國家科學叢書

網路分析

俞國平 著

網路分析

俞國平 著

國家書店有限公司印行

網路分析

目　錄

第一章　網路模型及立式工具

§ 1－1　一般觀念及系統區分

本書是對網路理論作一番介紹，其包含網路分析（ Network analysis ）及網路綜合（ Network synthesis ）兩部份。何謂網路分析及網路綜合？通常較爲人接受的定義中有三個重要詞彙：即激發（ Stimulus 或 Excitation ）、網路（ Network ）與響應（ Response ），三者之間的關係如圖 1-1 ，網路分析乃研究當激發與網路皆爲已知時，其響應爲如何。而網路綜合係激發與響應均爲已知情況下尋求合乎已知條件之網路

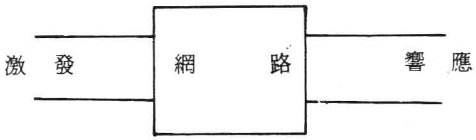


圖 1-1　激發、網路、響應之關係

一般而言，一個系統是由某些所謂的激發、輸入（ Input ），或命令等外加信號來予以產生動作（或響應）。對應於這些輸入信號，系統本身就實行某項任務而產生以響應形式顯示的結果，稱爲輸出（ output ）。此種由輸入到輸出（ Input to output ）途徑也可以說成原因到效應（ use to effect ）的關係，於研究物理系統行爲上這關係是佔有重要的地位。

在系統分析上，以一個模型（ model ）和數學敍述式來表示一物理系統是很重要的第一個步驟。我們能使用已知的數學或幾何圖（ Topological ）等工具來完成此過程，例如微分方程、 Laplace 和 Fourier 轉換式、方塊圖，以及信號流程圖（ signal flow graphs ）等，均可用來描述系統內

信號與元件間的許多複雜關係和聯繫。

§1－2 網路系統及其信號

一組具有相關的裝置、元件或事件得視爲一整體或其表現可視爲同一整體者稱爲系統(System)。網路系統之分類法有很多，然較爲熟悉的分類係按電路元件之特性共分爲四大類型：

(1) **線性網路系統與非線性網路系統** 網路系統之特性可用一組線性微分方式描述者稱爲線性網路系統。反之，網路系統之特性無法以線性微分方程式描述者稱爲非線性網路系統。

(2) **非時變網路系統與時變網路系統** 網路系統各組成元件之特性與時間變化無關者稱爲非時變網路系統。反之，網路系統各組成元件之特性若與時間變化有關者，則稱爲時變網路系統。

(3) **主動網路系統與被動網路系統** 任意時刻供給網路系統之能量均不得爲負值者稱爲被動網路系統。反之，任意時刻供給網路系統之能量若有負值者稱爲主動網路系統。

(4) **集總網路系統與分布網路系統** 本書主要之目的乃在於討論線性及被動網路之分析。

網路系統之激發及反應，一般皆以電壓或電流之時間函數表示。此等時間函數稱爲信號(Signal)。電機工程界描述信號通常有兩種方式，即時間與頻率。雖然信號爲一時間函數，但事實上信號亦可利用頻率(Frequency)或頻譜(Frequency Spectra)表示。正如同人類溝通兩種不同語言一樣，時間與頻率間之連繫必須籍助富氏級數(Fourier series)、富氏變換(Fourier transform)及拉氏變換(Laplace transform)。

首先研究各種類型之信號如何利用時間函數描述：

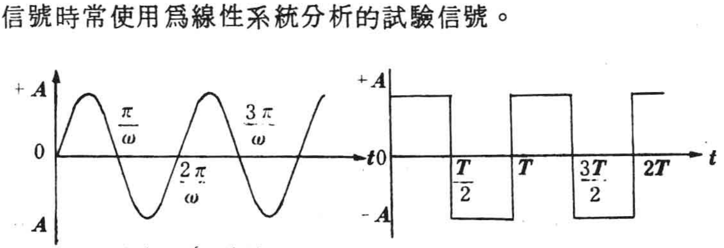
週期性信號（正弦函數）

如果下列方程式成立的話，一函數 $f(t)$ 即可說是在一週期 T 內具有週期性。

$$f(t) = f(t \pm nT)$$

其中 n 爲任意正整數。換句話說，一週期函數在每一週期 T 之後，單純的再重覆一回。圖 1－3 所示的正弦信號和週期方形波（ square wave ）即爲工程學上衆所共知的週期函數。同時爲了下面所述的四個原因，正弦波在電機工程科學上也可能是最重要的週期信號；

1. 由大多數發電機所產生的功率均是隨時間而呈週期性的變化。幾乎所有的現代電功率輸送系統都有週期性變化之電壓和電流。
2. 大多數的非正弦性變化週期函數可以擴展而成包含有正弦諧波（ harmonic ）分量的 Fourier 級數。因此正弦可以看成週期函數之基本實體。
3. 正弦性函數可以輕易的以其數學性質來處理——正弦波的導數或積分仍然爲一正弦波。
4. 一線性系統對於某已知頻率正弦輸入之輸出響應仍然爲相同頻率的一正弦信號。同時，幅度的變化與輸入正弦信號和輸出正弦信號之間的相移（ phase shift ）則表示了這個頻率下此系統的特性因此正弦信號時常使用爲線性系統分析的試驗信號。



(a) 一正弦波　　(b) 一方形波

圖 1－2　週期函數

一正弦信號可以表為

$$f(t)=A\sin(\omega t+\phi) \tag{1-1}$$

其中　$A=$幅度

$\omega=$角頻率，徑／秒。

ϕ相角，徑。

正弦波的週期即為這個正弦波完成一完整循環所需要的時間，它可以表為

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{1}{f}\text{秒} \tag{1-2}$$

其中f為以（週／每秒）表示之頻率，或以H_z（赫）表之。

為了要比較不同正弦波之間的相移，我們將正弦函數以一長度A之旋轉向量來表示是相當的便利。此向量是以ω徑／秒的角速度循反時針方向繞著它的端點而旋轉。此向量在任意時刻於垂直軸上的投影即為在這對應瞬間其幅度的大小。此向量與最初位置（$t=0$）的水平軸之間的夾角就是相移ϕ。圖 1-3　說明了不同相移狀況下的三個正弦波信號。旋轉向量的最初位置也示於附圖中。我們看到在圖 1-3 a 中的波形$f_1(t)$領先了圖 1-4 b 中的函數$f_2(t)$一個ϕ_1的相角。同樣的情形，圖 1-3 b 中的正弦波$f_2(t)$又領先了圖 1-3 c 中的$f_3(t)$一個ϕ_2的角。我們也可以說$f_3(t)$落後了$f_2(t)$一個ϕ_2的角。這些正弦函數的領先和落後特性因此最好以旋轉向量的相對位置來表示。正弦波相角一領先或相角一落後特性之比較也可以在圖 1-3 的時間一軸圖形中表示出來。如果我將$t=0$軸看成參考位置並且假設三個波均以相同的速率向左方運動，我們就可注意到$f_1(t)$明顯的領先了$f_2(t)$一個ϕ_1角，而$f_3(t)$可看成落後$f_2(t)$一個ϕ_2角。當然，我們也可以說$f_3(t)$“領先”了$f_2(t)$一個$2\pi-\phi_2$的角。

正弦波最重要應用之一為它可以用來表示非正弦週期函數。我們在後面將看出任何滿足某組狀況的週期信號$f(t)$可以展開為一 Fourier 級數。

$$f(t)=\frac{a_0}{T}+\frac{2}{T}(a_1\,\mathrm{con}\,\omega t+a_2\,\mathrm{con}\,2\omega t+a_3\cos 3\omega t+\cdots\cdots$$

$$+b_1\sin\omega t+b_2\sin 2\omega t+b_3\sin 3\omega t+\cdots\cdots) \tag{1-3}$$

在式(1-4)中，ω 代表頻率，或爲 2π 乘上週期函數週期 T 的倒數，而 $\cos\omega t$ 和 $\sin\omega t$ 項即稱作級數的基本分量(fundamental components)，其餘數項即爲諧波。至於常數 a_0，a_1，a_2，……，b_1，b_2，……爲 Fourier 係數項而由 $f(t)$ 的資料來決定。因此我們看到當一非正弦週期信號 $f(t)$ 施於線性系統時，它的輸出響應可以由 $f(t)$ 的每一正弦一波分量單獨作用所得到的響應全部加起來而計算出來。

我們也可以利用非週期性信號的圖形加法和減法來描述非正弦週期信號。譬如說，像圖 1-2 所示的週期性方形波可以由一系列的遲延階級函數來構成。然而，我們將這部份的研究延到我們討論過非週期性信號後再談

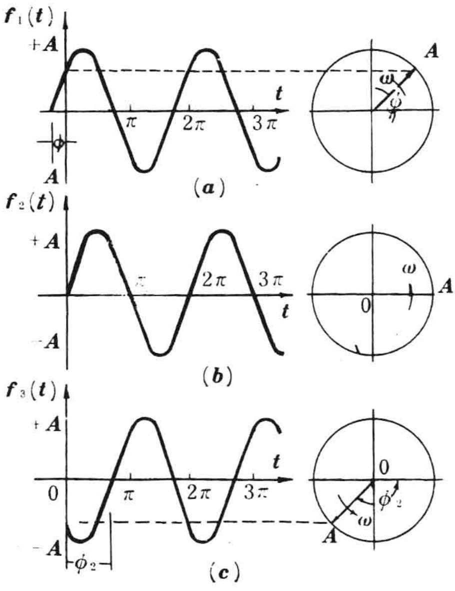


圖 1-3　不同相移的正弦波及對應的旋轉向量。

非週期性函數

所謂的非週期信號是指一個在任何有限時間間隔之內均不自行重覆的信號；或者更簡單的說，它不是週期性的信號。有許多應用在系統和網路檢驗及設計方面的試驗信號，例如階級函數，斜坡函數、曲線函數，和激發函數，都屬於這一類信號。下面將介紹一些較重要的非週期性信號的性質及描述。

單位階級函數

圖 1-4 所示的即爲單位階級函數 $u(t)$。它的定義是當時間大於零時有個 1 的值，而時間小於零時其值則爲零。這個函數並沒有定義時間等於零的值。換句話說，

$$u(t)=0 \qquad t<0$$

$$u(t) \text{ 在 } t=0 \text{ 時並沒有定義}$$

因此我們也可得到下面的敍述：

$$\lim_{t\to 0^+} u(t)=1 \qquad \lim_{t\to 0^-} u(t)=0$$

它說明了當時間自左邊趨近於零時（$t\to 0-$）此函數的極限值爲零，然而，時間自右邊趨近於零時（$t\to 0^+$）時函數之極限值爲 1。很明顯的，$t=0$ 時單位階級函數並不連續。在實際情形中，如將連接到一電池的開關突然關上，或將一軸突然扭動，或將一力突然推壓等都可以模擬出一階級函數。

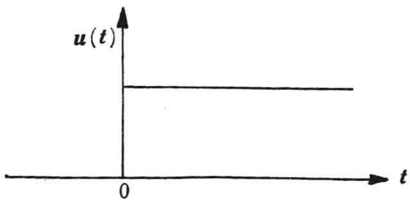


圖 1-4 單位階級函數。

在定義單位階級函數時，我們曾經介紹了零時間（ $t=0$ ）的觀念。到底什麼時刻是時間等於零呢？在進行系統的分析探討時，我們時常覺得需要在激發響應之比較上註明時間參考。而零時間則僅僅爲一方便的時間參考而已，它其實可以是一點鐘，二點三分，或一天中的任何其他時間。它僅表示了"關上一個開關"來啓始一件事情而已。因此，有了這個時間參考，在 $t=0$ 之前的一段時間表示"歷史"，$t=0$ 表示"現在"，而任何大於零的時間即爲"未來"。在較一般的情形中，我們可以使用 $t=t_0$ 爲一時間參考，其中 t_0 並不一定非爲零不可。當我們有一連串的事情而一件接著一件發生時，這個一般性參考的選擇就是必需的了。

單元階級函數除了用作試驗信號之外，它也時常用來構成其他信號和波形。任何一個僅僅定義時間大於零部分的時間函數 $f(t)$ 乘上了單位階級函數之後，很明顯的並不會發生變化。因此單位階級函數可以充爲一開關在我們需要的任何時間下啓始或結束一個信號。譬如說，如圖 1-5所示的單位斜坡函數 $u_r(t)$ 就可以看成函數 t 和 $u(t)$ 的乘積。因此一斜坡函數可以定義爲

$$u_r(t)=t \qquad t>0$$

$$u_r(t)=0 \qquad t<0$$

因爲 $u(t)$ 在時間小於零時都等於零，因此 t 乘上了 $u(t)$ 之後，負的部分都消掉了。

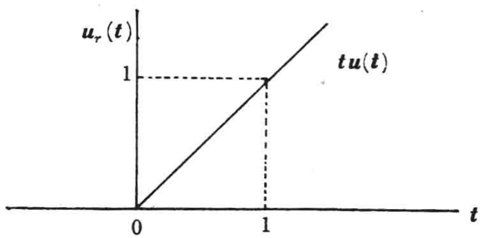


圖 1-5　單位斜坡函數。

有一任意時間函數 $f(t-T)$，它當 $t<T$ 時等於零乘上了一遲延單位階級函數 $u(t-T)$ 後，並不會發生變化，而上述之 $u(t-T)$ 是將 $u(t)$ 向右邊平移了 T 後的結果。然而，如果 $f(t)$ 僅僅定義了 $t<0$ 之部分而再乘上了 $u(t-T)$ 的話，當 t 小於 T 時，乘積函數 $f(t)(t-T)$ 將爲零，因爲只有 $t=T$ 之後，平移單位階級函數才開始使 $f(t)$ 產生作用，圖 1-6 所示的是說明單位階級函數開關作用所扮演角色的幾個簡單例子。我們在下一節中將看到使用了簡單信號分量和單位階級函數充爲開關裝置所形成的各種信號和波形。

有一高度 E 而作用時間爲 t_1 到 t_2（$t_1<t_2$）的方形脈衝 (rectangular pulse）示於圖 1-7 a 中。圖 1-7 b 和 c 則顯示此方形脈衝可以由一幅度 E 而遲延了時間 t_1 的一階級函數和一幅度爲 $-E$ 遲延了時間 t_2 的另一階級函數兩者的和來表示。因此這個脈衝的時間敍述式可以寫成

$$f(t)=E\left[u(t-t_1)-u(t-t_2)\right] \tag{1-6}$$

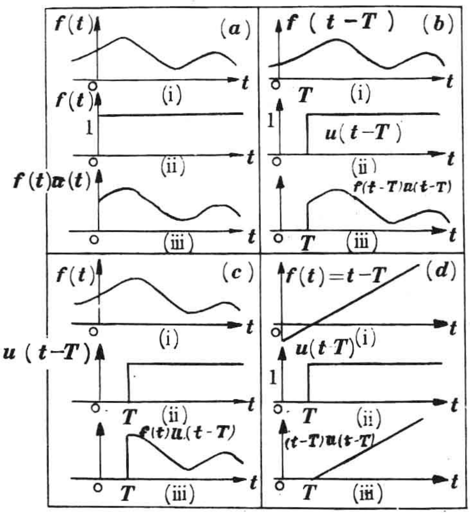


圖 1-6　以波形來說明單位級函數充爲一信號之開啓和關閉作用之應用情形。所有圖中，$(iii)=(i)\times(ii)$。

圖 1-8 想示的爲高度爲 E 而寬度爲 t_2 之三角脈衝。圖中也顯示出由一組具有不相同遲延的四個斜坡函數而一步一步構成此三角脈衝的情形。因此這個三角脈衝的方程式可以寫成：

$$
\begin{aligned}
f(t) &= f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) + f_4(t) \\
&= E\left[\frac{t}{t_1}u(t) - \frac{t-t_1}{t_1}u(t-t_1)\right. \\
&\quad \left. - \frac{t-t_1}{t_2-t_1}u(t-t_1) + \frac{t-t_2}{t_2-t_1}u(t-t_2)\right] \qquad (1\text{-}7)
\end{aligned}
$$

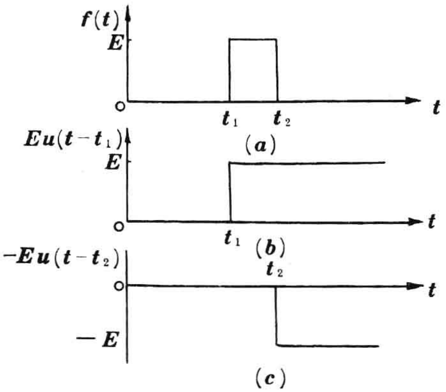


圖 1-7　以兩個階級函數來形成一方形脈衝。

信號之組成當然也不一定僅限制於用直線部分來形成。圖 1-9 顯示了 t_2 部分和一單位階級函數所組成的信號。這個信號可以敍述爲

$$f(t) = t^2u(t) - (t-1)^2u(t-1) - u(t-3) \qquad (1\text{-}8)$$

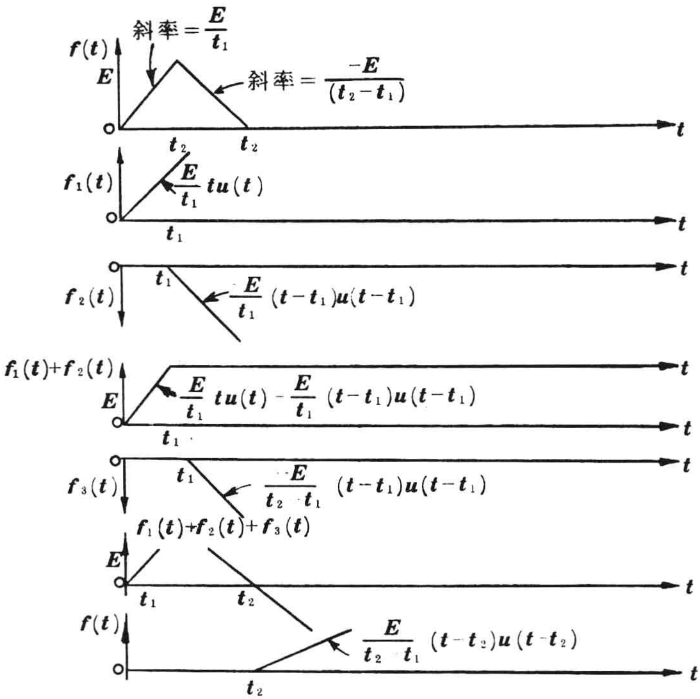


圖 1-8　波形說明了一三角脈衝可以由一組斜坡函數來構成。

激發函數

激發函數是一數學概念，它時常用來敍述物理系統中某種型式的不連續性。激發函數與我們上一節所討論的特定性信號不同，它無法以物理現象而產生。

激發函數可以用來解釋電容和電感中電流和電壓的跳接不連續性質。我們將在後章詳細談到除非電容中的電流能顯示一激發函數否則跨於一電容的電壓無法瞬間跳升。類似的，只有跨於電感的電壓爲一激發函數，這