

中等专业学校

数学学习指导

(上)

侯昭群 主编

中国矿业大学出版社

中等专业学校

数学学习指导

(上)

中国矿业大学出版社

编 委 会

主 编：侯昭群

副主编：李国良 孙庆余 王才吉

编 委：丁传祺 郭培青 **刘洪涛** 赵云志

张翠姣 刘登厚 李卫东

其他编者：

彭聿铭 李承志 王 瑜 郭效芹

孙玉乐 冷竞恩 李改玉 孙国林

王亮吉 田习文 王连修 张秀美

李心明 张如弦 张福涛 张耐芸

张佩芝 仇连英 房庆平 尹金生

中专《数学学习指导》编委会

1988年5月

前 言

本书是根据国家教委审定工科类、财经类专业通用的《中等专业学校数学教学大纲》的要求而编写的。全书共分五篇：第一篇初等数学，包括代数、三角、立体几何、平面解析几何；第二篇包括微积分、常微分方程；第三篇包括级数、拉氏变换；第四篇包括行列式、矩阵、线性方程组、线性规划、投入产出简介；第五篇包括概率、数理统计等。各章分主要内容分析、典型例题分析、学习思考题三个部分。在主要内容分析中，概述了中专数学学习中应掌握的基本概念，主要定义、定理、公式的分析，特别指出在理解基本概念时应注意的问题，使读者能正确地掌握概念，掌握基础知识内在关系。在典型例题分析中，着重于对问题的剖析，并对解题的方法和技巧给予总结，以帮助读者能抓住重点和难点，提高分析问题和解决问题的能力。各章选编了学习思考题，最后附有十余套试题，供中专师生学习时参考。

本书可供各类中等专业学校(包括一般中专、职工中专、职业中专、中技、中师等)师生教学、广大知识青年参加成人考试和中专函授、自学用书。

在组织该书编审定稿工作中，我们请了三十余位有丰富教学经验的中等专业学校教师(包括副教授、高级讲师)、出版社编辑和大学教授进行了认真的校对、审阅，提出了许多宝贵意见，在此表示衷心感谢。

由于编者的水平所限，加之编写时间仓促，错误和不妥之处在所难免，恳切期望广大读者批评指正。

编 者

一九八八年五月

目 录

第一篇 初等数学

第一章 集合	(1)
一、主要内容分析	(1)
二、典型例题分析	(6)
三、学习思考题	(10)
第二章 函数	(11)
一、主要内容分析	(11)
二、典型例题分析	(19)
三、学习思考题	(28)
第三章 三角函数	(29)
一、主要内容分析	(29)
二、典型例题分析	(43)
三、学习思考题	(60)
第四章 加法定理及其推论	(62)
一、主要内容分析	(62)
二、典型例题分析	(68)
三、学习思考题	(83)
第五章 反三角函数与简单的三角方程	(84)
一、主要内容分析	(84)
二、典型例题分析	(92)
三、学习思考题	(105)
第六章 复数	(106)
一、主要内容分析	(106)

二、典型例题分析	(113)
三、学习思考题	(121)
第七章 数列	(122)
一、主要内容分析	(122)
二、典型例题分析	(128)
三、学习思考题	(134)
第八章 直线与平面	(136)
一、主要内容分析	(136)
二、典型例题分析	(147)
三、学习思考题	(156)
第九章 多面体和旋转体	(157)
一、主要内容分析	(157)
二、典型例题分析	(161)
三、学习思考题	(172)
第十章 直线	(173)
一、主要内容分析	(173)
二、典型例题分析	(177)
三、学习思考题	(187)
第十一章 二次曲线	(188)
一、主要内容分析	(188)
二、典型例题分析	(194)
三、学习思考题	(206)
第十二章 极坐标和参数方程	(207)
一、主要内容分析	(207)
二、典型例题分析	(217)
三、学习思考题	(224)
第十三章 排列、组合与二项式定理	(225)
一、主要内容分析	(225)
二、典型例题分析	(227)

三、学习思考题	(247)
---------------	---------

第二篇 微积分

第一章 极限与连续	(249)
一、主要内容分析	(249)
二、典型例题分析	(256)
三、学习思考题	(266)
第二章 导数	(267)
一、主要内容分析	(267)
二、典型例题分析	(271)
三、学习思考题	(281)
第三章 导数的应用	(282)
一、主要内容分析	(282)
二、典型例题分析	(295)
三、学习思考题	(306)
第四章 微分及其应用	(307)
一、主要内容分析	(307)
二、典型例题分析	(311)
三、学习思考题	(316)
第五章 不定积分	(317)
一、主要内容分析	(317)
二、典型例题分析	(327)
三、学习思考题	(354)
第六章 定积分及其应用	(355)
定积分	(355)
一、主要内容分析	(355)
二、典型例题分析	(361)
三、学习思考题	(376)

定积分应用	(377)
一、主要内容分析	(377)
二、典型例题分析	(380)
三、学习思考题	(392)
第七章 常微分方程	(393)
一、主要内容分析	(393)
二、典型例题分析	(403)
三、学习思考题	(417)

第一篇 初等数学

第一章 集 合

重点：集合的概念及运算。

难点：集合与集合间的关系。

准确理解集合的有关概念是学好本章的关键。

一、主要内容分析

(一) 集合的概念

1. 集合的意义

我们把具有某种特定性质的对象组成的整体叫做集合，组成集合的各个对象叫做这个集合的元素。常用大写字母 A 、 B 、 C …表示集合，用小写字母 a 、 b 、 c …表示集合的元素。如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于集合 A ，记作 $a \in A$ ；如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A ，记作 $a \notin A$ 或 $a \bar{\in} A$ 。

由于集合概念是数学中最原始的概念之一，我们不能给出它的精确定义，只能对它进行描述性的说明。

一个集合主要有如下三个特征：

(1) 确定性 对任何一个对象，都能确定它是不是该集合的元素，即给定一个具体对象，它或是该集合的元素，

或不是该集合的元素，两者必居其一，不能模棱两可。

(2) 互异性 一个集合所包含的元素，指属于这个集合的互不相同的个体。因此，在同一集合里就不能重复出现同一个元素。

(3) 无序性 对于一个集合，通常不考虑它的元素之间的顺序。例如，所有小于5的自然数组成的集合可以表示为 $\{1, 2, 3, 4\}$ 或 $\{4, 3, 1, 2\}$ 等。

集合可按它包含元素的个数分为有限集与无限集。

2. 集合的表示法

我们把包含所研究的集合的一切元素的集合叫做全集，记为 Ω ；把不包含任何元素的集合叫做空集，记做 ϕ 。

由数组成的集合叫做数集。通常用 N 表示自然数集， Z 表示整数集， Q 表示有理数集， R 表示实数集。

表示集合一般地用列举法和描述法。

把属于某个集合的元素一一列举出来，写在大括号 $\{ \}$ 内（各元素间用逗号分开），这种表示集合的方法叫列举法；把属于某个集合的元素所具有的特定性质描述出来，写在大括号 $\{ \}$ 内，这种表示集合的方法叫做描述法。

如集合

$$A = \{ x \mid P(x) \geq q \}$$

表示 A 是具有性质 $P(x) \leq q$ 或者说是满足条件 $P(x) \leq q$ 的那些元素 x 组成的。在这里，字母 x 是作为一个元素的代表而写在括号内的左方， $P(x) \leq q$ 是该元素所满足的条件而写在括号内的右方，并且 x 与 $P(x) \leq q$ 之间用“ $\mid$ ”分开。

列举法和描述法是两种不同的表示集合的方法，究竟用哪一种方法，要看具体问题而定。有些集合随便选用那种方法表示都可以，但有些集合只能用其中的一种方法来表示。

如, 集合 $\{-3, 0, 2, 5\}$ 就不宜用描述法表示, 而集合 $\{x \mid -1 \leq x \leq 2\}$ 就不能用列举法表示。

为了直观, 我们还常用图形来表示集合。例如用平面上一个圆内的所有点表示一个集合, 用平面上一个长方形内的所有点表示全集。表示集合的图形叫做文氏 (Venn) 图。

3. 集合与集合的关系

对于两个集合 A 与 B , 如果集合 B 的每一个元素都是集合 A 的元素, 那么集合 B 就叫做集合 A 的子集。记作 $A \supseteq B$ 或 $B \subseteq A$, 读作 “ A 包含 B ” 或 “ B 包含于 A ”。

我们规定, 空集是任何集合的子集, 任一集合是其自身的子集, 于是一个集合的子集, 除了空集与该集合本身外, 还有它所有元素的各种可能的组合。一般地, 含有 n 个元素的集合有 2^n 个子集。例如 $\{1, 2, 3\}$ 的子集共有 $2^3 = 8$ 个, 即 ϕ , $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$ 。

对于两个集合 A 与 B , 如果 $A \supseteq B$, 同时 $B \supseteq A$, 则称集合 A 与集合 B 相等, 记作 $A = B$, 读作 “ A 等于 B ”。

这就是说, A 中的每个元素都是 B 中的元素, 而 B 中的每个元素都是 A 中的元素, 即两个集合所含的元素完全相同。要证明两个集合 A 和 B 相等, 需证明 $A \subseteq B$, 同时 $A \supseteq B$, 即可。

如果 $A \subseteq B$ 而 $A \neq B$, 则称 A 是 B 的真子集, 记作:

$$A \subset B$$

换言之, A 是 B 的子集, 而在 B 中至少存在一个不属于 A 的元素 y (即 $y \in B$), 这时就说 A 是 B 的真子集。显然, 在 B 的真子集中不包括 B 本身。

设 $A = \{1, 2, 3\}$ ，那么 A 的所有真子集为 ϕ ， $\{1\}$ ， $\{2\}$ ， $\{3\}$ ， $\{1, 2\}$ ， $\{1, 3\}$ ， $\{2, 3\}$ 。

只含有一个元素的集合，称为单元素集合。如 $\{0\}$ ， $\{1\}$ ， $\{2\}$ 等，都是单元素集合。应当注意的是，不要把单元素集合 $\{a\}$ 和元素 a 本身混为一谈。集合与元素是两个不同的概念，就好比一家一户的“户”与户里的“人”，是两个不同的概念一样。有的户虽然只有一个人，但当他们以户的名义出现时，就与每户中的成员——人的含义不同了。

(二) 集合的运算

1. 并

我们把属于集合 A 和属于集合 B 的所有元素合并在一起而组成的集合叫做集合 A 与集合 B 的并集，记作 $A \cup B$ ，读作“ A 与 B 的并”。即 $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 。求并集的运算叫做并的运算。

一般说来， $A \subset A \cup B$ ， $B \subset A \cup B$ ，不过也有可能出现相等的情况，例如，设 N 是所有自然数的集合， D 与 E 分别是偶数和奇数的集合，则

$$N \cup D = N \text{ 及 } E \cup N = N$$

2. 交

我们把既属于集合 A 又属于集合 B 的所有元素组成的集合，叫做集合 A 与集合 B 的交集，记作 $A \cap B$ ，读作“ A 与 B 的交”，即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

若 A 、 B 两个集合没有公共元素，即当 A 、 B 满足

$$A \cap B = \phi$$

时，则称 A 、 B 互斥或不相交。

一般来说，

$$A \cap B \subset A \quad \text{及} \quad A \cap B \subset B$$

但相等的情况亦可能出现。若 N 、 D 、 E 同前例所设集合，则有

$$D \cap N = D \quad \text{及} \quad N \cap E = E$$

3. 差

我们把属于集合 A 而不属于集合 B 的所有元素组成的集合，叫做集合 A 与集合 B 的差集，记作 $A - B$ ，读作“ A 与 B 的差”，即

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$$

应注意， A 与 B 的差集同 B 与 A 的差集一般是不相等的，即

$$A - B \neq B - A$$

这从文氏图上可以明显地看出来。

A 与 B 的差集也可能出现空集的情况，当 B 包含 A 时，差集就是空集。

4. 补

我们把全集 Ω 中不属于集合 A 的所有元素组成的集合，叫做集合 A 的补集，记作 $\overline{A}$ ，读作“ A 补”，即

$$\overline{A} = \{x \mid x \in \Omega, \text{ 且 } x \notin A\}$$

在文氏图中， $\overline{A}$ 就是从 Ω 中挖去 A 以后所剩下的部分。其实补运算也可以看作差运算的特殊情况，也就是说，当 $A = \Omega$ 时，

$$\text{则 } A - B = \Omega - B = \overline{B}$$

求补集的运算叫做补运算。

总之，对集合的运算有：并运算、交运算、差运算和补

运算四种？同时有并集、交集、差集和补集这四个相应的概念。

二、典型例题分析

【例1】 试指出下列各例是否可以说构成一个集合：

- (1) 正三角形的全体；
- (2) 细长的长方形的全体；
- (3) 绝对值小于1的全体实数；
- (4) 非常小的正数的全体；
- (5) $\sqrt{2}$ 的所有近似值；
- (6) 方程 $x^4 = 1$ 的所有解；
- (7) 某班中身材高大的学生；
- (8) 某班中戴眼镜的学生。

解：(1)、(3)、(6)、(8) 是集合。

(2) 不是集合，例如长2厘米，宽1厘米的长方形是否算作细长的长方形就不明确。

(4) 不是集合，例如它是否含有元素 10^{-10} 就不明确。

(5) 不是集合，例如2是否能作为 $\sqrt{2}$ 的近似值就不明确。

(7) 不是集合，因为身材高大无确切的标准。

【例2】 写出下列集合中的所有元素：

- (1) {一年中有30天的月份}；
- (2) {自然数中小于20的质数}。

解：(1) 集合 {一年中有30天的月份} 的元素是四月、六月、九月、十一月。

(2) 我们知道, 一个大于-1的自然数, 如果除了它本身和1以外, 不能被其它自然数所整除, 那么这样的数称为质数。依此得出集合

{自然数中小于20的质数}的元素是2、3、5、7、11、13、17、19。

注意: 本题是要求写出集合的元素, 不是用列举法表示集合, 因此只要将集合的元素一一写出即可, 若再加上大括号反而是错误的。因此, 在解题时, 仔细审题是重要的。

【例3】 设集合 $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, 写出 A 中符合以下条件的子集:

(1) 元素是4的倍数;

(2) 元素是奇数。

解: (1) 因为集合 A 的元素中是4的倍数的只有4和8, 所以元素是4的倍数的集合 A 的子集是 $\{4, 8\}$;

(2) 因为集合 A 的元素中没有奇数, 所以元素是奇数的集合 A 的子集是空集 ϕ 。

【例4】 用文氏图验证:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

验证：如图 1—1—1.

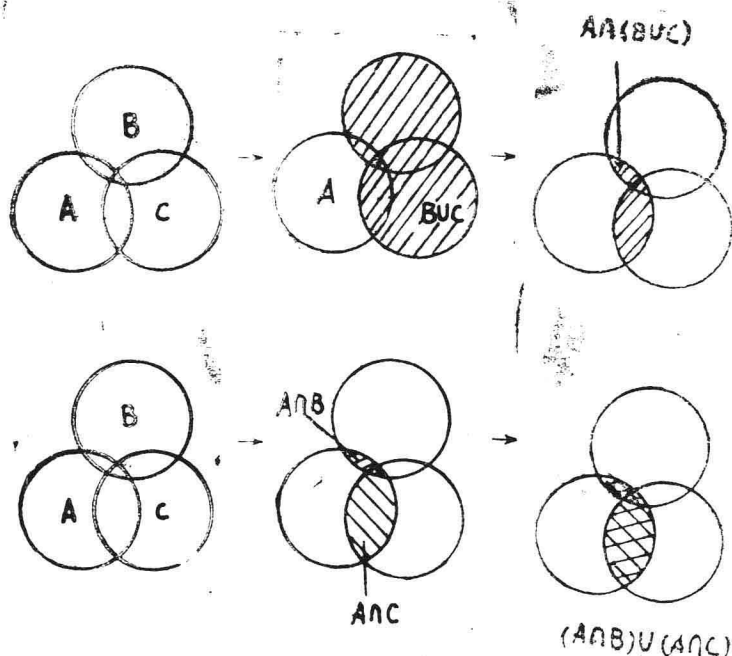


图 1—1—1

【例 5】 设 $\Omega = \mathbb{R}$, $A = \{x \mid 1 \leq x \leq 5\}$ $B = \{x \mid 2 \leq x \leq 6\}$;

求: $A \cup B$; $A \cap B$; $A - B$;
 $B - A$; $\overline{A}$; $\overline{B}$.

解: $A \cup B = \{x \mid 1 \leq x \leq 6\}$;

$A \cap B = \{x \mid 2 \leq x \leq 5\}$;

$A - B = \{x \mid 1 \leq x < 2\}$;

$B - A = \{x \mid 5 < x \leq 6\}$;

$\overline{A} = \{x \mid x < 1 \text{ 或 } x > 5\}$;

$$\overline{B} = \{x \mid x < 2 \text{ 或 } x > 6\}.$$

注： Ω 表示全集， R 表示实数集，这两个符号在前面已用过。

【例6】 设参加考试的学生组成的集合为全集 Ω ，如果 A 是数学成绩为优秀的学生组成的集合， B 是语文成绩为良好的学生组成的集合，那么 $\overline{A \cap B}$ ， $\overline{A \cup B}$ 各表示什么学生的集合？

解：根据题意， $A \cap B$ 是数学成绩为优秀且语文成绩为良好的学生的集合，因此， $\overline{A \cap B}$ 是数学成绩不是优秀或语文成绩不是良好的学生的集合。

因为 $A \cup B$ 是数学成绩为优秀或语文成绩为良好的学生的集合，所以 $\overline{A \cup B}$ 是数学成绩不是优秀且语文成绩不是良好的学生的集合。

【例7】 设集合 A, B, C 都是全集 Ω 的子集（如图1-1-2），在图中用阴影表示集合 $B - (A \cup C)$ 。

解：如图1-1-3所示。

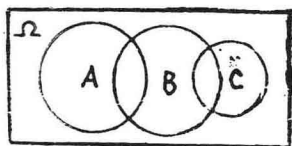
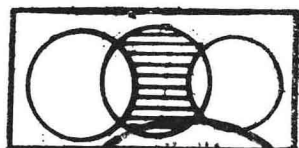


图 1-1-2



$$B - (A \cup C)$$

图 1-1-3