丛书主编／王后雄

考点

同步解读

高中数学 选修 2-1

本册主编／马春华

考点分类精讲 方法视窗导引

Kaodian Tongbu Jiedu

误区盲点预警 题型优化测训

紧扣课标，直击高考，突破难点，解析疑点，化整为零，各个击破，点线面全方位建构“同步考点”攻略平台。

由“母题”发散“子题”，理顺“一个题”与“多个题”的关系，寻找“一类题”在思维方法和解题技巧上的“共性”，通吃“千张纸，万道题”，实现知识“内化”，促成能力“迁移”。

新课标 Xinkebiao
华中师范大学出版社 Huazhong Normal University Press

丛书主编/王后雄

Kao dian
Tongbu Jiedu

考点
同步解读

高中数学 选修 2-1

本册主编/马春华

随书赠送 4 套试卷

新课标 Xinkebiao

华中师范大学出版社
Huazhong Normal University Press

新出图证(鄂)字 10 号
图书在版编目(CIP)数据

考点同步解读 高中数学 选修 2-1 / 丛书主编:王后雄 本册主编:马春华
—武汉:华中师范大学出版社,2011.6(2011.11 重印)
ISBN 978-7-5622-4929-0
Ⅰ.①考… Ⅱ.①王… Ⅲ.①数学课-高中-教学参考资料
Ⅳ.①G634
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 079763 号

考点同步解读 高中数学 选修 2-1

丛书主编:王后雄　本册主编:马春华
责任编辑:涂　庆　责任校对:程　玨　封面设计:甘　英
选题设计:华大鸿图编辑室(027-67867361)
出版发行:华中师范大学出版社 ©
社址:湖北省武汉市珞喻路 152 号
销售电话:027-67867371　027-67865356　027-67867076
传真:027-67865347　邮购:027-67861321
网址:http://www.ccnupress.com　电子信箱:hscbs@public.wh.hb.cn
印刷:湖北恒泰印务有限公司　督印:章光琼
字数:350 千字
开本:889mm×1194mm 1/16　印张:13.5
版次:2011 年 6 月第 1 版　印次:2011 年 11 月第 4 次印刷
定价:25.80 元

欢迎上网查询、购书

《考点同步解读》使用图解

课标解读

呈现新课程标准内容要素，锁定不同版本教材要求，指明学习和考试的具体目标。

学法导引

注重学法点拨和考试方法指导，揭示学习重点和难点，探讨考试命题规律。

考点例析

考点分类、核心总结，要点重点各个击破，典例创新引导，首创分类解析导解模式。

变式跟踪

案例学习迁移，母题多向发散，预测高考可考变式题型，层层剖析深入变式训练。

第一章　常用逻辑用语

1.1　命题及其关系

课标解读

1. 理解命题的概念.

(1)(★★★)了解命题的概念，会用两个条件判断一个语句是否是命题.

(2)(★★★)能正确指出已知命题的条件和结论，会

学法导引

1. 四种命题反映出命题之间的内在联系，要注意结合实际问题，理解其关系(尤其是两种等价关系)的产生过程，关于逆命题、否命题与逆否命题，也可以叙述为：

考点分类例析

考点 1　判断语句是否为命题

核心总结

我们把用语言、符号或式子表达的，可以判断真假的语句叫做命题. 其中，判断为真的语句叫做真命题，判断为假的语句叫做假命题. 形式为："若 p 则 q"，其中 p 叫命题的条件，q 叫做命题的结论.

考题 1　下列语句中是命题的有______.

①"等边三角形难道不是等腰三角形吗?"；

②"垂直于同一条直线的两条直线必平行吗?"；

③"一个数不是正数就是负数"；

④"大角所对的边大于小角所对的边"；

⑤"$x+y$ 为有理数，则 x,y 也都是有理数"；

⑥"作$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$".

【解析】　先根据命题的概念，判断是否是命题，若是，再判断真假.

①通过反意疑问句，对等边三角形是等腰三角形作出判断，是真命题.

②疑问句. 没有对垂直于同一直线的两条直线是否平行作出判断，不是命题.

【变式 1-1】. 下列语句不是命题的是(　　).

A. 地球是太阳系的行星　　B. 等腰三角形两底角相等

C. 今天会下雪吗　　D. 正方形的内角均为直角

文化·思想

…逻辑科学更需要从问题实质本身开始. 每门别的学科…并不构成一个开端，而是依靠别的概念…. 因此，可以容许这些学科使用假定的，其它的前提来作为它们的基础…，使用通常的推论方式来建立它们的一般概念和基本规定.

——(德)黑格尔《逻辑学》

这段关于逻辑学的阐述也许太过晦涩，黑格尔所表达的意思大致是：逻辑科学是从问题的本质出发，它的内容与方法往往是其它学科的基础与方法指导. 这一点在数学学科中表现得尤为突出.

题型·方法

1. 并不是任何语句都是命题，只有那些能判断真假的语句才是命题. 一般来说，开语句、疑问句、祈使句、感叹句都不是命题. 如陈述句"π 是有理数"，反意疑问句"难道矩形不是平行四边形吗?"都叫命题；而祈使句

超级链接

最佳导学模式，学案式名师点津。方法视窗、规律清单、防错档案，革新传统学习模式。

专题优化测训

学业水平测试

1. [考点 1]下列语句中不是命题的是(　　).

A. 台湾是中国的　　B. 两军相遇勇者胜

C. 学海无涯苦作舟　　D. 连接 A、B 两点

2. [考点 4]若 M、N 是两个集合，则下列命题中为真命题的是(　　).

A. 如果 $M\subseteq N$，那么 $M\cap N=M$

B. 如果 $M\cap N=N$，那么 $M\subseteq N$

C. 如果 $M\subseteq N$，那么 $M\cup N=M$

D. 如果 $M\cup N=N$，那么 $N\subseteq M$

3. [考点 2]指出下列命题中的条件 p 和结论 q.

(1)若整数 a 能被 2 整除，则 a 是偶数；

(2)若四边形是菱形，则它的对角线互相垂直且平分.

高考水平测试

一、选择题

1. [考点 4](2007·辽宁)若 m,n 是两条不同的直线，α、β、γ 是三个不同的平面，则下列命题中的真命题是(　　).

A. 若 $m\subset\beta,\alpha\perp\beta$，则 $m\perp\alpha$

B. 若 $\alpha\cap\gamma=m,\beta\cap\gamma=n,m/\!/n$，则 $\alpha/\!/\beta$

C. 若 $m\perp\beta,m/\!/\alpha$，则 $\alpha\perp\beta$

D. 若 $\alpha\perp\gamma,\alpha\perp\beta$，则 $\beta\perp\gamma$

2. [考点 3](2007·重庆)命题"若 $x^2<1$，则 $-1<x<1$"的逆否命题是(　　).

A. 若 $x^2\geqslant1$，则 $x\geqslant1$ 或 $x\leqslant-1$

B. 若 $-1<x<1$，则 $x^2<1$

C. 若 $x>1$ 或 $x<-1$，则 $x^2>1$

D. 若 $x\geqslant1$ 或 $x\leqslant-1$，则 $x^2\geqslant1$

3. [考点 4](2007·北京)对于函数① $f(x)=|x+2|$，② $f(x)=(x-2)^2$，③ $f(x)=\cos(x-2)$，判断如下两个命题的真假：

命题甲：$f(x+2)$是偶函数；

命题乙：$f(x)$在$(-\infty,2)$上是减函数，在$(2,+\infty)$上是增函数.

能使命题甲、乙均为真的所有函数的序号是(　　).

A. ①②　　B. ①③　　C. ②　　D. ③

优化测训

学业水平测试、高考水平测试，习题层级清晰，水平测试立足教材、夯实基础，高考真题再现，提升解题能力。

解题依据

首创解题线索助学模式。当你解题失误或解题缺乏思路时，解题依据教你回归考点知识和例题启示。

参考答案与提示

第一章　常用逻辑用语

1.1　命题及其关系

【变式训练】

[变式 1-1]　C　[提示：疑问句不可能是命题. 故选 C.]

[变式 1-2]　B　[提示：A、C、D 均不能判断其真假，只有 B 可判断真

【学业水平测试】

1. D　[提示：D 项是祈使句，不是命题. 故选 D.]

2. A　[提示：$M\subseteq N$，则 $M\cap N=M$. 故选 A.]

【高考水平测试】

1. C　[提示：若 $m\subset\beta,\alpha\perp\beta$，则 m 与 α 的关系可能平行也可能相交，则 A 为假命题；选项 B 中，α 与 β 可能平行也可能相交，则 B 为假命题；选项 D 中，β 与 γ 可能平行或相交(不一定垂直)，则 D 为假命题. 故选 C.]

2. D　[提示：原命题的逆否命题为"若 $x\geqslant1$ 或 $x\leqslant-1$，则 $x^2\geqslant1$". 故选 D.]

3. C　[提示：对于 ①，$f(x+2)=|x+4|$不是偶函数，∴ 命题甲为假，故排除选项 A、B. 对于③，$f(x)=\cos(x-2)$显然不是区间

答案提示

提示解题思路，突破解析模式，规范标准答案，全程帮助你对照思路、比照答案、减少失误、赢得高分。

考点同步解读　高中数学　选修 2-1

目录 CONTENTS

第一章　常用逻辑用语

1.1　命题及其关系

课标解读

1. 理解命题的概念.

(1)(★★★)了解命题的概念,会用两个条件判断一个语句是否是命题.

(2)(★★★)能正确指出已知命题的条件和结论,会将已知命题写成“若 p,则 q”的形式.

(3)(★★★)会判断一些简单命题的真假,并能掌握用举反例的方法来判断某一命题为假命题.

2. 了解“若 p,则 q”形式的命题的逆命题、否命题与逆否命题,会分析四种命题的相互关系.

(1)(★★★)了解命题的四种形式,会根据已知命题写出逆命题、否命题与逆否命题.

(2)(★★★)理解并掌握四种命题之间的关系,对给出的命题,会运用四种命题的相互关系来予以处理.

3. (★★)体会逻辑用语在表述和论证中的作用,并能自觉地将这些逻辑用语正确地用于数学学习和日常生活的交流之中.

学法导引

1. 四种命题反映出命题之间的内在联系,要注意结合实际问题,理解其关系(尤其是两种等价关系)的产生过程,关于逆命题、否命题与逆否命题,也可以叙述为:

(1)交换命题的条件和结论,所得的新命题就是原来命题的逆命题;(2)同时否定命题的条件和结论,所得的新命题就是原来的否命题;(3)交换命题的条件和结论,并且同时否定,所得的新命题就是原命题的逆否命题.

2. 学习时主要弄清四种命题之间的逻辑关系,培养判断命题真假的能力,尤其注意反证法的步骤技巧,并用它来证明某些命题. 关键是记熟这四种命题条件、结论之间的关系及真假.

考点分类例析

考点1　判断语句是否为命题

核心总结

我们把用语言、符号或式子表达的,可以判断真假的语句叫做命题. 其中,判断为真的语句叫做真命题,判断为假的语句叫做假命题. 形式为:“若 p 则 q”,其中 p 叫命题的条件,q 叫做命题的结论.

考题1　下列语句中是命题的有______.

①“等边三角形难道不是等腰三角形吗?”;

②“垂直于同一条直线的两条直线必平行吗?”;

③“一个数不是正数就是负数”;

④“大角所对的边大于小角所对的边”;

⑤“$x+y$ 为有理数,则 x,y 也都是有理数”;

⑥“作$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$”.

【解析】　先根据命题的概念,判断是否是命题,若是,再判断真假.

①通过反意疑问句,对等边三角形是等腰三角形作出判断,是真命题.

②疑问句. 没有对垂直于同一直线的两条直线是否平行作出判断,不是命题.

③是假命题. 数 0 既不是正数也不是负数.

④是假命题. 没有考虑在同一个三角形中.

⑤是假命题. 如 $x=\sqrt{3}$,$y=-\sqrt{3}$.

文化·思想

……逻辑科学更需要从问题实质本身开始. 每门别的学科……并不构成一个开端,而是依靠别的概念……因此,可以容许这些学科使用假定的,其它的前提来作为它们的基础……,使用通常的推论方式来建立它们的一般概念和基本规定.

——(德)黑格尔《逻辑学》

这段关于逻辑学的阐述也许太过晦涩,黑格尔所表达的意思大致是:逻辑科学是从问题的本质出发,它的内容与方法往往是其它学科的基础与方法指导. 这一点在数学学科中表现得尤为突出.

题型·方法

1. 并不是任何语句都是命题,只有那些能判断真假的语句才是命题. 一般来说,开语句、疑问句、祈使句、感叹句都不是命题. 如陈述句“π 是有理数”,反意疑问句“难道矩形不是平行四边形吗?”都叫命题;而祈使句

⑥祈使句.不是命题.

故填①③④⑤.

【变式 1-1】 下列语句不是命题的是(　　).

A. 地球是太阳系的行星　　B. 等腰三角形两底角相等

C. 今天会下雪吗　　D. 正方形的内角均为直角

【变式 1-2】 (2010·湛江检测)下列语句是命题的是(　　).

A. $x-1=0$　　B. $2+3=8$

C. 你会说英语吗　　D. 这是一棵大树

考点2 命题的结构

核心总结

在数学中,具有"若 p,则 q"这种形式的命题是常见的.我们把这种形式的命题中的 p 叫做命题的条件,q 叫做命题的结论.

数学中有一些命题虽然表面上不是"若 p,则 q"的形式,但是把它的表述作适当的改变,也可以写成"若 p,则 q","如果 p,那么 q","只要 p,就有 q"等形式.

考题 2 下面有五个命题:

①函数 $y=\sin^4x-\cos^4x$ 的最小正周期是 π;

②终边在 y 轴上的角的集合是 $\left\{\alpha|\alpha=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$;

③在同一坐标系中,函数 $y=\sin x$ 的图象和函数 $y=x$ 的图象有三个公共点;

④把函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$,得到 $y=3\sin2x$ 的图象;

⑤函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ 在 $[0,\pi]$ 上是减函数.

其中,真命题的序号是________.(写出所有真命题的序号)

【解析】 利用三角函数的知识,判断能否由条件推出相应结论.命题①中,$y=\sin^4x-\cos^4x=\sin^2x-\cos^2x=-\cos2x$,显然其最小正周期为 π,命题为真.

命题②中,当 $k=2m(m\in\mathbf{Z})$ 时,角 $\alpha=m\pi$,其终边在 x 轴上,命题为假.

命题③中,原点 $(0,0)$ 是两图象的公共点,

∵ 当 $x>0$ 时,$x>\sin x$ 恒成立,没有公共点.

同理,当 $x<0$ 时,也没有公共点,命题为假.

命题④中,向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 变为 $y=3\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=3\sin2x$,命题为真.

命题⑤中,$y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上为增函数,命题为假.

【答案】 ①④

【变式 2-1】 把下列命题改写成"若 p,则 q"的形式,并判断命题的真假.

(1)当 $ac>bc$ 时,$a>b$;

(2)已知 x、y 为正整数,当 $y=x+1$ 时,$y=3$,$x=2$;

(3)当 $m>\frac{1}{4}$ 时,$mx^2-x+1=0$ 无实根;

(4)当 $abc=0$ 时,$a=0$ 或 $b=0$ 或 $c=0$;

(5)当 $x^2-2x-3=0$ 时,$x=3$ 或 $x=-1$.

【变式 2-2】 将下列命题改写成"若 p,则 q"的形式,并判断命题的真假.

(1)到线段两端点距离相等的点在线段的垂直平分线上;

(2)实数的平方为正数.

"求证 $\sqrt{2}$ 是无理数",开语句"$x>3$",疑问句"π 是无理数吗?",感叹句"向抗洪英雄学习!"都不是命题.

2. 要判断一个语句是不是命题,关键是看它是否符合"可以判断真假"这个条件.

3. 判断一个语句是否是命题的步骤:

第一步:语句格式是否为陈述句或反意疑问句,只有陈述句或反意疑问句才有可能是命题,而疑问句、祈使句、感叹句等一般都不是命题.

第二步:该语句能否判断真假,语句叙述的内容是否与客观实际相符,是否符合已学过的公理、定理,必须是明确的,不能模棱两可.

题型·方法

1. 对于简缩了的数学命题,通常条件与结论都不太明显,在改写时,应先分清条件与结论,然后用清晰流畅的语句写成"若 p,则 q"的形式.

2. (1)任何一个命题都有条件和结论,一般地,条件由 p 表示,结论由 q 表示,故命题都可以写成"若 p,则 q";(2)找准条件和结论.

把一个命题改写成"若 p,则 q"的形式,首先要确定命题的条件和结论,若条件和结论比较隐含,要补充完整,有时一个条件有多个结论,有时一个结论需多个条件,还要注意有的命题改写形式也不惟一.

3. 要判断一个命题是真命题,一般需要经过严格的推理论证,在判断时,要有推理依据,有时应综合各种情况作出正确的判断.而判定一个命题为假命题,只需举出一个反例即可.

点拨·导航

1. 对于变式 2-1(1),在解答时易出现判断此命题为真命题的错误,导致此种错误的原因是不等式的性质把握不准.

2. 当有些命题用文字语言不易表达时可以改用数学语言来表述,如变式 2-2(2)可改写成"若 $a\in\mathbf{R}$,则 $a^2>0$".

考点 3 四种命题

核 心 总 结

1. 四种命题的概念

一般地，用 p 和 q 分别表示原命题的条件和结论，用 $\neg p$ 和 $\neg q$ 分别表示 p 和 q 的否定，于是四种命题的形式就是：

原命题：若 p，则 q； 逆命题：若 q，则 p； 否命题：若 $\neg p$，则 $\neg q$； 逆否命题：若 $\neg q$，则 $\neg p$.

2. 四种命题的关系

四种命题以及它们之间的关系如图 1-1-1 所示：

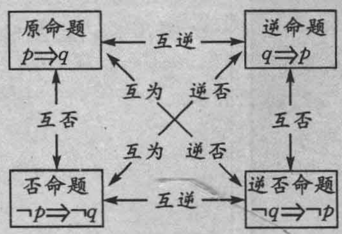


图 1-1-1

考题 3 “已知 a,b 为实数，当 $x^2+ax+b\leqslant 0$ 有非空解集时，则 $a^2-4b\geqslant 0$”. 写出该命题的逆命题和否命题，并判断其真假.

【解析】 逆命题：已知 a、b 为实数，若 $a^2-4b\geqslant 0$，则 $x^2+ax+b\leqslant 0$ 有非空解集. 此命题为真.

否命题：已知 a,b 为实数，若 $x^2+ax+b>0$ 有非空解集（或 $x^2+ax+b\leqslant 0$ 无非空解集），则 $a^2-4b<0$. 此命题为假.

考题 4 （2010·松原模拟）下列命题中正确的是（ ）.

①“若 $x^2+y^2\neq 0$，则 x,y 不全为零”的否命题；

②“正三角形都相似”的逆命题；

③“若 $m>0$，则 $x^2+x-m=0$ 有实根”的逆否命题；

④“若 $x-\sqrt{2}$ 是有理数，则 x 是无理数”的逆否命题.

A. ①②③④ B. ①③④

C. ②③④ D. ①④

【解析】 ①原命题的否命题为“若 $x^2+y^2=0$，则 x,y 全为零”. 故为真命题.

②原命题的逆命题为“若两个三角形相似，则这两个三角形是正三角形”. 故为假命题.

③原命题的逆否命题为

“若 $x^2+x-m=0$ 无实根，则 $m\leqslant 0$”.

$\because$ 方程无实根， $\therefore$ 判别式 $\Delta=1+4m<0$，

$\therefore m<-\frac{1}{4}\leqslant 0$. 故为真命题.

④原命题的逆否命题为“若 x 不是无理数，则 $x-\sqrt{2}$ 不是有理数”.

$\because x$ 不是无理数， $\therefore x$ 是有理数.

又 $\sqrt{2}$ 是无理数， $\therefore x-\sqrt{2}$ 是无理数，不是有理数. 故为真命题.

故正确的命题为①③④，故选 B.

【变式 3-1】 命题：“已知 a,b,c,d 是实数，若 $a=b$，$c=d$，则 $a+c=b+d$”. 写出该命题的逆命题、否命题、逆否命题.

误区·盲点

易错点

在改写命题时忽视命题的条件和大前提.

防错良方

改写命题时大前提不变. 如考题 3 中“a,b 为实数”是大前提，改写各种命题时大前提不变，且“$x^2+ax+b\leqslant 0$ 有非空解集”为复合条件.

点拨·导航

对于考题 4：③中条件“$m>0$”的否定易错为“$m<0$”，导致这种错误的原因是对“大于”的反面应为“等于或小于”理解不到位.

题型·方法

1. 在判断四种命题之间的关系时，首先要注意分清命题的条件与结论，再比较每个命题的条件与结论之间的关系.

2. 分析出原命题的条件和结论：(1) 交换条件和结论得逆命题；(2) 否定条件和否定结论得否命题；(3) 交换条件和结论，并且同时否定得逆否命题.

3. 判断四种命题的真假，首先要熟悉四种命题的结构，正确写出原命题的逆命题、否命题、逆否命题，其次判断真假时，要注意相关知识的综合应用.

【变式 3-2】（2010·六安模拟）有下列命题：

①面积相等的三角形是全等三角形；

②“若 $xy=0$，则 $|x|+|y|=0$”的逆命题；

③“若 $a>b$，则 $a+c>b+c$”的否命题；

④“矩形的对角线互相垂直”的逆否命题.

其中真命题的个数有（　　）.

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

考点 4　命题真假的判断

核心总结

1. 一个命题真假的判断

一个命题要么真，要么假，二者必居其一. 当一个命题改写成“若 p，则 q”的形式之后，判断这种命题真假的办法是：若由“p”经过逻辑推理得出“q”，则可判定“若 p，则 q”是真；而判定“若 p，则 q”是假，则只需举出一个反例即可.

2. 四种命题的真假性的关系

原命题	逆命题	否命题	逆否命题
真	真	真	真
真	假	假	真
假	真	真	假
假	假	假	假

由于逆命题和否命题也是互为逆否命题，因此四种命题的真假性之间有如下关系：

(1) 两个命题互为逆否命题，它们必具有相同的真假性；

(2) 两个命题为互逆命题或互否命题，它们的真假性没有必然关系.

在同一个命题的四种命题中，真命题的个数要么是 0 个，要么是 2 个，要么是 4 个.

考题 5　给出下列三个命题：

①若 $a\geqslant b>-1$，则 $\frac{a}{1+a}\geqslant\frac{b}{1+b}$；

②若正整数 m 和 n 满足 $m\leqslant n$，则 $\sqrt{m(n-m)}\leqslant\frac{n}{2}$；

③设 $P_1(x_1,y_1)$ 为圆 O_1：$x^2+y^2=9$ 上任一点，圆 O_2 以 $Q(a,b)$ 为圆心且半径为 1，当 $(a-x_1)^2+(b-y_1)^2=1$ 时，圆 O_1 与圆 O_2 相切.

其中假命题的个数为（　　）.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

【解析】①方法一：∵ $a\geqslant b>-1$，∴ $a+1\geqslant b+1>0$.

∴ $\frac{a}{1+a}-\frac{b}{1+b}=\frac{a-b}{(1+a)(1+b)}\geqslant 0$. ∴ $\frac{a}{1+a}\geqslant\frac{b}{1+b}$. 故①为真命题.

方法二：∵ $f(x)=\frac{x}{1+x}=1-\frac{1}{1+x}$ 在 $(-1,+\infty)$ 上为增函数，

∴ 当 $a\geqslant b>-1$ 时，$f(a)\geqslant f(b)$，即 $\frac{a}{1+a}\geqslant\frac{b}{1+b}$. 故①为真命题.

②因为正整数 m、n 满足 $m\leqslant n$，有 $m>0$，$n-m\geqslant 0$，

由均值不等式有 $\sqrt{m(n-m)}\leqslant\frac{m+(n-m)}{2}=\frac{n}{2}$. 故②为真命题.

③的实质是 $P_1(x_1,y_1)$ 在 $\odot O_1$ 上，又 $P_1(x_1,y_1)$ 也在 $\odot O_2$ 上，但两圆相交于 P_1 并不能保证两圆相切. 故③为假命题.

故选 B.

题型·方法

1. 命题真假判断的常用方法：

(1) 判断命题的真假，可先写出命题，分清条件与结论，直接判断.

(2) 如果不易判断，可根据互为逆否命题的两个命题是等价命题来判断.

2. 运用定义法可直接判断命题是否符合定义形式，从而判断真假；逻辑推证法既可用来判定命题为真，也可用来判定命题为假；而举反例则是判定一个命题为假的最简单有效的办法. 考题 5 中对①的两种判定方法均属逻辑推证，③是指出其逻辑推证的错误，当然也可以举反例.

3. 在判断命题真假时，利用原命题与逆否命题、逆命题与否命题同真同假，可取得事半功倍的效果. 尤其对含有否定意义的命题，转化为逆否命题进行判断会更容易.

考题 6 （2006·辽宁）给出下列四个命题：

①垂直于同一直线的两条直线互相平行；

②垂直于同一平面的两个平面互相平行；

③若直线 l_1、l_2 与同一平面所成的角相等，则 l_1、l_2 互相平行；

④若直线 l_1、l_2 是异面直线，则与 l_1、l_2 都相交的两条直线是异面直线.

其中假命题的个数是（　　）.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【解析】 由异面直线的公垂线知①假；垂直于同一个平面的两个平面也可以相交，②假；设直线 l_1 交平面 α 于点 P，过点 P 作平面 α 的垂线 l，l_1 关于 l 的对称直线为 l_2，l_1、l_2 与 α 所成的角相等，但 $l_1\cap l_2=P$，③假；过异面直线公垂线上一点的直线可与两异面直线都相交，④假.

故选 D.

【变式 4-1】 判断命题"若 $a\geqslant 0$，则 $x^2+x-a=0$ 有实根"的逆否命题的真假.

【变式 4-2】 （2010·杭州模拟）下列四个命题中：

①"等边三角形的三个内角均为 60°"的逆命题；

②"若 $k>0$，则方程 $x^2+2x-k=0$ 有实根"的逆否命题；

③"全等三角形的面积相等"的否命题；

④"若 $ab\neq 0$，则 $a\neq 0$"的否命题.

其中真命题的个数是（　　）.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

考点 5　命题的证明

核心总结

1. 直接证明某一个命题为真命题有困难时，可以通过证明它的逆否命题为真命题，从而间接地证明原命题为真命题.

2. 间接证明方法：（1）反证法；（2）逆否证法.

考题 7 证明：已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数，$a,b\in\mathbf{R}$，若 $f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$，则 $a+b\geqslant 0$.

【解析】 **方法一**（逆否证法）：原命题的逆否命题为"已知函数 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的增函数，$a,b\in\mathbf{R}$，若 $a+b<0$，则 $f(a)+f(b)<f(-a)+f(-b)$."

若 $a+b<0$，则 $a<-b$，$b<-a$，

又∵ $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数，

∴ $f(a)<f(-b)$，$f(b)<f(-a)$.

梳理·归纳

1. 反证法与逆否证法：

(1)反证法的步骤

①假设命题的结论不成立，即假设结论的反面成立；

②从这个假设出发，经过推理论证，得出矛盾；

③由矛盾判定假设不成立，从而肯定命题的结论成立.

(2)反证法导出结果的几种情况：

①导出非 p 为真，即与原命题的条件矛盾；

$\therefore f(a)+f(b)<f(-a)+f(-b)$，即逆否命题为真命题.
$\therefore$ 原命题为真命题.
方法二(反证法)：假设 $a+b<0$，则 $a<-b,b<-a$，
又$\because f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上是增函数，
$\therefore f(a)<f(-b)$，$f(b)<f(-a)$.
$\therefore f(a)+f(b)<f(-a)+f(-b)$.
这与已知条件 $f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$相矛盾.
因此假设不成立，故 $a+b\geqslant 0$.

考题 8 若 $a^2+b^2=c^2$，则 a,b,c 不可能都是奇数.
【证明】 假设 a,b,c 都是奇数.
设 $a=2m-1,b=2n-1,c=2k-1,m,n,k\in\mathbf{Z}$，
则 $a^2+b^2=(2m-1)^2+(2n-1)^2=2(2m^2+2n^2-2m-2n+1)$为偶数，
而 $c^2=(2k-1)^2=4(k^2-k)+1$ 为奇数，
$\therefore a^2+b^2\neq c^2$. 这与题设 $a^2+b^2=c^2$ 矛盾.
$\therefore a,b,c$ 不可能都是奇数.

【变式 5-1】 (2006·上海)在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 与曲线 $y^2=2x$ 相交于 A、B 两点.
(1)求证："如果直线 l 过点 $T(3,0)$，那么$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3$"是真命题；
(2)写出(1)中命题的逆命题，判断它是真命题还是假命题，并说明理由.

【变式 5-2】 证明：若 $x^2+y^2=0$，则 $x=y=0$.

②导出 q 为真，即与假设"非 q 为真"矛盾；
③导出一个恒假命题，即与定义、公理、定理矛盾；
④导出自相矛盾的命题.

(3)逆否证法：我们知道原命题与其逆否命题是等价的，因此当我们证明或判断原命题感到困难时，可考虑证它的逆否命题，这样也可达到证明原命题的目的，这种证法叫做逆否证法.

2. 反证法与逆否证法的联系：(1)依据相同. 都是利用原命题与其逆否命题的等价性；(2)起步相同. 都是从"$\neg q$"(即否定结论)出发(入手)；(3)思想相同. 都是"正难则反"思想的具体体现.

3. 反证法与逆否证法的区别：(1)目的不同. 反证法否定结论的目的是推出矛盾，而逆否证法否定结论的目的是推出"$\neg p$"(即否定条件)；(2)本质不同. 逆否证法实质是证明一个新命题(逆否命题)成立，而反证法是把否定的结论作为新的条件连同原有的条件进行逻辑推理，直至推出矛盾，从而肯定原命题的结论.

点拨·导航

1. 值得注意的是当命题结论的反面有多种情况时要分类讨论. 而对于结论中出现"至多"、"至少"、"全都"、"唯一"等字眼时，经常采用反证法来证明.

2. 对考题 7

(1)方法一：$\boxed{\text{根据原命题}}\rightarrow\boxed{\text{写出逆否命题}}\rightarrow\boxed{\text{判断逆否命题真假}}\rightarrow\boxed{\text{得原命题真假}}$

方法二：$\boxed{\text{假设原命题不成立}}\rightarrow\boxed{\text{否定后的结论作已知条件}}\rightarrow\boxed{\text{推出矛盾}}\rightarrow\boxed{\text{假设错误，原命题正确}}$

(2)误区分析：在解答本题的过程中很容易把逆否命题证法和反证法混淆，导致这种错误的原因是忽视了这两种证法的本质区别.

专题优化测训

学业水平测试

1. [考点 1]下列语句中不是命题的是(　　).

A. 台湾是中国的　　B. 两军相遇勇者胜

C. 学海无涯苦作舟　　D. 连接 A、B 两点

2. [考点 4]若 M、N 是两个集合，则下列命题中为真命题的是(　　).

A. 如果 $M\subseteq N$，那么 $M\cap N=M$

B. 如果 $M\cap N=N$，那么 $M\subseteq N$

C. 如果 $M\subseteq N$，那么 $M\cup N=M$

D. 如果 $M\cup N=N$，那么 $N\subseteq M$

3. [考点 2]指出下列命题中的条件 p 和结论 q.

(1)若整数 a 能被 2 整除，则 a 是偶数；

(2)若四边形是菱形，则它的对角线互相垂直且平分.

4. [考点 2]将下列命题改写成"若 p，则 q"的形式.

(1)等腰三角形的两腰中线相等；

(2)垂直于同一平面的两平面平行.

5. [考点 4]判断下列命题的真假.

(1)能被 6 整除的数一定能被 3 整除；

(2)二次函数的图象一定是抛物线.

6. [考点 3]写出下列命题的否命题.

(1)若 $a>b$，则 $a-2>b-2$；

(2)到圆心的距离等于半径的点在圆上.

高考水平测试

一、选择题

1. [考点 4](2007・辽宁)若 m,n 是两条不同的直线，α、β、γ 是三个不同的平面，则下列命题中的真命题是(　　).

A. 若 $m\subset\beta$，$\alpha\perp\beta$，则 $m\perp\alpha$

B. 若 $\alpha\cap\gamma=m$，$\beta\cap\gamma=n$，$m/\!/n$，则 $\alpha/\!/\beta$

C. 若 $m\perp\beta$，$m/\!/\alpha$，则 $\alpha\perp\beta$

D. 若 $\alpha\perp\gamma$，$\alpha\perp\beta$，则 $\beta\perp\gamma$

2. [考点 3](2007・重庆)命题"若 $x^2<1$，则 $-1<x<1$"的逆否命题是(　　).

A. 若 $x^2\geqslant1$，则 $x\geqslant1$ 或 $x\leqslant-1$

B. 若 $-1<x<1$，则 $x^2<1$

C. 若 $x>1$ 或 $x<-1$，则 $x^2>1$

D. 若 $x\geqslant1$ 或 $x\leqslant-1$，则 $x^2\geqslant1$

3. [考点 4](2007・北京)对于函数①$f(x)=|x+2|$，②$f(x)=(x-2)^2$，③$f(x)=\cos(x-2)$，判断如下两个命题的真假：

命题甲：$f(x+2)$是偶函数；

命题乙：$f(x)$在$(-\infty,2)$上是减函数，在$(2,+\infty)$上是增函数.

能使命题甲、乙均为真的所有函数的序号是(　　).

A. ①②　　B. ①③　　C. ②　　D. ③

4. [考点 2、3、4](2008・山东)给出命题：若函数 $y=f(x)$ 是幂函数，则函数 $y=f(x)$ 的图象不过第四象限. 在它的逆命题、否命题、逆否命题三个命题中，真命题的个数是(　　).

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

5. [考点 3、4](2008・广东)命题"若函数 $f(x)=\log_a x(a>0,$

$a\neq1$)在其定义域内是减函数,则 $\log_a 2<0$”的逆否命题是(　　).

A. 若 $\log_a 2<0$,则函数 $f(x)=\log_a x(a>0,a\neq1)$ 在其定义域内不是减函数

B. 若 $\log_a 2\geqslant0$,则函数 $f(x)=\log_a x(a>0,a\neq1)$ 在其定义域内不是减函数

C. 若 $\log_a 2<0$,则函数 $f(x)=\log_a x(a>0,a\neq1)$ 在其定义域内是减函数

D. 若 $\log_a 2\geqslant0$,则函数 $f(x)=\log_a x(a>0,a\neq1)$ 在其定义域内是减函数

6. [考点 3、4]命题“若方程 $ax^2-bx+c=0$ 两根均大于 0,则 $ac>0$”的一个等价命题是(　　).

A. 若 $ac>0$,则方程 $ax^2-bx+c=0$ 的两根均大于 0

B. 若方程 $ax^2-bx+c=0$ 的两根均不大于 0,则 $ac\leqslant0$

C. 若 $ac\leqslant0$,则方程 $ax^2-bx+c=0$ 的两根均不大于 0

D. 若 $ac\leqslant0$,则方程 $ax^2-bx+c=0$ 的两根不全大于 0

7. [考点 4](2010・湖南株洲)平面 α 与平面 β 外有一条直线 m,如果 m 在 α 与 β 内的射影分别是直线 m_1 和直线 m_2,给出下列四个命题:

①$m_1/\!/m_2\Rightarrow\alpha/\!/\beta$;②$\alpha/\!/\beta\Rightarrow m_1/\!/m_2$;

③$\alpha\perp\beta\Rightarrow m_1\perp m_2$;④$\alpha$ 与 β 相交 $\Rightarrow m_1$ 与 m_2 相交.

其中正确的命题个数是(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

8. [考点 4](2010・广西梧州)下列四个命题中的真命题为(　　).

A. 若 $\sin A=\sin B$,则 $\angle A=\angle B$

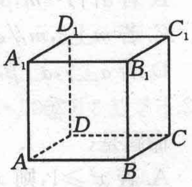
B. 若 $\lg x^2=0$,则 $x=1$

C. 若 $a>b$,且 $ab>0$,则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

D. 若 $b^2=ac$,则 a,b,c 成等比数列

二、填空题

9. [考点 4](2006・山东)下列四个命题中,真命题的序号有________.(写出所有真命题的序号)



第 9 题图

①将函数 $y=|x+1|$ 的图象按向量 $v=(-1,0)$ 平移,得到的图象对应的函数表达式为 $y=|x|$;

②圆 $x^2+y^2+4x+2y+1=0$ 与直线 $y=\frac{1}{2}x$ 相交,所得弦长为 2;

③若 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}$,$\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{3}$,则 $\tan\alpha\cot\beta=5$;

④如图,已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$,P 为底面 $ABCD$ 内一动点,P 到平面 AA_1D_1D 的距离与到直线 CC_1 的距离相等,则 P 点的轨迹是抛物线的一部分.

10. [考点 3](2006・山东)给出命题:“已知 a,b,c,d 是实数,若 $a\neq b$ 且 $c\neq d$,则 $a+c\neq b+d$”. 对原命题、逆命题、否命题、逆否命题而言,其中真命题的个数为________.

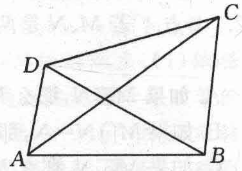
11. [考点 4]下列命题中:①$5\leqslant4$;②有两个角是 45° 的三角形是等腰直角三角形;③方程 $x^2+1=0$ 没有实数根;④若 a,b 是实数,则 $|a|+|b|\geqslant0$,其中真命题的序号为________.

12. [考点 4](2007・上海)对于非零实数 a,b,以下四个命题都成立:

①$a+\frac{1}{a}\neq0$;②$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;③若 $|a|=|b|$,则 $a=\pm b$;④若 $a^2=ab$,则 $a=b$. 那么,对于非零复数 a,b,仍然成立的命题的所有序号是________.

三、解答题

13. [考点 5]如图所示,在四边形 $ABCD$ 中,若 $AB+BD<AC+CD$,则 $AB<AC$.



第 13 题图

14. [考点 3、4]判断下列命题的真假:

(1)对角线不相等的四边形不是等腰梯形;

(2)若 $x\notin A\cap B$,则 $x\notin A$ 且 $x\notin B$;

(3)若 $x^2+y^2\neq0$,则 $xy\neq0$;

(4)若 $x\neq y$ 或 $x\neq-y$,则 $|x|\neq|y|$.

15. [考点 5](1) 已知 p_1、p_2、q_1、$q_2\in\mathbf{R}$,且 $p_1p_2=2(q_1+q_2)$. 求证:方程 $x^2+p_1x+q_1=0$ 和 $x^2+p_2x+q_2=0$ 中,至少有一个方程有实根.

(2) 求证:在一个平面内,过直线 l 外一点 P 只能作出一条直线垂直于 l.

高考真题赏析

1. (2010年天津高考题)命题“若 $f(x)$ 是奇函数,则 $f(-x)$ 是奇函数”的否命题是(　　).

A. 若 $f(x)$ 是偶函数,则 $f(-x)$ 是偶函数

B. 若 $f(x)$ 不是奇函数,则 $f(-x)$ 不是奇函数

C. 若 $f(-x)$ 是奇函数,则 $f(x)$ 是奇函数

D. 若 $f(-x)$ 不是奇函数,则 $f(x)$ 不是奇函数

【解析】 由否命题的概念既否条件又否结论,故选 B.

【答案】 B

2. (2009年重庆高考题)命题“若一个数是负数,则它的平方是正数”的逆命题是(　　).

A.“若一个数是负数,则它的平方不是正数”

B.“若一个数的平方是正数,则它是负数”

C.“若一个数不是负数,则它的平方不是正数”

D.“若一个数的平方不是正数,则它不是负数”

【解析】 由逆命题的概念知只需将结论与条件互换位置即可,故选 B.

【答案】 B

3. (2009年江西高考题)下列命题是真命题的为(　　).

A. 若 $\frac{1}{x}=\frac{1}{y}$ 则 $x=y$

B. 若 $x^2=1$ 则 $x=1$

C. 若 $x=y$ 则 $\sqrt{x}=\sqrt{y}$

D. 若 $x<y$ 则 $x^2<y^2$

【解析】 $\frac{1}{x}=\frac{1}{y}$ 等式两边同乘以 xy,得 $x=y$. 故选 A.

【答案】 A

4. (2010年福建高考题)设非空集合 $S=\{x|m\leqslant x\leqslant l\}$ 满足:当 $x\in S$ 时,有 $x^2\in S$. 给出如下三个命题:①若 $m=1$,则 $S=\{1\}$;②若 $m=-\frac{1}{2}$,则 $\frac{1}{4}\leqslant l\leqslant 1$;③若 $l=\frac{1}{2}$,则 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant m\leqslant 0$. 其中正确命题的个数是(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

【解析】 由题意得,当 $m\leqslant x\leqslant l$ 时,$m\leqslant x^2\leqslant l$,在直角坐标系中画出 $y=x^2$ 的图象,

①若 $m=1$,由于 $y=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数,则 $l=1$,因此 $S=\{1\}$;

②若 $m=-\frac{1}{2}$,则 $l>0$,否则不符合题目条件,此时 $x^2\in[0,t]$,其中 $t=\max\left\{\frac{1}{4},l^2\right\}$,

由于 $[0,t]\subseteq\left[-\frac{1}{2},l\right]$, ∴ $\frac{1}{4}\leqslant l\leqslant 1$;

③若 $l=\frac{1}{2}$,则 $m\leqslant 0$(否则 $m>0$,由 $y=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数,$x^2\in\left[m^2,\frac{1}{4}\right]\subseteq\left[m,\frac{1}{2}\right]$,

∴ $m\leqslant m^2$, ∴ $m\geqslant 1$,矛盾,此时 $x^2\in[0,t]$,

其中 $t=\max\left\{\frac{1}{2},m^2\right\}$,由于 $[0,t]\subseteq\left[m,\frac{1}{2}\right]$,

∴ $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant m\leqslant 0$;

于是,正确的命题有 3 个. 故选 D.

【答案】 D

1.2 充分条件与必要条件

课标解读

1. 理解必要条件、充分条件与充要条件的意义.

(1)(★★★)初步理解充分条件、必要条件、充分必要条件等概念,并能从逻辑关系和集合间的关系上进行理解.

(2)(★★★★)了解命题 A 与命题 B 的条件关系的四类情况,会判断两命题的条件关系属充分不必要条件、必要不充分条件、充要条件、既不充分又不必要条件中的哪一种.

2.(★★★)进一步体会逻辑用语在日常生活中的重要作用,并会用充分条件、必要条件及充要条件来处理具体数学问题.

学法导引

1. 本讲重点是充分条件和必要条件的概念. 难点是对充分条件和必要条件概念的理解. 充分条件和必要条件是高考必考内容之一.

2. 在本讲的学习中,重点是关注判断充分必要条件的问题,或利用已知关系探求参数的取值范围的问题. 对于充要条件的证明,关键是分清命题的条件和结论,分清哪是充分性和哪是必要性的问题.

考点分类例析

考点1 充分条件和必要条件的判定

核心总结

"若 p,则 q"为真命题,记作 $p\Rightarrow q$. 并且说 p 是 q 的充分条件,q 是 p 的必要条件.

考题1 给出下列命题:

(1) p: $x-2=0$; q: $(x-2)(x-3)=0$.

(2) p:两个三角形相似;q:两个三角形全等.

(3) p: $m<-2$; q:方程 $x^2-x-m=0$ 无实根.

(4) p:一个四边形是矩形;q:四边形的对角线相等.

(5) p: $\theta=\frac{2\pi}{3}$; q: $\tan\theta=2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$.

(6) p: $\log_{\frac{1}{2}}(|x|-3)>0$; q: $x^2-\frac{5}{6}x-\frac{1}{6}>0$.

指出 p 是 q 的什么条件.

【解析】 首先分清条件和结论,然后搞清楚前者能否推出后者,后者能否推出前者.

(1) ∵ $x-2=0\Rightarrow(x-2)(x-3)=0$,而 $(x-2)(x-3)=0\nRightarrow x-2=0$,

∴ p 是 q 的充分不必要条件.

(2) ∵ 两个三角形相似$\nRightarrow$两个三角形全等,

而两个三角形全等$\Rightarrow$两个三角形相似,

∴ p 是 q 的必要不充分条件.

(3) ∵ $m<-2\Rightarrow$方程 $x^2-x-m=0$ 无实根,

而方程 $x^2-x-m=0$ 无实根$\nRightarrow m<-2$,

∴ p 是 q 的充分不必要条件.

梳理·归纳

1. 判断一个具体问题中的条件与结论之间的充分与必要的关系,要注意以下几点:①确定条件是什么,结论是什么;②要尝试从条件推结论,又从结论推条件,然后再作出判断.

2. (1)判断 p 是 q 的什么条件,关键是看 p 能否推出 q,q 能否推出 p.

(2)若对于"$p\Rightarrow q$"是否成立不能判断或不好处理,则可看它的逆否命题是否成立.

(3)否定一个结论时,只需举一个反例即可.

题型·方法

判断充分条件、必要条件的常用方法:

1. 定义法:判断 B 是 A 的什么条件,实际上就是判断 $B\Rightarrow A$ 或 $A\Rightarrow B$ 是否成立,只要把题目中所给条件按逻辑关系画出箭头示意图,再利用定义即可判断.

2. 转换法:当所给命题的充要条件不易判定时,可对命题进行等价转换,例如改用其逆否命题进行判断.

3. 集合法:对命题的条件和结论间的关