

# 声学基础

(第三版)

杜功焕 朱哲民 龚秀芬 著

南京大学出版社

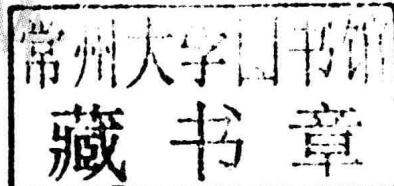


# 声学基础



(第三版)

杜功焕 朱哲民 龚秀芬 著



南京大学出版社

## 内 容 简 介

声学是一门既古老又迅速发展着的学科,近年来已渗透到几乎所有重要的自然科学和工程技术领域,并已融入于当代科学技术的前沿之中.本书系统地介绍了声学的基础理论,其中包括声的辐射、传播、接收与散射,并适当地介绍了近期活跃的非线性声学基础理论.

本书可作为高等院校的教材,也可供专业研究和工程技术人员参考.

### 图书在版编目(CIP)数据

声学基础/杜功焕,朱哲民,龚秀芬著.—3 版.  
—南京:南京大学出版社,2012.5  
ISBN 978 - 7 - 305 - 09778 - 2  
I. ①声… II. ①杜… ②朱… ③龚…  
III. ①声学 IV. ①O42

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 066309 号

出版发行 南京大学出版社  
社 址 南京市汉口路 22 号 邮编 210093  
网 址 <http://www.NjupCo.com>  
出 版 人 左 健

书 名 声学基础  
著 者 杜功焕 朱哲民 龚秀芬  
责任编辑 吴 华 编辑热线 025 - 83596997

照 排 江苏南大印刷厂  
印 刷 常州市武进第三印刷有限公司  
开 本 787×1092 1/16 印张 23.5 字数 557 千  
版 次 2012 年 5 月第 3 版 2012 年 5 月第 1 次印刷  
印 数 1~3600  
ISBN 978 - 7 - 305 - 09778 - 2  
定 价 47.00 元

发行热线 025-83594756  
电子邮箱 Press@NjupCo.com  
Sales@NjupCo.com(市场部)

---

\* 版权所有,侵权必究  
\* 凡购买南大版图书,如有印装质量问题,请与所购  
图书销售部门联系调换

## 序

20世纪70年代初美国曾出版过一部由一些物理学家共同撰写的《物理学展望》，其中有一段是从不同的方面把物理学各个分支进行对比，结论认为声学具有最大的“外在性”——也就是渗透到其他分支以至别的科技领域的部分最多，形成了若干新兴的边缘分支，对应用科学、技术、国防、文化生活以及社会等方面影响的潜力最大。可是声学又被评为研究得最不成熟的分支。我基本上同意这些评论。

声学的确具备着现代科学的各门学科相互交叉，从而形成边缘学科的特点，人们对许多声学问题还只是停留在感性认识的阶段。随着时代的进步，科技的发展，声学不断地开辟着新的科学上的生长点。毫无疑问，声学有蓬勃的生命力和广阔的前景。

物理学已习惯地划分为宏观的经典物理和微观的近代物理。自19世纪末以来，近代物理学发展的主流是向物质结构的更深层次去进行探索。但是人类对物质世界的认识总是后浪推前浪，科学的“前沿”不可能是孤立的。研究“基本粒子”的人可以不懂声学，但是费米在讲授他自己的 $\beta$ 衰变理论时却应用了当年瑞利对封闭空间声传播模式的概念；最近物理学家研究氯Ⅱ第三声却发现和“夸克”有了联系；固体物理学家正在自觉或不自觉地从事声学方面的问题。这种例子很多。声学既是跨层次又是跨学科的。

在此如此广阔的领域中要编写一本无所不包的声学专著，显然是不可能的。在50年代初期本人曾开过《声学基础》课程，就感到以声学基本问题为线索的课本很少，一般是过于偏重于某一方面，而其基础即分散在其他课本中。事过二十多年，国外也出过一些这类的书，不是过窄就是宽到像蜻蜓点水式的百科全书，国内更是个有无问题。

本书作者累积多年来教授这门课的经验，博采众长而不落窠臼，有一定的特点。至于侧重点“著者说明”中已交代得清楚。学者在掌握本书以后，可以举一反三，而作者也拟在此书的基础上，撰写续编。本书问世后必将对声学的教学和科学研究起着一定的作用，这是可以拭目以待的。

魏荣爵

1980年于南京大学物理系声学研究所

## 著者说明

本书是以多年来在南京大学物理系声学专业开设的“声学基础”课作为基础编写成的，希望对于其他从事声学方面研究工作的科技人员也有参考价值。

本书主要介绍一些传统性的声学基础方面的理论知识，其中包括声的辐射、传播、接收以及声学工作者必备的关于振动学方面的基础。书中的讨论着重于，目前大多数声学问题的基础“理想流体媒质中的小振幅声波”，但为了适应近年来声学研究的发展，在书中对非理想流体媒质、大振幅声波以及固体中的声传播特性等也作了简要的基础性介绍。

由于声学是一门既古老而又迅速发展着的学科，近年来它的应用已渗透到几乎所有重要的自然科学和工程技术领域，形成了一个又一个独特的崭新的分支学科，因此要在一本基础方面的书籍中涉及无所不包的声学问题是不可能的。

为了帮助读者掌握和运用书中所导得的重要理论公式，书中也涉及了一些实际问题，而这些问题中的大多数是偏重于音频声学范畴的，但是这并不是说本书只适用于作为音频声学的基础。

本书作为高等学校有关专业基础方面的教材，在推理方面力求做到自成体系，以使具备理工科大学有关基础知识的读者阅读本书时，对一些重要的理论结果能接受，而无需再查阅大量参考读物。

为了使读者更好地理解和掌握书中所讨论的主要内容，在书的前8章中提供了近200道习题。在书的附录中还列有常用的一些声学常数表，以及常用的数学公式与图表，以便读者查阅。

无论在教学以及书的编写过程中，都曾得到魏荣爵教授的多方指导，本校声学研究所与声学教研室不少同志也曾提出不少宝贵意见，并进行了有益的讨论，在此深表谢意。

著 者

## 再版说明

《声学基础》一书自 1981 年初版以来，深受读者厚爱，作者曾不断收到来自海内外读者朋友的鼓励乃至宝贵意见和建议。借此机会，谨表谢意。

近二十年来，我国的科学和教育事业经历了前所未有的发展。本书所服务的声学事业也幸逢盛世，一直生机勃勃。正如著名物理学家、声学家、中科院资深院士魏荣爵教授在为本书初版作序中所指出：“随着时代的进步，科技的发展，声学将不断开辟新的科学上的生长点。”因为“声学具有最大的外在性”的特点，近二十年间，不仅原有的分支不断发展、延拓，而且新的分支又不断滋生。声学已经渗透到我国国民经济与社会文化的各个领域，并也已融入于当代科学技术的前沿之中。当前正值新世纪，声学事业同样面临新的机遇与挑战。鉴于这种形势，出版一部既能系统介绍声学基本原理又能反映当前声学发展的教材，已紧迫地提上日程。在本书初版问世近二十年间，虽然重印过多次，但供应一直不能满足广大读者的需要。再版本书对其作出必要的修正和补充，已成为我们不应推辞的时代职责。

当然作为一部具有基础教材性质的著作，不可能去包罗当前声学发展中的各种问题，但是它必须为广大读者提供必要的基础，以使他们能尽快适应这种发展，并担负起推动当代声学事业发展的重任。因此对本书修订时，我们一方面力求保持已为广大读者认同的原书风格和特色，同时也在不提升原有数理基础的要求上增补一些近年来声学发展中涉及基础范畴的内容和章节。例如第 5 章的“一维电声传输线类比”，第 6 章的“不相干小球源的线阵”与“有限束超声辐射场”，第 7 章的“声强计原理”与“水中气泡的散射”，第 8 章在室内混响一节中对若干国际最著名音乐厅混响时间研究的介绍以及第 11 章的“兰姆波的传播”等等。特别对第 10 章作了较大的改动和补充，且更名为“非线性声学基础”。此外对原书作出一定修正以及积累长期教学经验对各章的习题作些扩充等工作当然也都是再版份内之劳。

本书的再版希望继续获得广大读者的欢迎。当然尽管我们做了努力，但肯定还有不足之处，因此也热忱期待着批评和指正。愿我们共同为祖国乃至国际声学事业的发展做出一份应有的贡献。

著者于南京大学 电子科学与工程系  
声学研究所  
近代声学国家重点实验室

# 目 录

<b>1 质点振动学 .....</b>	<b>1</b>
1.1 质点振动系统的概念.....	1
1.2 质点的自由振动.....	2
1.2.1 自由振动方程 .....	2
1.2.2 自由振动的一般规律 .....	3
1.2.3 自由振动的能量 .....	5
1.2.4 双弹簧串接与并接系统的振动 .....	6
1.2.5 弹簧质量对系统固有频率的影响 .....	7
1.2.6 振动问题的复数解 .....	8
1.3 质点的衰减振动.....	9
1.3.1 衰减振动方程 .....	9
1.3.2 衰减振动的一般规律.....	10
1.3.3 衰减振动的能量.....	11
1.4 质点的强迫振动 .....	12
1.4.1 强迫振动方程.....	12
1.4.2 强迫振动的一般规律.....	12
1.4.3 质点的稳态振动.....	13
1.4.4 强迫振动的能量.....	17
1.4.5 振动控制:电声器件的工作原理 .....	18
1.4.6 隔振原理 .....	21
1.4.7 拾振原理 .....	24
1.5 周期力的强迫振动 .....	27
习题 1 .....	31
<b>2 弹性体振动学.....</b>	<b>36</b>
2.1 弦的振动 .....	36
2.1.1 弦的振动方程.....	37
2.1.2 弦振动方程的一般解.....	38
2.1.3 自由振动的一般规律——弦振动的驻波解 .....	39
2.1.4 弦振动的能量 .....	43
2.2 棒的振动 .....	45
2.2.1 棒的纵振动方程.....	45
2.2.2 棒的纵振动的一般规律.....	46
2.2.3 棒的横振动方程.....	53

---

2.2.4 棒的横振动的边界条件.....	55
2.2.5 棒的横振动的一般规律.....	56
2.3 膜的振动 .....	60
2.3.1 膜的振动方程.....	60
2.3.2 圆膜对称振动的一般解.....	61
2.3.3 圆膜对称自由振动的一般规律.....	62
2.3.4 圆膜振动的等效集中参数.....	63
2.3.5 圆膜的强迫振动.....	65
2.3.6 媒质对膜振动的影响.....	68
2.3.7 圆膜振动的非对称振动.....	70
2.4 板的振动 .....	71
2.4.1 板的振动方程.....	71
2.4.2 周界钳定圆形板对称振动的一般规律.....	72
2.4.3 圆板振动的等效集中参数.....	74
习题 2 .....	75
<b>3 电-力-声类比 .....</b>	<b>78</b>
3.1 电路中的基本概念 .....	79
3.2 力学元件与基本力学振动系统 .....	81
3.3 声学元件与基本声学振动系统 .....	84
3.4 电-力-声线路类比 .....	87
3.4.1 电路图的分析.....	88
3.4.2 力学系统的类比线路图.....	88
3.4.3 声学系统的类比线路图.....	91
3.4.4 阻抗型和导纳型类比线路图的互相转换.....	94
3.4.5 变量器.....	95
3.5 电-力-声类比线路应用举例 .....	97
习题 3 .....	104
<b>4 声波的基本性质 .....</b>	<b>107</b>
4.1 概述.....	107
4.2 声压的基本概念.....	108
4.3 理想流体媒质中的声波方程.....	110
4.3.1 理想流体媒质的三个基本方程 .....	110
4.3.2 小振幅声波一维波动方程 .....	113
4.3.3 三维声波方程 .....	115
4.3.4 速度势 .....	116
4.4 特殊形式的声波方程.....	118
4.5 平面声波的基本性质.....	119
4.5.1 波动方程的解 .....	120

4.5.2 声波传播速度 .....	122
4.5.3 声阻抗率与媒质特性阻抗 .....	123
4.6 声场中的能量关系 .....	124
4.6.1 声能量与声能量密度 .....	124
4.6.2 声功率与声强 .....	126
4.7 声压级与声强级 .....	127
4.8 响度级与等响曲线 .....	128
4.9 从平面声波的基本关系检验线性化条件 .....	129
4.10 声波的反射、折射与透射 .....	131
4.10.1 声学边界条件 .....	131
4.10.2 平面声波垂直入射时的反射和透射 .....	132
4.10.3 平面声波斜入射时的反射与折射 .....	135
4.10.4 声波通过中间层的情况 .....	140
4.11 隔声的基本规律 .....	144
4.11.1 单层墙的隔声 .....	144
4.11.2 双层墙的隔声 .....	145
4.12 声波的干涉 .....	147
4.12.1 叠加原理 .....	148
4.12.2 驻波 .....	148
4.12.3 声波的相干性 .....	149
4.12.4 具有无规相位的声波的叠加 .....	150
习题 4 .....	152
<b>5 声波在管中的传播 .....</b>	<b>155</b>
5.1 均匀的有限长管 .....	156
5.1.1 管内声场 .....	156
5.1.2 阻抗图 .....	157
5.1.3 声负载的吸声系数 .....	159
5.1.4 共振吸声结构 .....	159
5.2 突变截面管 .....	161
5.2.1 声波在两根不同截面的管中传播 .....	161
5.2.2 中间插管的传声特性 .....	162
5.2.3 扩张管式消声器 .....	163
5.3 有旁支的管 .....	164
5.3.1 旁支对传声的影响 .....	164
5.3.2 共振式消声器 .....	165
5.4 管中输入阻抗(声传输线阻抗转移公式) .....	166
5.5 截面积连续变化的管(声号筒) .....	170
5.5.1 号筒中声场的一般解 .....	170

---

5.5.2 指数形号筒的传声特性 .....	171
5.6 声波在管中的粘滞阻尼 .....	175
5.6.1 管中粘滞运动方程 .....	175
5.6.2 细管中声波传播特性 .....	177
5.6.3 细管的声阻抗 .....	179
5.6.4 毛细管中声波传播特性 .....	180
5.6.5 毛细管的声阻抗 .....	181
5.6.6 微孔管的声阻抗 .....	182
5.7 声波导管理论 .....	183
5.7.1 矩形声波导管 .....	183
5.7.2 圆柱形声波导管 .....	189
5.8 非刚性壁管 .....	192
5.8.1 非刚性壁管中声波方程的解 .....	192
5.8.2 管中主波的传播 .....	193
5.9 一维电声传输线类比 .....	194
5.9.1 电传输线方程 .....	194
5.9.2 电声传输线类比 .....	195
5.9.3 不均匀传输线 .....	196
5.9.4 传输线中反射系数 .....	196
习题 5 .....	198
<b>6 声波的辐射 .....</b>	<b>202</b>
6.1 脉动球源的辐射 .....	202
6.1.1 球面声场 .....	202
6.1.2 声辐射与球源大小的关系 .....	203
6.1.3 声场对脉动球源的反作用——辐射阻抗 .....	205
6.1.4 辐射声场的性质 .....	207
6.2 声偶极辐射 .....	208
6.2.1 偶极辐射声场 .....	208
6.2.2 等效辐射阻 .....	210
6.3 同相小球源的辐射 .....	211
6.3.1 两个同相小球源的辐射声场 .....	211
6.3.2 指向特性 .....	212
6.3.3 自辐射阻抗和互辐射阻抗 .....	214
6.3.4 互易原理 .....	216
6.3.5 镜像原理 .....	217
6.3.6 声柱 .....	217
6.3.7 不相干小球源的线阵 .....	221

---

6.4 点声源.....	222
6.5 无限大障板上圆形活塞的辐射.....	223
6.5.1 远声场特性 .....	223
6.5.2 辐射的指向特性 .....	225
6.5.3 近声场特性 .....	227
6.5.4 声场对活塞声源的反作用——活塞辐射阻抗 .....	231
6.6 有限束超声辐射场.....	235
6.6.1 有限束超声场方程 .....	235
6.6.2 有限束超声场举例(活塞、高斯型与贝塞尔型超声场).....	237
6.7 球形声源的辐射.....	239
6.7.1 波动方程及其解的形式 .....	239
6.7.2 辐射声场与球源线度的关系 .....	242
6.7.3 球源辐射的声强和声功率 .....	245
习题 6 .....	248
<b>7 声波的接收与散射 .....</b>	<b>252</b>
7.1 声波的接收原理.....	252
7.1.1 压强原理 .....	252
7.1.2 压差原理 .....	254
7.1.3 压强与压差复合原理 .....	256
7.1.4 多声道干涉原理 .....	257
7.1.5 声强计原理 .....	259
7.2 声波的散射.....	260
7.2.1 刚性圆球的散射声场 .....	261
7.2.2 刚性圆球上的总声压 .....	263
7.2.3 液体中气泡的声散射 .....	265
习题 7 .....	268
<b>8 室内声场 .....</b>	<b>270</b>
8.1 用统计声学处理室内声场.....	270
8.1.1 扩散声场 .....	270
8.1.2 平均自由程 .....	271
8.1.3 平均吸声系数 .....	272
8.1.4 室内混响 .....	273
8.1.5 空气吸收对混响时间公式的修正 .....	275
8.1.6 稳态平均声能密度 .....	276
8.1.7 总稳态声压级 .....	277
8.1.8 声源指向性对室内声场的影响 .....	278
8.2 用波动声学处理室内声场.....	279
8.2.1 室内驻波 .....	279

8.2.2 简正频率的分布 .....	280
8.2.3 驻波的衰减 .....	283
8.2.4 法向声阻抗率与扩散声场吸声系数的关系 .....	284
8.2.5 各类波的混响时间 .....	286
8.2.6 声源的影响 .....	288
<b>习题 8 .....</b>	<b>290</b>
<b>9 声波的吸收 .....</b>	<b>292</b>
9.1 媒质的粘滞吸收 .....	292
9.1.1 理想媒质运动方程的回顾 .....	292
9.1.2 粘滞媒质运动方程 .....	293
9.1.3 粘滞媒质运动方程的解 .....	294
9.1.4 声速及吸收系数 .....	294
9.2 媒质的热传导声吸收 .....	298
9.3 声吸收经典公式的讨论 .....	298
9.4 分子弛豫吸收简单理论 .....	300
9.5 生物媒质中的超声衰减 .....	305
<b>习题 9 .....</b>	<b>306</b>
<b>10 非线性声学基础 .....</b>	<b>307</b>
10.1 非线性一维流体动力学方程及其解 .....	308
10.2 非线性物态方程与非线性参量 .....	310
10.2.1 非线性物态方程 .....	310
10.2.2 非线性参量 .....	310
10.3 声波的非线性传播与波形畸变 .....	312
10.3.1 波形的畸变 .....	312
10.3.2 间断距离 .....	313
10.3.3 贝塞尔-富比尼解：畸变波形的谐波分析 .....	313
10.3.4 波形畸变的图解分析 .....	315
10.4 有限振幅声波的相互作用 .....	316
10.4.1 非线性波动方程 .....	317
10.4.2 非线性波动方程的近似解 .....	317
10.4.3 两个不同频率声波的相互作用 .....	318
10.5 粘滞媒质中有限振幅波的传播 .....	320
10.5.1 伯格斯方程 .....	321
10.5.2 伯格斯方程的解 .....	322
10.5.3 粘滞媒质中的二次谐波声压特性 .....	323
10.6 非线性振动 .....	324
10.6.1 具有非线性恢复力无阻尼的强迫振动 .....	325
10.6.2 具有非线性恢复力有阻尼的强迫振动 .....	328

---

10.6.3 跳跃现象.....	329
10.6.4 分谐频振动.....	330
习题 10 .....	331
<b>11 固体中声波传播的基本特性.....</b>	<b>332</b>
11.1 固体的基本弹性性质.....	332
11.1.1 固体中的应变分析.....	332
11.1.2 固体中的应力分析.....	334
11.1.3 广义虎克定律.....	335
11.1.4 拉密常数与杨氏模量、泊松比的关系 .....	336
11.2 固体中声波的传播.....	337
11.2.1 固体中的声波方程.....	338
11.2.2 声波的反射与折射.....	340
11.2.3 声表面波.....	344
11.2.4 薄板中的兰姆波.....	348
习题 11 .....	350
<b>附录</b>	
A 媒质的声学常数 .....	351
B 常用数学公式 .....	352
C 一些特殊函数的图和表 .....	358

# 1

## 质点振动学

- 1. 1 质点振动系统的概念
  - 1. 2 质点的自由振动
  - 1. 3 质点的衰减振动
  - 1. 4 质点的强迫振动
  - 1. 5 周期力的强迫振动
- 
- 

振动学是研究“声学”的基础。因为不仅从广义看来，声学现象实质上就是传声媒质（气体、液体、固体等）质点所产生的一系列力学振动传递过程的表现，而且声波的发生（无论是自然产生或人工获得）基本上也来源于物体的振动。当有一阵风吹来时，人们就会听到树叶振动而发出“沙沙”的响声。当人们在欣赏一支交响乐队演奏时，就会发现乐队的演奏者都在各自忙碌而又紧张地操作着自己的乐器，有的在使劲地用槌子击鼓，有的在缓缓地用弓拉动小提琴的弦。他们的动作似乎是杂乱无章，然而人们所听到的那种优美的音乐，却正是这些乐器上的振动物体“杂乱无章”运动的总效果。既然声是从物体振动而来，因而从物体的振动规律自然也可以预知声的一些规律。例如，由扬声器发出的声音的强弱及其频率与扬声器的纸盆振动幅度及其频率有关。一个声学工作者免不了要使用或者研制一些电声器件（例如扬声器与传声器等），而这些器件的大多数都具有一个（或多个）振动系统，如扬声器的纸盆与传声器的音膜等。可以发现，这些振动系统的特性，对控制电声器件的声学性能往往起着关键作用。此外人们也会发现，一些恼人的噪声也常常来自物体的强烈振动。如何来检测、抑制和隔离这些振动也已成为现代声学的重要课题。由此可见，振动学的基础知识对声学工作者是必不可缺的。

当然振动学所研究的范围是非常广泛的，而它本身也已发展成为一个独立的学科。本书的讨论自然不能包罗万象，这里所要介绍的主要限于与声学问题联系比较密切的一些力学振动的基础知识，这一章主要讨论质点的振动，下一章将讨论一些简单形状弹性体（如弦、棒、膜、板等）的振动。

### 1. 1

#### 质点振动系统的概念

所谓质点振动系统，就是假设构成振动系统的物体如质量块、弹簧等，不论其几何大小如何，都可以看成是一个物理性质集中的系统，对于这种系统，质量块的质量认为是集中在

一点的,这就是说,构成整个振动系统的质量块与弹簧,它们的运动状态都是均匀的.这种振动系统也被称为集中参数系统.虽然上面所述的系统是理想化的,然而在一定的条件下,它可以被看成是实际系统的近似模型,而且在上述的假设下,数学处理可以大大简化,而研究所得的振动规律的图像又比较清晰和直观,因而对这种质点振动系统的研究显得十分重要.

实际物体总是有一定的几何大小,并且物体的各部分振动状态往往是不可能处处相同的.例如,取一有限大小的弹性物体,对其一端进行敲击,那么首先在物体的该端表面发生形变,然后逐渐传播开来.这种形变从始端到末端的传播需要一定时间,而不能瞬时到达.这意味着,物体上各个位置的振动状态,在某一瞬间是各不相同的.但是如果形变从物体的始端到末端的传播所需的时间,与物体中形变或振动周期(振动一次所需的时间)相比短得多,或者物体的线度比物体中振动传播波长(振动一次所传播的距离)小得多,那么这一物体的各部分振动状态就可以看成近似均匀,而这一振动系统就可以近似地看作质点振动系统.这里还要强调一下,一种振动物体能否作为质点系统来对待,并不决定它的“绝对”几何尺寸,而要看它的线度与物体中振动传播波长的相对比值而定,例如常见的0.2 m口径扬声器,其纸盆的有效直径约有0.18 m.但是当振动频率为1 000 Hz时,从纸盆顶部到边缘的距离还不到纸盆中振动传播波长的1/5,因此在此扬声器的工作频率低于1 000 Hz时,把纸盆(盆面等效为质量,边缘折环等效为弹簧)作为质点振动系统来对待,不会引起很大的误差.再例如有一个厚度仅为0.5 cm的压电陶瓷振子,在进行厚度方向的纵振动,假设它的振动频率为每秒100万次,这时与其对应的波长约为0.5 cm,与物体的线度相接近,因此这一压电陶瓷振子虽小,但就不能把它当作质点振动系统,而应视作分布振动系统来对待,而后者将于第2章来进行专门讨论.

## 1.2

### 质点的自由振动

设有一可作为质点,其质量为 $M_m$ 的坚硬物体系于弹性系数或劲度系数为 $K_m$ 的弹簧上,构成一简单的振动系统,简称单振子,如图1-2-1所示,假定在没有外力扰动时,物体的重力与弹簧的弹力相平衡,系统处于相对静止状态.取质点 $M_m$ 的静止位置(或称平衡位置)为坐标原点,设有一外力突然在 $x$ 方向拉(或推)动 $M_m$ ,使弹簧产生伸长(或压缩),随即就释放,此后质点 $M_m$ 就在弹簧的弹力作用下,在平衡位置附近做往返的运动,即发生振动.如果假定外力仅在初始时刻起作用,而后就去掉了,在这种情况下质点所做的振动称为自由振动.

#### 1.2.1 自由振动方程

分析图1-2-1可知,当质点 $M_m$ 被拉离平衡位置时,弹簧 $K_m$ 也有了伸长,这时在质点 $M_m$ 上就受到弹簧的弹力 $F_K$ 的作用.我们假设质点离开平衡位置的位移 $\xi$ 很小(即限于讨论微小振动),以致弹簧的伸长或收缩没有超出弹性限度范围,则按照虎克定律,弹力的大小同位移成正比,可表示成

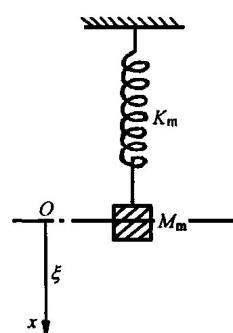


图1-2-1

$$F_K = -K_m \xi, \quad (1-2-1)$$

式中比例系数  $K_m$  就是上述的弹性系数,有时也常用其倒数  $C_m$  来表示,  $C_m = \frac{1}{K_m}$  称为顺性系数,或称力顺. 式中出现的负号表示质点位移的方向与弹力的方向相反,例如质点离开平衡位置向  $x$  正方向运动,它的位移为正,这时弹簧的弹力表现为对质点施加拉力,其方向指向  $x$  负方向. 质点受此弹力作用,将得到加速度,按照牛顿第二定律可得

$$M_m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = -K_m \xi, \quad (1-2-2)$$

或写成

$$M_m \frac{d^2 \xi}{dt^2} + K_m \xi = 0, \quad (1-2-3)$$

也可写成

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + \omega_0^2 \xi = 0, \quad (1-2-4)$$

其中  $\omega_0^2 = \frac{K_m}{M_m}$ ,  $\omega_0$  是引入的一个参量,称为振动圆频率,也称角频率,式(1-2-4)就是质点的自由振动方程.

## 1.2.2 自由振动的一般规律

要了解自由振动的一般规律,首先要对振动方程(1-2-4)求解,因为  $\omega_0^2$  是正的实数,所以这一对时间  $t$  的齐次二阶常微分方程的一般解应是两个简谐函数的线性叠加,即

$$\xi = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t, \quad (1-2-5)$$

式中  $A, B$  为两个待定常数,由运动的初始条件来定.

(1-2-5)式也可写成另一形式

$$\xi = \xi_a \cos(\omega_0 t - \varphi_0), \quad (1-2-6)$$

式中  $\xi_a$  为  $\xi$  的振幅. 知道了位移也可求得振动速度

$$v = \frac{d\xi}{dt} = v_a \sin(\omega_0 t - \varphi_0 + \pi), \quad (1-2-7)$$

其中  $v_a = \omega_0 \xi_a$ ,  $\xi_a$  与  $\varphi_0$  也为待定常数,它们与常数  $A$  与  $B$  之间有如下关系

$$\xi_a = \sqrt{A^2 + B^2}, \varphi_0 = \arctan \frac{B}{A};$$

$$A = \xi_a \cos \varphi_0, B = \xi_a \sin \varphi_0.$$

它们都是取决于初始条件的待定常数,详细研究它们的关系,意义并不大. 这里提一下,以后遇到类似情形,就不再赘述了.

从(1-2-6)式可以看出位移  $\xi$  随时间  $t$  的变化规律呈余弦形式. 随时间  $t$  做正弦或余弦规律的运动,一般称为简谐振动. 按(1-2-6)式可以得到位移  $\xi$  随时间  $t$  的变化规律,如图 1-2-2 所示. 从图可以看出,  $\xi_a$  为位移的最大值,称为位移振幅,  $\varphi_0$  为振动起始时刻的初

**相位**,运动自  $t = 0$  开始, 经过  $t = T$  时间, 又恢复到原来状态, 这一时间  $T$  称为运动的周期, 即振动一次所需的时间, 单位为 s(秒), 它的倒数  $f = \frac{1}{T}$  表示每秒的振动次数, 称为振动的频率, 其单位为 Hz, 中文名称赫兹, 简称赫.  $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$ .

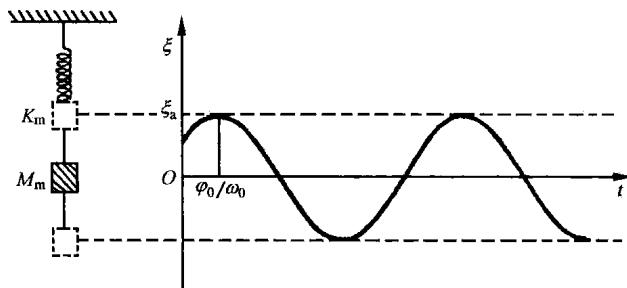


图 1-2-2

从(1-2-6)式可以指出,  $\omega_0 T = 2\pi$ , 即  $\omega_0 = 2\pi f$ , 因此  $\omega$  就等于  $2\pi$  秒钟的振动次数, 称为振动的圆频率(或角频率), 因为已知  $\omega_0^2 = \frac{K_m}{M_m}$ , 所以可以求得自由振动的频率公式为

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_m}{M_m}}, \quad (1-2-8)$$

或者用力顺  $C_m$  来表示

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{M_m C_m}}. \quad (1-2-9)$$

(1-2-8)式表明, 当质点做自由振动时, 其振动频率是仅同系统的固有参量有关, 而与振动初始条件无关的常数, 这就是说只要系统的固有质量  $M_m$  和弹性系数  $K_m$  一定, 其振动的频率也就决定了, 而同系统是以多大的初始位移或者多大的初始速度开始运动没有关系, 因而称这一振动频率为系统的固有频率. 自由振动的这一特性, 在我们日常工作和生活中是常见的, 例如, 用小锤来敲击音叉, 或用手指弹钢琴的某个键, 不管敲或弹得轻重如何, 它们发出的声音的频率是一定的, 敲或弹得是轻是重仅影响其振动幅度或由它发出声音的强弱.

从(1-2-8)式可以看到, 一质点振动系统, 质量  $M_m$  愈大或弹性系数  $K_m$  愈小, 固有频率  $f_0$  就愈低, 反之  $M_m$  愈小或  $K_m$  愈大,  $f_0$  就愈高. 这一规律颇有实际意义. 例如, 在以后就会知道, 一动圈扬声器振动系统的固有频率对于其低频声学性能有十分重要的影响. 而如果需要降低其固有频率, 原则上是可按公式(1-2-8)的规律, 采取两方面措施:

- (1) 增加系统的质量, 即增加音圈与纸盆的质量;
- (2) 减少系统的弹性系数, 即使纸盆边缘的折环部分更为柔顺.

上面已经指出, 在描述质点自由振动的位移表示式中有两个待定常数  $\xi_a$  与  $\varphi_0$ . 它们取决于系统的起振条件, 如果这两个常数一旦确定, 那么这一系统的振动状态就可完全知道. 例如, 假设原来质点处于静止状态, 在  $t=0$  的那一瞬间, 它得到了一速度  $v_0$ , 对于这种情况, 我们可以写出如下初始条件: