什么样的过程进行管理;对于选定的过程实施管理后,效果如何?这些都涉及到过程质量的评估问题。同时,企业选择什么样的供货商,实现互利共赢,同样离不开对供货商过程的质量评估。过程能力指数(Process Capability Index, PCI)就是这样一个反映过程质量好坏的指标,现已成为最广泛使用的统计过程控制工具之一。

令人遗憾的是,以往过程能力指数的研究一味追求理论上的完整性,对过程能力分析和评价中的一些难点和亟待解决的问题却鲜有人问津。由于缺乏理论指导,过程能力指数在应用中暴露出这样那样的问题,不能充分发挥其在质量管理中的作用。因此,调查了解过程能力指数应用中存在的问题,进行深入的、针对性的“问题导向”研究,才是过程能力指数研究的应有之意。

山东工商学院孙小素老师的专著通过对我国企业过程能力指数应用情况的深入调查,找出应用中存在的主要问题,并从理论上进行了深入的研究。该书的主要贡献和创新点在于:第一,通过问卷调查,掌握了我国企业使用过程能力指数情况的第一手资料。不仅为作者的研究提供了视角,而且也为企业、培训机构、行业协会、有关管理部门开展与过程能力指数有关的活动提供了参考依据;第二,对现有的国家标准——GB/T 4091—2001《常规控制图》中最广泛使用的均值—标准差($\bar{x}-s$)控制图进行了改进,提高了人们准确判断过程受控或失控的能力;第三,研究解决了过程能力分析和评价中的一些难点和亟待解决的问题。包括过程能力指数应用的前提条件;基本过程能力指数的性质、特点,相互之间的数量关系;基本过程能力指数估计量的选择,参数估计,假设检验,必要样本量的确定等统计推断问题。

该书的选题富有理论意义和实际意义,同时也是一项研究难度较大的工作。作者经过深入调研,收集了大量的第一手材料,进行了深入分析,对我国企业过程能力指数应用情况进行了详细的了解。在此基础上,重点研究了过程能力指数应用中的统计推断理论,并把研究成果以统计表格这种简单明了的形式提供给企业。该书的出版,不仅可以为我国企业正确使用过程能力指数进行质量管理提供重要的参考,而且有利于推动和深化对过程能力指数的研究。

当然,该书还存在一些有待进一步研究解决的问题。如在非正态条件下如何进行过程能力指数的统计推断,如何将现有的研究成果转换为统计软件,以便过程能力指数的更广泛推广等,希望作者和其他有志于这一方面

研究的学者今后能对这些问题作进一步研究,使其能够更好地为改进与完善我国企业的质量管理发挥更大的作用。

A stylized, bold handwritten signature in black ink, consisting of the characters '曾五一' (Zeng Yi-Wei).

2011 年 3 月

摘要

过程能力指数是将过程输出与工程规格进行比较后得到的一个相对数,用于反映过程生产合格产品的能力。作为企业最广泛使用的统计过程控制工具之一,它在促进质量保证、降低成本以及提高顾客满意度等方面发挥着巨大作用。现在它已成为企业在发布其产品质量报告时的世界语,且尤其得到了管理层的青睐。

令人遗憾的是,目前过程能力指数的研究一味追求理论上的完整性,越来越脱离过程能力指数的应用性本质,造成的直接后果是:一方面,新的过程能力指数不断涌现出来,令人眼花缭乱;另一方面,对过程能力分析和评价中的一些难点和亟待解决的问题却鲜有人问津。由于缺乏理论指导,过程能力指数在应用中暴露出这样那样的问题,不能充分发挥其在质量管理中的作用。因此,调查了解过程能力指数应用中存在的问题,进行深入的、针对性的“问题向导”研究,才是过程能力指数研究的应有之意。

问卷调查结果显示,我国企业过程能力指数应用中存在的主要问题有:首先,计算过程能力指数的企业不多,过程能力指数没有发挥其应有的作用;第二,即使是计算了过程能力指数,但由于数据计量不准确,样本缺乏代表性,以及未进行有效的过程控制 and 数据分布的检验,影响了其计算结果的可信度;第三,不考虑样本的随机性,简单地根据基于样本数据计算的点估计值就给过程的绩效下定论。

针对这些问题,本书首先对过程能力指数应用的前提条件进行了系统研究,其中,重点研究了过程是否受控的统计检验方法,改进了现有的检验方法。

其次,对企业广泛使用的过程能力指数 C_p, C_{pk}, C_{pm} , 笔者首先研究了它们的统计性质和特点;其次,通过对比研究,选择出了其优良估计量;第三,探讨了这些估计量的抽样分布,以及其数字特征;最后,在抽样分布的基础上,探讨了 C_p, C_{pk}, C_{pm} 的区间估计、假设检验及样本量的确定等问题,并将研究成果以简单明了的统计表格形式提供给需要者,方便过程能力指数的统计推断技术在企业的推广使用。

最后,根据各个指数的特点,以及过程的多样性特点,尝试构建了过程能力指数体系,以期比较全面、客观地评价过程的绩效状况。

本书的主要贡献和创新点在于:第一,通过问卷调查,掌握了我国企业使用过程能力指数情况的第一手资料。不仅为本书的研究提供了视角,而且也为企业、培训机构、行业协会、有关管理部门开展与过程能力指数有关的活动提供了参考依据;第二,对现有的国家标准——GB/T 4091—2001《常规控制图》中最广泛使用的均值—标准差($\bar{x}-s$)控制图进行了改进,提高了人们准确判断过程受控或失控的能力;第三,通过比较,构建了 C_p 的优良估计量,研究了该估计量的抽样分布,并以此为基础,研究了 C_p 的统计推断问题,我国目前这方面研究还很有限;第四,针对 C_{pk} 与 C_{pm} 的假设检验,因其分别涉及到非中心的 t 分布和非中心的 χ^2 分布,存在一定的难度,本书提出了一个简单可行且近似精度较高的方法,解决了这一问题;第五,在对 C_{pk} 中的偏移系数 k 的研究过程中,本书尝试将质量管理中的两种统计控制技术——控制图和过程能力指数结合起来,较好地界定了 k 的取值范围,这一问题长期以来一直困扰我国质量管理界理论与实际工作者,引起许多争议;第六,对 C_{pk} 与 C_{pm} 的关系进行了系统、全面的研究,认为这两个指数在企业的过程能力绩效的评价中有很强的互补性,这也是其他文献中所不曾提到的。

关键词:过程能力指数;估计量;统计推断

目 录

第一章 绪 论	(1)
第一节 选题背景与意义	(1)
第二节 国内外研究现状综述	(3)
第三节 本书的研究框架和研究内容	(12)
第四节 本书的主要贡献和创新探索	(13)
第二章 我国企业使用过程能力指数调查与问题分析	(15)
第一节 我国企业使用过程能力指数情况调查	(15)
第二节 过程能力指数计算中的一般准则	(19)
第三节 基本过程能力指数应用条件的统计检验	(22)
本章小结	(36)
第三章 潜在过程能力指数 C_p 的应用研究	(38)
第一节 潜在过程能力指数简介	(38)
第二节 潜在过程能力指数估计量的比较与选择	(41)
第三节 潜在过程能力指数的区间估计、假设检验及样本量的 确定	(58)
本章小结	(72)
第四章 有偏移的过程能力指数 C_{pk} 的应用研究	(74)
第一节 有偏移的过程能力指数 C_{pk} 简介	(74)
第二节 正确认识 C_{pk} 中的偏移系数 k	(78)
第三节 有偏移的过程能力指数 C_{pk} 的区间估计、假设检验及 样本量的确定	(89)

本章小结	(108)
第五章 Taguchi 过程能力指数 C_{pm} 的应用研究	(109)
第一节 Taguchi 过程能力指数 C_{pm} 简介	(109)
第二节 C_{pm} 与 C_{pk} 的比较研究	(113)
第三节 Taguchi 过程能力指数 C_{pm} 的区间估计、假设检验及 样本量的确定	(120)
本章小结	(153)
第六章 研究总结与展望	(154)
第一节 过程能力指数体系的构建设想	(154)
第二节 研究总结与展望	(160)
附录 企业过程能力指数现状调查问卷	(162)
参考文献	(165)
后记	(177)

第一章

绪 论

第一节 选题背景与意义

本书针对过程能力指数实际应用中急需解决的统计问题展开研究,主要内容为常用过程能力指数的统计推断问题,旨在为正确评价过程绩效、选择需要改进的过程以及进行供货商比较提供科学依据。

一、选题背景

自 1974 年美国著名质量管理专家 J. M. Juran^[1]首次将过程能力指数的概念引入质量管理后,尤其在 1985 年 Hsiang 和 Taguchi^[2]定义过程能力指数 C_{pm} , 1986 年 Kane^[3]定义过程能力指数 C_{pk} 后,如何运用过程能力指数去分析评价过程能力成为世界各国专家学者探讨的热门话题。从理论数学杂志到质量控制出版物,各种有关过程能力指数的论文大量涌现出来。仅美国的 Journal of Quality Technology,就分别在 1992 年 10 月和 2002 年 1 月出版了两期过程能力指数专刊。截止到目前为止,即使是保守估计,人们定义的单变量过程能力指数多达 20 余种,多变量过程能力指数也有 7 种^[4-5],这些指数按照提出的先后顺序和使用的前提条件不同,大致可划分为 4 代^[6-8]。人们在过程能力指数研究中表现出来的极大热情,以及取得的“丰硕”成果,一方面说明过程绩效评价的重要性,同时由于现实过程比较复杂,也要求针对不同的过程设计不同的过程能力指数;另一方面也暴露出一些不良的倾向。其一,重视从学术的角度提出新的过程能力指数,轻视对已有过程能力指数及其估计量的性质研究,由此造成的直接后果是,实践者常常把过程能力指数的估计量当做一种新



的过程能力指数来谈论,这种情况甚至发生在理论工作者身上;其二,一些过程能力指数在设计时不考虑工程技术人员统计知识的欠缺,设计太抽象,计算起来太复杂,不利于实际部门的应用;其三,一些过程能力指数的设计背离了其设计初衷,为理论而理论,为指数而指数;其四,以实际过程的复杂多样为理由,设计过多的过程能力指数,无法体现理论研究抽象性的特点,同时还引起实践者的抱怨:“这么多的过程能力指数只会引起混乱”。^{[5][6]}过程能力指数研究中的这些不良倾向归纳起来就是,过程能力指数的研究已在某种程度上偏离实际。正是在这一背景下,笔者选择了该问题进行研究。

二、研究意义

20 世纪的工业革命改变了产品的生产方式,机器加工取代了手工操作,使企业可以借助机器大批量地生产产品。生产方式的革命至少引起两个方面的根本改变。其一,经济生活中的主要矛盾由注重产品的数量转向注重产品的质量。美国著名质量管理专家 J. M. Juran 指出,20 世纪以“生产率的世纪”载入史册,未来的世纪将是“质量的世纪”。是呀,放眼全球,我们深切地感受到,质量问题越来越成为经济发展的战略问题,质量水平的高低综合反映着一个国家的经济、科技、教育和管理水平,质量作为关键因素影响着国民经济和对外贸易发展。其二,质量管理模式发生了根本改变。主要表现是:质量管理的对象、思想、方法等都发生了巨大变化。质量管理的对象由产品演化为过程。机器大工业极大地提高了社会的生产力,企业借助机器大批量地生产产品。但由于企业的最终产品往往是由不同工序加工的各种零部件组合而成的,使得通过大批量生产方式所形成的产品缺乏质量保障。随着工业技术的进一步发展,为满足大规模生产的需要,要求各种零部件能达到高度的一致性和协调性。正是这种对产品质量高度一致性要求,使企业必须不得不关注产品的生产过程。过程即一整套共同为顾客创造价值的首尾相连的活动。除非能够把所有的努力都整合起来,否则就很难实现企业所渴望的结果。自 20 世纪 20 年代的休哈特开始,对过程进行控制就一直是质量管理的一个基本信条。之后,戴明进一步发展了休哈特统计过程控制的思想,提出了著名的 PDCA 循环,朱兰则在其《管理突破》一书中率先提出了过程改进的概念。20 世纪 80 年代,随着那些领先的公司纷纷跨入到了迅速的过程改进活动中,过程管理的必要性也愈加明确起来。质量管理对象的变化催生了统计过程控制(Statistical Process Control, SPC)技术的出现,事后的质量检验也被预防为主的质量管理思想所取代。

质量成为经济生活中的新的主要矛盾,而过程又是决定质量的关键要素,

从而更加凸显了过程管理的重要意义。把过程作为管理的焦点,面临的首要问题就是,选择什么样的过程进行管理,因为产品的生产通常会经历许许多多的工序(过程),不同的过程对最终产品的质量有着程度不同的影响,而企业由于资源有限,只能选择关键的过程进行管理;对于选定的过程实施管理后,效果如何?这些都涉及到过程质量的评估问题。同时,企业选择什么样的供货商,实现互利共赢,同样离不开对供货商过程的质量评估。过程能力指数(Process Capability Index, PCI)就是这样一个反映过程质量好坏的指标。它是将过程输出与工程规格进行比较后得到的一个无量纲的相对数,用于反映过程生产合格产品的能力。因为该指数是无量纲变量,所以可以在不同国家、不同行业、不同企业的不同过程之间进行比较。一些国际大公司还制订计划,使用过程能力指数来推动整个企业的质量改进。过去几年里,尽管过程能力指数的发展和使用导致了許多争论,但是这些指数已经成为最广泛使用的统计过程控制工具之一^[9]。

无论现存的过程能力指数是太多还是太少,也无论其具体形式如何,它们都依赖于总体的参数,如总体均值 μ ,总体标准差 σ ,总体的偏度系数 α_3 ,总体的合格率 P ,总体的不合格率 p 等等,实际上,其本身也是总体的参数。这些参数的精确取值,严格地讲,只有当过程完成其历史使命后才能得到,当然这样也就失去了将过程能力指数作为过程管理的重要统计方法的意义。比较有意义的做法是,从过程中抽取样本对过程能力指数进行推断,这必然会涉及如何保证样本的代表性,如何设计这些参数的估计量,如何根据估计值对参数做出正确的判断等统计问题,对这些问题的深入研究,显然十分必要,也十分重要。

第二节 国内外研究现状综述

从各种刊物上发表的关于过程能力指数的文献数量不断增加的趋势看,过程能力指数这个话题可以说是历久弥新。从1974年人们第一次提出过程能力指数的概念,到1992年10月第一本过程能力指数的专刊问世,全球大约有50篇关于过程能力指数方面的论文发表^[5];而从1993年到2000年,各地出版了4本英文专著和一本德文专著,至少有170篇关于过程能力指数的本书问世^[5]。进入21世纪后,仅我国的期刊网上就有102篇研究过程能力指数的论文。

大量的研究收获颇丰,按照其研究方向,大致可划分为两大类:①在各种不



同的环境、条件下,构造不同的过程能力指数,以更好地描述过程;②对构造的指数,探讨该指数及其估计量的性质。下面就按照这两个方向展开叙述。

一、现存过程能力指数及其分类

据保守估计,目前人们定义的单变量过程能力指数多达 20 余种,多变量过程能力指数也有 7 种。不管是单变量还是多变量,指数设计的思路基本上不外乎两条:①将技术(工程)规格与过程变异进行比较得到一个比值作为过程能力指数(PCIs),用以反映过程生产符合规格的能力。人们说的过程能力指数通常指的就是这一类。最初的过程能力指数就是在这一思路的指导下构建的,大量已有的指数也表明,它也是过程能力指数构建的主导思想;②直接将合格率(或其函数)作为过程能力指数(PCIs)。由于前一种思路设计的指数,在反映过程绩效时需要遵循比较严格的条件,同时其中还不乏一些比较抽象、难以使用的指数,一些学者和实际使用者索性提出直接将合格率作为过程能力指数。下面就按照这两条思路介绍现有的过程能力指数,并对其进行评述。不过在此之前特别强调,所有指数研究的前提条件之一都应是过程处于统计控制状态,这一点人们已经达成共识。在下面的介绍中,除非特别声明,所有的指数都将建立在这之前提之下。

(一)基本过程能力指数

普遍公认的基本过程能力指数^[4-5]有 4 个: J. M. Juran^[1](1974)提出的 C_p ($C_p = (USL - LSL) / 6\sigma = d / 3\sigma$); Kane^[3](1986)的 C_{pk} ($C_{pk} = (d - |\mu - M|) / 3\sigma = \min\{C_{pu}, C_{pl}\}$); Hsiang 和 Taguchi^[2](1985), Chan et al.^[10](1988)的 C_{pm} ($C_{pm} = (USL - LSL) / 6 \sqrt{E(X - m)^2} = d / 3 \sqrt{\sigma^2 + (\mu - m)^2}$); CHOI 和 OWEN^[11](1990) PEARN et al.^[12]的 C_{pmk} ($C_{pmk} = (d - |\mu - M|) / 3 \sqrt{\sigma^2 + (\mu - T_V)^2}$)。

C_p 就是通常所说的过程能力指数,也称潜在的过程能力指数,其公认的缺陷是,无法反映过程的输出中心(μ)与规格中心(M)之间的位置关系。 C_{pk} 克服了这一缺陷,当输出中心(μ)与规格中心(M)发生偏移时选择这一指数,在我国的一些文献中又称其为实际过程能力指数。 C_{pm} 又称 Taguchi 指数,我国的一些文献中又称其为有目标值的过程能力指数,该指数把顾客期望的理想值(也即目标值 m)引入进来,体现了 Taguchi 质量管理思想——产品偏离目标值就会有质量损失,这是 C_{pm} 与 C_p, C_{pk} 的本质区别,后者从技术的角度设计指标,反映过程生产合格产品的能力。 C_{pmk} 又称为混合指数^[4-5],由 C_{pk} 的分子与 C_{pm} 的分母混合而成。该指数最大的缺陷是脱离生产过程实际。指数的参与设计者

SAMUEL KOTZ 和 NORMAN L. JOHNSON 承认,“而从像我们这样的理论工作者视角看,一些过程能力指数的设计与使用存在不切实际的主观臆断问题。我们承认,由 Choi 和 Owen,1990;Pearn et al. 1992(包括我们)提出的混合指数 C_{pmk} ,就存在这样的问题。 C_{pmk} 虽然由 C_{pk} 与 C_{pm} 混合而成,但它既不像 C_{pk} 一样,与生产过程的不合格率(合格率)相联系,也不像 C_{pm} 一样,与质量损失函数(田口质量损失函数,或许该函数也具有一定的主观性)相联系。类似这样的指数不止 C_{pmk} 这一个”。^{[5](6)}

这 4 个指数之所以被称为基本指数,首先是因为他们是最早提出的、也是最简单的(单变量)指数,其次还因为这 4 个指数都是建立在质量特性服从最常见的正态分布假设之上的。这 4 个基本指数中,又以 C_p 为核心, C_{pk} 通过修正 C_p 的分子得到, C_{pm} 通过修正 C_p 的分母得到, C_{pmk} 同时修正了 C_p 的分子和分母。显然, $C_{pmk} \leq C_{pk} \leq C_p$, $C_{pmk} \leq C_{pm} \leq C_p$, C_{pk} 与 C_{pm} 的大小关系不确定。

(二)基本过程能力指数的扩展

现存的不少指数都是对基本过程能力指数的扩展。

1. 基本过程能力指数的变形、归纳与延伸

Greenwich 和 Jahr-Schaffrath(1995)^[13]对式 C_{pm} 变换得: $\frac{1}{C_{pm}^2} = \frac{9}{d^2} E[(X-m)^2]$,

他们称由该式决定的指数为过程无能力指数(process incapability index)。

Vännman(1995)^[14]将 4 个基本过程能力指数归纳到一个超结构过程能力指数中: $C_p(u, v) = (d - u | \mu - M |) / 3 \sqrt{\sigma^2 + v(\mu - m)^2}$, 其中, $C_p = C_p(0, 0)$, $C_{pk} = C_p(1, 0)$, $C_{pm} = C_p(0, 1)$, $C_{pmk} = C_p(1, 1)$ 。

受 Vännman 启发, Spiring(1997)^[15]也定义了一个过程能力指数: $C_p^{(w)} = C_p(0, w) = d / 3 \sqrt{\sigma^2 + w(\mu - m)^2} = C_p / \sqrt{1 + w[(\mu - m) / \sigma]^2}$, 其中, w 是 $|\mu - m| / \sigma$ 的任意函数。

Pearn, Chen, Lin^[16](1999), Pearn, Lin, Chen^[17](2001)将 C_{pmk} 进一步修正为: $C_{pmk}' = (d^* - A^*) / 3 \sqrt{\sigma^2 + A^2}$, 其中, $A = \max \left\{ \frac{d(\mu - m)}{D_U}, \frac{d(m - \mu)}{D_L} \right\}$, $A^* = \max \left\{ \frac{d^*(\mu - m)}{D_U}, \frac{d^*(m - \mu)}{D_L} \right\}$, $D_U = USL - m$, $D_L = m - LSL$, $d^* = \min \{D_U, D_L\}$ 。

看了这 4 个指数,就不难理解 Walker^[18](1995)的抱怨:“(关于过程能力指数的一些结论),具有硕士学位的工程技术人员应该能看明白,但要想完全理解这些知识,则要求这些工程技术人员应该具有博士学位”;也明白 SAMUEL



KOTZ 和 NORMAN L. JOHNSON 的批评——“一些学者仅仅从理论的角度出发来设计新的过程能力指数,而不考虑这些新指数与实际的相关性”^{[5](6)}并非空穴来风。

2. 非正态分布条件下基本过程能力指数的修正

如果质量特性不服从正态分布,直接采用正态条件下的指数计算方法,将不能真实反映过程加工能力,对产品不合格率的估计也将产生严重偏差。基于这种认识,学者们对基本指数进行了修正。

Rivera^[19] (1996) 提出将质量特性 X 转换为 $Y=h(X)$ 形式, $h(X)$ 为 X 的连续单增函数,服从或近似服从正态分布,则: $C_{pk} = \min \left\{ \frac{h(USL) - \mu_Y}{\sigma_Y}, \frac{\mu_Y - h(LSL)}{\sigma_Y} \right\}$, 其中, μ_Y, σ_Y 分别表示 Y 的均值、标准差。

Clements^[20] (1989) 提出用 $(\zeta_{99.865\%} - \zeta_{0.135\%})$ 代替 C_p 中的分母 6σ , 用于计算非正态分布的过程能力指数: $C_p = \frac{2d}{(\zeta_{99.865\%} - \zeta_{0.135\%})}$ 。

Kotz 和 Johnson^[21] (1993) 提出用 5.15σ 代替 C_p 中的分母 6σ , 理由是, 在 Γ 分布(包含了从指数分布到正态分布的多种分布类型)中, 存在近似式: $\Pr\{\mu - 2.575\sigma \leq X \leq \mu + 2.575\sigma\} \approx 0.99$, 从而定义, $C_p = \frac{2d}{5.15\sigma}$ 。

Wright^[22] (1995) 把非正态分布的偏度系数 α_3 引入指数的计算中, 得到对偏度比较敏感的指数 C_i : $C_i = [(d - |\mu - M|)/\sigma]/3\sqrt{1 + (\mu - m/\sigma)^2 + |\alpha_3|}$ 。显然, 该指数只是在 C_{pmk} 的基础上加进了偏度系数的绝对值。

Chen 和 Kotz^[23] (1996) 建议在 Wright 公式的 α_3 前面插入系数 $\gamma > 0$, 其中 γ 值的选取应该是为了获得一个期望的最优解: $C'_i = [(d - |\mu - M|)/\sigma]/3\sqrt{1 + (\mu - m/\sigma)^2 + \gamma|\alpha_3|}$ 。

Bai 和 Choi^[24] (1997) 基于“变量加权”的方法, 在满足 $\Pr\{X \leq \mu\} = p^*$ 的前提下, 他们定义的 C_p 为: $C_p^w = \frac{d}{3\sigma\sqrt{2}} \left[\min \left(\frac{1}{\sqrt{p^*}}, \frac{1}{\sqrt{1-p^*}} \right) \right] = \frac{C_p}{W}$, 其中, $W = \sqrt{1 + |1 - 2p^*|}$ 。同理, $C_{pk}^w = \min \left(\frac{USL - \mu}{3\sigma\sqrt{2p^*}}, \frac{\mu - LSL}{3\sigma\sqrt{2(1-p^*)}} \right) = \frac{C_{pk}}{W}$; $C_{pm}^w = \frac{C_{pm}}{W_m}$ (其中, $\Pr\{X \leq m\} = p_m$, $W_m = \sqrt{1 + |1 - 2p_m|}$)。

在对 C_{pm} 进一步修正的基础上, Johnson (1994)^[25] 等人提出了“灵活的过程能力指数”: $C_{jpk} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \min \left(\frac{USL - m}{MSE_+}, \frac{m - LSL}{MSE_-} \right)$, 其中, $MSE_+ = E\{(X - m)^2$

$$\{X > m\}, \text{MSE}_- = E\{(X - m)^2 \mid X < m\}.$$

如果过程生产合格产品的能力超过 99.73%, 则该过程就被认为是“可行的过程”。基于这个观点, Veevers(1995, 1998, 1999)^[26-28] 提出了“可行性指数”的概念, 该指数适用于单变量、多变量、正态分布及非正态分布等多种情形。单变量的可行性指数 V_i 是指 θ 区间(称为容许区间, 是指 $(X + \theta)$ 的分布对应的不合格率不大于 0.27% 的区间)的长度 w 与公差 $T = 2d$ 的比值: $V_i = w/2d$ 。对于正态分布, $V_i = 1 - 1/C_p$ 。如果 $V_i < 0$, 对应的过程为“不可实现”过程。

非正态分布总体下的指数设计方法, 除“可行性指数”外, 大致可分为三类: 数据转换法, 经验百分点法, 基本过程能力指数修正法。“可行性指数”的设计思想主要体现了过程能力指数的评价标准, 即将过程生产合格产品能力是否超过 99.73% 作为过程有无能力的标准, 严格地讲, 它并不专属于非正态总体的过程能力指数。

数据转换法顾名思义, 就是将非正态数据转换为正态数据, 再应用基本的 PCIs 进行计算。用这种方法处理非正态数据比较直观, 容易理解。资料转换的具体方法, 根据具体情况, 可以是对数转换法, Box-Cox 数据转换法以及其他转换方法, 这方面的研究很多, 形成了比较完整的理论体系。其中的 Box-Cox 数据转换法由 Box 和 Cox 提出, 使用幂转换方法把非正态数据转化为正态分布, 得到了广泛的认可和使用。Tang^[29] 模拟对比了七种非正态过程能力指数的方法, 得出结论: Box-Cox 转换是最佳方法。

经验百分点法是通过得到 ζ_i 而设计的指数。为了得到 ζ_i , 学者们尝试了各种各样的曲线拟合法。Clements^[20] (1989), Rodriguez^[30] (1992), Bittanti et al.^[31] (1998), Lovera et al.^[32] (1998) 利用 Pearson 曲线族拟合非正态数据; Castagliola^[33] (1996) 使用 Burr 分布族; Farnum^[34] (1996/7), Polansky et al.^{[35][36]} (1998, 1998/9), Pyzdek^[37] (1992) 尝试 Johnson 曲线族; Padgett 和 Sengupta^[38] (1996) 使用 Weibull 及对数正态分布; Mukherjee 和 Singh^[39] (1997/8) 使用 Weibull 分布等等。不得不指出的是, 在曲线拟合时, 有些分布的参数不容易估计, 因而不能广泛适用, 并且, 经验百分点法需要大量的模拟运算, 对运算能力的要求较高。

当质量特性不服从正态分布时对基本过程能力指数进行修正的方法具有一定的主观性。如, 偏度系数究竟以何种方式引入指数中缺乏客观的依据, 得到的结果又如何解释? 以加权的方式改造的指数全部不大于改造前的指数并不存在现实的必然性; 如果指数值都是 1, 对于正态分布, 其合格率就为 99.73%, 而对于 Γ 分布族而言, 合格率就为 99%, 使指数失去了相互比较的基