高校经典教材同步辅导丛书

配套人大版 · 赵树嫄主编

九章丛书

经济应用数学基础（二）

线性代数（第四版）

全程辅导及习题精解

主　编　郭志梅

副主编　李　杰

- 知识点窍
- 逻辑推理
- 习题全解
- 全真考题
- 名师执笔
- 题型归类

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{vmatrix}$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

新版

中国水利水电出版社

www.waterpub.com.cn

高校经典教材同步辅导丛书

经济应用数学基础（二）
线性代数（第四版）
全程辅导及习题精解

主　编　郭志梅

副主编　李　杰

中国水利水电出版社

www.waterpub.com.cn

内容提要

本书是与中国人民大学出版社出版的、赵树嫄主编的《经济应用数学基础（二）线性代数》（第四版）一书配套的全程辅导及习题精解参考书。

本书共有五章，分别介绍行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值和二次型。本书按教材内容安排全书结构，各章均包括学习指南、知识回顾、典型例题与解题技巧、考研真题精解、课后习题全解五部分内容，并针对各章节习题给出详细解答，思路清晰、逻辑性强，循序渐进地帮助读者分析并解决问题，内容详尽、简明易懂。

本书可作为高等院校学生学习“线性代数”课程的辅导教材，也可作为考研人员复习备考的辅导教材，同时可供教师备课命题作为参考资料。

图书在版编目（CIP）数据

经济应用数学基础（二）线性代数（第四版）全程辅导及习题精解 / 郭志梅主编. -- 北京 : 中国水利水电出版社, 2012.9
（高校经典教材同步辅导丛书）
ISBN 978-7-5170-0107-2

Ⅰ. ①经… Ⅱ. ①郭… Ⅲ. ①经济数学－高等学校－教学参考资料②线性代数－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①F224.0②O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第204447号

策划编辑：杨庆川　责任编辑：张玉玲　加工编辑：杨　谷　封面设计：李　佳

书　　名	高校经典教材同步辅导丛书 **经济应用数学基础（二）线性代数（第四版）全程辅导及习题精解**
作　　者	主　编　郭志梅　　副主编　李　杰
出版发行	中国水利水电出版社（北京市海淀区玉渊潭南路1号D座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（发行部）、82562819（万水）
经　　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：（010）88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	北京万水电子信息有限公司
印　　刷	北京市梦宇印务有限公司
规　　格	170mm×227mm　16开本　14.25印张　380千字
版　　次	2012年9月第1版　2012年9月第1次印刷
印　　数	0001—7000册
定　　价	19.80元

前言

POSTSCRIPT

赵树嫄主编的《经济应用数学基础(二)线性代数》(第四版)以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点成为这门课程的经典教材，被全国许多院校采用。

为了帮助读者更好地学习这门课程，掌握更多的知识，我们根据多年的教学经验编写了这本与此教材配套的《经济应用数学基础(二)线性代数(第四版)全程辅导及习题精解》。本书旨在帮助广大读者理解基本概念，掌握基本知识，学会基本解题方法与解题技巧，进而提高应试能力。

本书作为一种辅助性的教材，具有较强的针对性、启发性、指导性和补充性。考虑到"线性代数"这门课程的特点，我们在内容上作了以下安排：

1. **学习指南**。简明扼要地说明本章的学习目标，明确学习任务。

2. **知识回顾**。对每章知识点做了简练概括，梳理了各知识点之间的脉络联系，使读者在各章学习过程中目标明确，有的放矢。

3. **典型例题与解题技巧**。该部分选取了一些具有启发性或综合性较强的经典例题，先进行分析，再给出详细解答，意在抛砖引玉。

4. **考研真题精解**。精选历年研究生入学考试中具有代表性的试题进行详细的解答，开拓解题思路，帮助读者更好地掌握该课程的基本内容和解题方法。

5. **课后习题全解**。教材中课后习题丰富、层次多样，许多基础性问题从多个角度帮助学生理解基本概念和基本理论，促其掌握基本解题方法。我们对教材的全部课后习题给出了详细的解答。

由于时间仓促及编者水平有限，书中难免有疏漏之处，敬请各位同行和读者批评指正。

编者

2012 年 7 月

目录

contents

目录

contents

第一章

行列式

学习指南

1. 了解排列、对换、逆序数的定义，掌握计算逆序数的方法；

2. 理解二阶、三阶行列式的定义，掌握计算二、三阶行列式的公式；

3. 理解 n 阶行列式的定义，掌握使用定义计算 n 阶行列式的方法，了解几种特殊行列式及其值；

4. 熟记 n 阶行列式的性质，掌握使用行列式的性质来计算行列式的方法；

5. 掌握行列式按行(列)展开公式，熟练掌握克莱姆法则，了解线性方程组只有零解和有非零解的判断方法．

知识回顾

■ 定义

逆序、逆序数：在一个 n 级排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 中，如果有较大的数 i_t 排在较小的数 i_s 前面($i_s<i_t$)，则称 i_t 与 i_s 构成一个逆序．一个 n 级排列中逆序的总数，称为它的逆序数，记为

$$N(i_1,i_2,\cdots,i_n)$$

奇排列，偶排列：逆序数是奇数的排列称为奇排列；逆序数是偶数的排列称为偶排列．

对换：在一个排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中，如果仅将它的两个数码 i_s 与 i_t 对调，其他数码不变，得到另一个排列 $i_1,\cdots,i_t,\cdots,i_s,\cdots,i_n$，这样的变换称为一个对签名册，记为对换($i_s,i_t$)．

n 阶行列式：用 n^2 个元素 $a_{ij}\,(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，其中横排称为行，纵排称为列，a_{ij} 称为第 i 行第 j 行的元素．n 阶行列式表示所有的可能取自不同的行、不同的列的 n 个元素乘积的代数和，各项的符号是：当这一项中元素的行标按自

然数顺序排列后，如果对应的列标构成的排列是偶排列则取正号，是奇排列则取负号.

主对角线：行列式中从左上角到右下角的对角线称为主对角线.

转置行列式：将行列式 D 的行与列互换后得到的行列式，称为 D 的转置行列式，记为 D^{T} 或 D' 即如果

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则
$$D^{\mathrm{T}}=D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

元素的余子式和代数余子式：在 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 中去掉元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 行后，余下的 $n-1$ 阶行列式，称为 D 中元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}，即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式的 k 阶子式：在 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 中，任意选定 k 行 k 列 $(1\leqslant k\leqslant n)$，位于这些行和列交叉处的 k^2 个元素，按原来顺序构成一个 k 阶行列式 M，称为 D 的一个 k 阶子式.

几种特殊行列式

下三角形行列式：
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

上三角形行列式：
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

对角行列式：
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

范德蒙行列式： $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(x_j-x_i)$

方程组的系数行列式：含有 n 个方程的 n 元线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \quad\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{*}$$

它的系数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 构成的行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.1}$$

齐次线性方程组：如果线性方程组具有以下形式

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \quad\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

则方程组称为齐次线性方程组.

■ 定理

定理 1.1 任意一个排列经过一个对换后奇偶性改变.

定理 1.2 n 个数码($n>1$)共有 $n!$ 个 n 级排列，其中奇偶排列各占一半.

定理 1.3 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 的一般项可以记为

$$(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $j_1j_2\cdots j_n$ 均为 n 级排列.

命题(1.1)行列式的性质

性质 1 将行列式转置，行列式的值不变，即 $D^{\mathrm{T}}=D$.

性质 2 交换行列式的两行(列)，行列式的值变号.

推论 如果行列式中有两行(列)的对应元素相同，则此行列式的值为零.

性质 3 用数 k 乘行列式的某一行(列)，等于以数 k 乘此行列式，即如果设 $D=|a_{ij}|$，则

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论 2 如果行列式有两行(列)的对应元素成比例，则行列式的值等于零.

性质 4 如果将行列式中的某一行(列)的每一个元素都写成两个数的和,则此行列式可以写成两个行列式的和,这两个行列式分别以这两个数为所在行(列)对应位置的元素,其他位置的元素与原行列式相同,即如果

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{则 } D=D_1+D_2.$$

推论 如果将行列式某一行(列)的每个元素都写成 m 个数(m 为大于 2 的整数)的和,则此行列式可以写成 m 个行列式的和.

性质 5 将行列式某一行(列)的所有元素同乘以数 k 后加于另一行(列)对应位置的元素上,行列式的值不变.

定理 1.4 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 等于它的任意一行(列)的各元素与其对应代数余子式乘积的和,即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}(i=1,2,\cdots,n)$$

或
$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}(j=1,2,\cdots,n)$$

定理 1.5 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 的某一行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积的和等于零,即

$$D=a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+\cdots+a_{in}A_{sn}=0(i\neq s)$$

或
$$D=a_{1j}A_{1t}+a_{2j}A_{2t}+\cdots+a_{nj}A_{nt}=0(j\neq t)$$

定理 1.6(拉普拉斯定理) 在 n 阶行列式中,任意取定 k 行(列)$(1\leqslant k\leqslant n-1)$,由这 k 行(列)组成的所有 k 阶子式与它们的代数余子式的乘积之和等于行列式 D.

定理 1.7(克莱姆法则) 线性方程组当其系数行列式 $D\neq0$ 时,有且仅有唯一解

$$x_i=\frac{D_j}{D}(j=1,2,\cdots,n)$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是将系数行列式中第 j 列元素 $a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj}$ 对应地换为方程组的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 后得到的行列式.

定理 1.8 如果齐次线性方程组的系数行列式 $D\neq0$,则它仅有零解.

公式

1. 二阶行列式计算公式:$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

2. 三阶行列式计算公式：$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$ (1.2)

3. n 阶行列式所表示的代数和中的一般项为：$(-1)^{N(j_1,j_2,\cdots,j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$. 其中 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 构成一个 n 级排列，当 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 取遍所有 n 级排列时，则得到 n 阶行列式表示的代数和中所有的项.

4. 几种常见行列式的值：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \vdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1};$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}.$$

典型例题与解题技巧

■ 题型Ⅰ 排列逆序数的计算

【思路点拨】 在求排列 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 的逆序数时，可以从第 2 个数开始，依次统计 $j_i(i=2,3,\cdots,n)$ 与其前面的数构成的逆序个数（即前面比 j_i 大的数的个数）τ_i，设排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数为 $\tau_2+\tau_3+\cdots+\tau_n$.

【例 1.1】 求下列排列的逆序数，并确定它们的奇偶性.

(1) 5 3 2 1 4.

(2) $n\ (n-1)\cdots 2\ 1$.

(3) $1\ 3\ 5\cdots(2n-1)\ 2\ 4\ 6\cdots(2n)$.

【解】 (1) $\tau(5\ 3\ 2\ 1\ 4)=1+2+3+1=7$，为奇排列.

(2) $\tau[n\ (n-1)\cdots 2\ 1]=1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

由于 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 的奇偶性必须根据 n 而定，故讨论如下：

当 $n=4k$ 时，$\dfrac{n(n-1)}{2}=2k(4k-1)$ 为偶数；

当 $n=4k+1$ 时，$\dfrac{n(n-1)}{2}=2k(4k+1)$ 为偶数；

当 $n=4k+2$ 时，$\dfrac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+1)$ 为奇数；

当 $n=4k+3$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+3)$ 为奇数.

综上所述，当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时，此排列为偶排列；当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时，此排列为奇排列，其中 k 为任意非负整数.

(3)该排列的前 n 个数 $1\ 3\ 5\cdots(2n-1)$ 之间不构成逆序，后 n 个数 $2\ 4\ 6\cdots(2n)$ 之间也不构成逆序，只有前后 n 个数之间才构成逆序，因此排列的逆序数为

$$\begin{aligned}\tau&=\tau_2+\tau_3+\cdots+\tau_n+\tau_{n+1}+\tau_{n+2}+\cdots+\tau_{2n}\\&=0+0+\cdots+0+0+1+\cdots+(n-1)\\&=\frac{n(n-1)}{2}\end{aligned}$$

奇偶性情况与(2)完全一致.

【例 1.2】 如果排列 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 的逆序数为 I，求排列 $j_n,j_{n-1},\cdots,j_2,j_1$ 的逆序数.

【分析】 如果设原排列中 j_1 前比 j_1 大的数的个数为 τ_1，则比 j_1 小的数的个数为 $(n-1)-\tau_1$，那么新排列 $j_n,j_{n-1},\cdots,j_2,j_1$ 中 j_1 前比 j_1 大的个数为 $(n-1)-\tau_1$；同理，设原排列中 j_2 前比 j_2 大的数的个数为 τ_2，则比 j_2 小的数的个数为 $(n-2)-\tau_2$，则新排列中 j_2 前比 j_2 大的数的个数为 $(n-2)-\tau_2$；依次类推，设原排列中 j_k 前比 j_k 大的数的个数为 τ_k，则新排列中 j_k 前比 j_k 大的数的个数为 $(n-k)-\tau_k\quad(k=1,2,\cdots,n)$.

【解】 设原排列中 j_k 前比 j_k 大的数的个数为 τ_k，则新排列中 j_k 前比 j_k 大的数的个数为 $(n-k)-\tau_k$ $(k=1,2,\cdots,n)$. 因为 $\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_n=I$，则排列 $j_n,j_{n-1},\cdots,j_2,j_1$ 的逆序数为

$$\begin{aligned}\tau&=\sum_{k=1}^{n}[(n-k)-\tau_k]\\&=[(n-1)+(n-2)+\cdots+1+0]-(\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_n)\\&=\frac{n(n-1)}{2}-I.\end{aligned}$$

■ 题型Ⅱ n阶行列式的定义

【思路点拨】 对于此类题型要注意两点：一是每一项的构成，应为不同行、不同列的 n 个元素相乘；二是每一项的符号，当第一个下标为自然顺序时，由第二个下标排列的奇偶性确定.

【例 1.3】 填空题

(1)在 5 阶行列式中，项 $a_{12}a_{31}a_{54}a_{43}a_{25}$ 的符号应取____.

(2)在 4 阶行列式中，带负号且包含因子 a_{23} 和 a_{31} 的项为____.

(3)如果 n 阶行列式中，负项的个数为偶数，则 $n\geqslant$____.

(4)如果 n 阶行列式中等于零的元素个数大于 n^2-n，那么此行列式的值为____.

【分析】 (1)其逆序数 $\tau(1\ 3\ 5\ 4\ 2)=4$，故取正号.

(2)包含因子 a_{23} 和 a_{31} 的项必为 $a_{1i}a_{23}a_{31}a_{4j}$，其中 i,j 为 2,4 或 4,2. 又此项符号为负，所以 $i31j$ 为奇排列，从而有 $i=4,j=2$.

(3)n 阶行列式中，共有 $n!$ 项，其中正负项各占一半，若负项的个数为偶数，必有 $n\geqslant4$.

(4)n 阶行列式中共有 n^2 个元素，如果等于零的元素个数大于 n^2-n，那么不等于零的元素

个数就小于 n，又 n 阶行列式的每一项是 n 个不同元素的乘积，所以每一项必定为零，所以此行列式的值也为零.

【答案】 (1)+. (2)$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$. (3)4. (4)0.

【例 1.4】 试求 $f(x)$ 中 x^4 与 x^3 的系数，其中

$$f(x)=\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & x & 3 \\ x & x & 2 & 3 \\ x & 2 & 1 & -3x \end{vmatrix}.$$

【解】 由 $f(x)$ 的表达式可知，位于不同行不同列的 4 个元素乘积含 x^4 的项只有 1 项

$$(-1)^{\tau(1\,3\,2\,4)}a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}=(-1)^1 5x\cdot x\cdot x\cdot(-3x)=15x^4$$

含 x^3 的项有 2 项

$$(-1)^{\tau(2\,3\,1\,4)}a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}=(-1)^2 1\cdot x\cdot x\cdot(-3x)=-3x^3$$

$$(-1)^{\tau(4\,3\,2\,1)}a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}=(-1)^6 3\cdot x\cdot x\cdot x=3x^3$$

故 $f(x)$ 中 x^4 的系数为 15，x^3 的系数为 0.

■ 题型Ⅲ 低阶行列式的计算

【思路点拨】 3 阶以下行列式的计算可以使用对角线法，直接进行计算。3～5 阶行列式的计算一般有两个方法：一是利用行列式的性质化为上（或下）三角形行列式；二是根据行列式按一行（或列）展开公式降阶求解.

【例 1.5】 计算下列行列式

$$(1)D=\begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix};\qquad (2)D=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 & -3 \\ 1 & -6 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & -12 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

【分析】 对于数字型行列式的计算一般采用把某行（或列）元素中除去某一元素外的其他元素，用行列式的性质都化为零，再利用按行（或列）展开的性质，降低行列式的阶数进行计算.

【解】 (1)第一种方法利用降阶求解：

$$D=\begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 100 & 4 \\ -1 & 200 & -5 \\ 1 & 300 & 0 \end{vmatrix}=100\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=100\begin{vmatrix} 3 & -8 & 4 \\ -1 & 5 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=100\begin{vmatrix} -8 & 4 \\ 5 & -5 \end{vmatrix}=2000.$$

第二种方法直接用对角线法求解：

$$D=\begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix}$$

$=103\times200\times600+199\times300\times204+301\times100\times395-204\times200\times301-103\times300\times395-199\times100\times600$

(2)因为该行列式的第 4 列含有 0 元素，且 $a_{24}=1$，所以，可把第 4 列的元素 a_{14}、a_{44} 化为 0，再按第 4 列展开

$$D=\begin{vmatrix}5&-14&-2&0\\1&-6&-2&1\\-3&5&2&0\\1&6&6&0\end{vmatrix}=(-1)^{2+4}\begin{vmatrix}5&-14&-2\\-3&5&2\\1&6&6\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}5&-14&-2\\2&-9&0\\16&-36&0\end{vmatrix}=-2\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&-9\\16&-36\end{vmatrix}=-144.$$

【例 1.6】 记行列式

$$\begin{vmatrix}x-2&x-1&x-2&x-3\\2x-2&2x-1&2x-2&2x-3\\3x-3&3x-2&4x-5&3x-5\\4x&4x-3&5x-7&4x-3\end{vmatrix}$$ 为 $f(x)$，则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为

(A)4　(B)3　(C)2　(D)1

【分析】 本题实质上是确定 $f(x)$ 是几次多项式，即有几个根. 由于行列式中各项均含有 x，直接展开是繁琐的，因此本题可利用行列式性质作恒等变形后求解.

【解】 将第 1 列的(－1)倍依次加至其余各列，有

$$f(x)=\begin{vmatrix}x-2&1&0&-1\\2x-2&1&0&-1\\3x-3&1&x-2&-2\\4x&-3&x-7&-3\end{vmatrix}\overset{c_4+c_2}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}x-2&1&0&0\\2x-2&1&0&0\\3x-3&1&x-2&-1\\4x&-3&x-7&-6\end{vmatrix}$$

用拉普拉斯展开式知

$$f(x)=\begin{vmatrix}x-2&1\\2x-2&1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}x-2&-1\\x-7&-6\end{vmatrix}=5x(x-1),$$

可见 $f(x)=0$ 有两个根，故应选(C).

题型Ⅳ　行列式按行(列)展开定理的应用

【思路点拨】 根据行列式按行(列)展开定理，可将 n 阶行列式降到 2 阶行列式来直接计算，这样从理论上完全解决了行列式的计算问题. 在实际计算中，有时会利用公式

$$k_1A_{i1}+k_2A_{i2}+\cdots+k_nA_{in}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\k_1&k_2&\cdots&k_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

将某些低阶行列式(代数余子式或余子式)的计算转化为高阶行列式计算.

【例 1.7】 已知四阶行列式

$$D_4=\begin{vmatrix}1&1&7&-1\\3&1&8&0\\-2&1&4&3\\5&1&2&5\end{vmatrix}$$

求 $A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}$ 的值，其中 A_{ij} 为行列式 D_4 中元素 a_{ij} 的代数余子式.

【分析】 本题若直接计算四个代数余子式，计算较繁且易出现差错，反过来用行(列)展开定理，化为四阶行列式计算更简便.

【解】 由于

$$A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}=1\cdot A_{14}+1\cdot A_{24}+1\cdot A_{34}+1\cdot A_{44}$$

它是行列式 D_4 中第 2 列元素与第 4 列元素代数余子式的乘积之和，故由行列式按一列展开定理知

$$A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}=0$$

题型Ⅴ n阶行列式的计算

【思路点拨】 n 阶行列式的计算方法很多，应根据题的特点灵活应用. 现将 n 阶行列式的几种方法归纳如下：

(1)直接按定义计算，特别是对于非零元素特别少(一般小于 $2n$ 个)的情况适用.

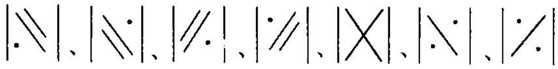
(2)利用行列式的性质化为三角行列式(或可用重要公式定理)计算法.

对于所有行(或列)对应元素相加相等的行列式，可把所有行(或列)加到第 1 行(或第 1 列)，提取公因子后再化简计算.

“三线型”行列式.“三线型”行列式是指除某一行、某一列和对角线或次对角线不为零外，其余元素均为零的行列式.“三线型”行列式的主要求解方法是化为三角行列式计算.

(3)递推公式法.

把一个 n 阶行列式表示为具有相同结构的较低阶行列式的线性关系式，如“两条线的行列式”. 对于形如



的所谓的“两条线的行列式”，可以直接展开降阶.

$D_n=aD_{n-1}+bD_{n-2}$ 或 $D_n=\alpha D_{n-1}+\beta$，再根据此关系式递推求得所给 n 阶行列式的值.

(4)降阶法.

利用行列式性质将行列式化为某行(列)零元素尽可能多的情形，然后再按此行(列)展开，转化为较低阶行列式进行计算.

(5)加边法.

根据要计算的行列式的特征，有时可把原行列式加上一行一列再进行计算，以便于

将要计算的行列式化简.当然,加边后必须是保值的.常见的加边方法是

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(6)拆分法.

将行列式适当地拆分成若干个同阶行列式之和,然后求出各行列式的值,即可得原行列式的值.

(7)用数学归纳法进行计算或证明.

(8)利用已知行列式进行计算,其中最重要的已知行列式是范德蒙行列式.

以上方法中,前三种是最基本的算法,应熟练掌握.

【例 1.8】 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}.$$

【解】 该行列式的每行元素之和均为 $x_1+x_2+\cdots+x_n-m$,故可把所有行加到第 1 行,提取公因子后化简得.

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1+\cdots+x_n-m & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & -m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix}$$
$$=(-m)^{n-1}(x_1+\cdots+x_n-m).$$

【点评】 类似地,常见计算题如

$$\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$ 等,均可用上述方法计算.

【例 1.9】 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ & a_2 & b_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_n & & & & a_n \end{vmatrix}.$$

【解】 本题属于“两条线的行列式”,则按第 1 列展开得

$$D_n = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & a_n \end{vmatrix} + b_n(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} b_1 & & & \\ a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= a_1 a_2 \cdots a_n + (-1)^{n+1} b_1 b_2 \cdots b_n.$$

【例 1.10】 计算 $n+1$ 阶行列式

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \quad (a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0).$$

【分析】 对于形如的所谓"三线型"行列式，可以直接利用行列式的性质化为三角或次三角行列式来计算.

【解】

$$D_{n+1} \xlongequal[\substack{\vdots \\ c_1 - \frac{1}{a_n} c_{n+1}}]{\substack{c_1 - \frac{1}{a_1} c_2 \\ c_1 - \frac{1}{a_2} c_3}} \begin{vmatrix} a_0 - \frac{1}{a_1} - \cdots - \frac{1}{a_n} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & a_1 & & & \\ & & a_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{vmatrix}$$

$$= (a_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}) \prod_{i=1}^{n} a_i.$$

【例 1.11】 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & & & \\ 1 & a+b & ab & & \\ & 1 & a+b & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & ab \\ & & & 1 & a+b \end{vmatrix}.$$

【分析】 对于形如的所谓三对角行列式，可直接展开得到两项递推关系式，然后变形进行两次递推或利用第二数学归纳法证明.

【解】 按第 1 行展开得