修訂版

工程數學

編著者■賴漢卿・鄭國揚

新學識文教出版中心
工專用書編輯委員會 編行

工 程 數 學

執筆者■ 賴漢卿・鄭國揚

編輯者■ 新學識文教出版中心
工專用書編輯委員會

●科技爲現代學術中心。

●工業爲國家圖存利器。

●工科大專爲科技與工業的接點；

●教學同仁于此接點散發無限光、熱！

●教材則爲發射光、熱的『能源』。

願 工科大專教學同仁更多、更廣泛的參與我們合作編著、出版的行列：

「協力開發『能源』，

「光探學術遠景」

「照亮國家前途！

新學識文教出版中心
工專用書編輯委員會 謹啓

行政院新聞局出版事業登記證

■局版臺業字第0980號■

工程數學

■執筆者：賴漢卿・鄭國揚

■發行人兼主編：李 畊

■出版者：新學識文教出版中心

台北市新中街10巷7號
郵撥帳號：109262
電話：7656502，7656992

■特約經銷處：
台北・力行書局（重慶南路Ⅰ）
台中・大學書社（文華路73號）
台南・東華書局（博愛路72號）
高雄・超大書城（地下街一層）

■校勘者：賴漢卿・鄭國揚・胡海旭

■印刷所：新學識文教出版中心

中華民國69年4月3版

基價 4元5角

關于
新學識文教出版中心

由大專校、敎、所長
科系主任及專家學者
百餘人所聯組、具有
作者、讀者、出版者
綜合特質的文敎單位

● 組合性質

開 發 心 智 能 源
創 造 出 版 成 果
分 享 讀 者 作 者

● 共同理想

全面推行科學中化
促進國家學術獨立
提高國民精神所得

● 一致行動

编辑大意

- 本書依據65（6）年教育部公布五（二）年制工業專科學校課程標準而編輯。全書以數學原理、原則爲經，以電子、電機、機械、化工、土木等科實際需要爲緯，在謹嚴的數學形式要求下，處處以工專學生理解能力爲基礎，注意思路轉折處之闡釋，務使讀者具有正確的演算能力。

- 定理、公式的導證，雖有其一定重要性，但對工專學生言并不盡然，故本書于正篇中寧願強調理解概念的秩序與推繹，及解題、演算能力的培養。惟爲滿足具有導證興趣者的需要，仍擇其具有代表性者，詳誌于附錄之中，以便參考。

- 本書所論雖非工程專業範疇，但講述的均爲工程上所會使用到的數學。爲了充分發揮有限教學時間的功能，在教材的講解與例題、習題的選擇上，均特別注意其于工程上所具有的實用性與發展性。——因此，類如向量在物理與幾何上的應用，Laplace 變換的各層次運用，及Fourier 級數在波形方面的分析等。本書均有特別精到的闡釋，與令人叫絕的趣例。

- 計算機在工程上的應用價值日見重要而普遍，本書對數值分析亦予淺近而有趣的論列，雖初次教學，定亦毫無困難。

- 本書另備教學手冊供教師參考，倘發現有遺漏紕誤之處，當尤盼隨時示教、討論。

賴漢卿・鄭國揚 謹識

于清大數學研究所・算策研究所

目　録

1

一階常微分方程式

絕大部份的工程以及物理現象的科學問題，用數學分析法表示時，通常會導致產生常微分方程式或者偏微分方程式。反過來說，微分方程式是一種數學的工具，用來說明自然界許多現象所遵行的規律。——本章及下一章將討論一階及二階常微分方程式的解法，在介紹這些解法之前，希望讀者注意下列幾點：

(1)在許多情況下，微分方程式的解並不具完整形式，亦即無法表示成自變數的函數，在這種情況下，通常可以用數值的方法（將在第七章中討論）加以分析，並藉助於電子計算機的程式來計算，以求得更精確的近似解。

(2)常微分方程式的解法甚多，在某些工程的應用中，尤其是電網路的分析，通常是用Laplace 變換法（將在第四章中討論），因為電網路分析的問題，所導出的微分方程式都具有完整形式的解，用Laplace 變換法可以簡化運算的工作。

(3)既然常微分方程式的解有時具有完整的形式，有時卻又不具完整的形式，為什麼我們還要學習第一章和第二章裏所介紹的常微分方程式的各種解法呢？在這二章中，我們所要強調的一點是：何謂微分方程式的解，藉着解的意義，我們可以更深入地瞭解整個問題，並解釋各種不同情況的現象，因此瞭解了這一層的意義，我們就可以**掌握住常微分方程式**所代表的科學問題。

1-1　微分方程式的解

二個變數 x ，y 和一個任意的常數 c 所組成的方程式

$$(1.1)\qquad F(x, y, c)=0$$

的圖形表示隨常數 c 之值而改變的一群曲線，(1.1)式中變數 y 為 x 的隱函數，因此若對曲線群的任一曲線微分，就得到下式

$$(1.2)\qquad F_x(x, y, c)+F_y(x, y, c)\frac{dy}{dx}=0$$

用(1.1)和(1.2)兩式將任意常數 c 消去，就可以得到一個以 $x, y, dy/dx$ 為變數的方程式

$$(1.3)\qquad f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0$$

這樣的方程式，是代表曲線群中任一曲線所共有之性質，與常數 c 的值無關，叫做微分方程式，因此微分方程式是描述具有相同性質之曲線群的運行規律。同樣的道理，對於任意二個常數所構成的方程式，則可以再繼續對(1.2)式微分，然後消去這二個任意常數（此時由三個方程式，可消去二個常數），就可得到以 $x, y, dy/dx, d^2y/dx^2$ 為變數來描述具有二個任意常數之函數群的微分方程式。

【例題1】 試消去下面二個圓群的任意常數 c 以及任意常數 a 和 b 。

(i)　$(x-c)^2+y^2=1$ ……………………①

(ii)　$(x-a)^2+(y-b)^2=1$ ……………………②

(解) (i) ①式等號兩端對 x 微分得

$$2(x-c)+2yy'=0$$

所以　$x-c=-yy'$

將 c 代入①就得　$y^2(1+y'^2)=1$ ……………………③

①表示一圓群，這些圓群的圓心在 x 軸上而半徑為 1 ，它們有一共同的性質(參照圖 1.1)：設通過圓上任意點 P 之切線 L 與 X 軸的交點為 B ，P 到 X 軸的垂足為 A ，則 $\overline{PA}$ 為 A 到圓心 C 的距離與 $\overline{AB}$ 的等比中項，如圖上所示，即是 $\overline{PA}^2=\overline{CA}\cdot\overline{AB}$ ，這項關係和 $PA^2+CA^2=1$ 聯立，表現成 x, y, y' 的方程

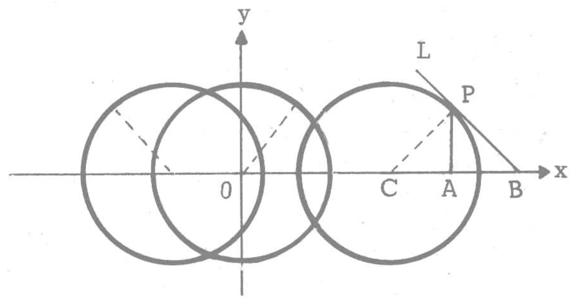

圖1・1

式就是③式，因此③式這個微分方程式表示以X軸上的點爲圓心，半徑爲1之圓群所共有的性質。

(ii)　對②分別微分一次及二次得到

$$(x-a)+(y-b)y'=0$$

$$1+y'^2+(y-b)y''=0$$

上二式的 $x-a$ 和 $y-b$ 可以寫成

$$x-a=\frac{y'(1+y'^2)}{y''}\ ,\qquad y-b=-\frac{1+y'^2}{y''}$$

將這二式代入②就得到

$$\frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}=1 \qquad \text{或者}\quad y''^2=(1+y'^2)^3 \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

②式代表平面上以任意點 (a,b) 爲圓心，取半徑等於1的圓群，它們具有一共同的特性，即在這圓群裏的任一圓，其曲率半徑等於1，④式就是表示曲率半徑等於1的方程式，因此④式就是代表此類圓群（圓心在平面上任一點，半徑等於1）的微分方程式。

一般而言，二個變數 x, y 和 n 個常數 $c_1, c_2, \cdots\cdots, c_n$ 所組成的函數群

$$(1.4)\qquad F(x, y, c_1, c_2, \cdots, c_n)=0$$

作 n 次微分可得 n 個聯立方程式，因而可以求出 c_i，$i=1, 2, \cdots, n$，這些 c_i 都是 x 和 y 的函數，然後代入(1.4)式就可以將常數 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 消去，而求得代表(1.4)式之函數群的微分方程式爲

$$(1.5)\qquad f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots, \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0$$

至於含有三個變數 x, y, z 和二個常數 c_1, c_2 所組成的函數群

$$F(x, y, z, c_1, c_2)=0$$

其中 z 爲變數 x 和 y 的隱函數，則對 x 和 y 作偏微分便得二個方程式，和上式合起來將常數 c_1 和 c_2 消去就可以得到如下的偏微分方程式

$$(1.6) \qquad f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$$

若考慮三個變數 x，y，z 和一個常數 c 所組成的函數群

$$F(x, y, z, c)=0$$

則作兩邊的微分得

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0$$

從上二式將常數 c 消去後，可以得到下面的全微分方程式

$$(1.7) \qquad P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0$$

綜合上面所述，若一方程式中含有函數或微分形者，則稱此方程式爲**微分方程式**，如(1.3)和(1.5)式等僅由普通的導函數所構成的方程式，稱爲常微分方程式，像(1.6)式含有偏導函數的方程式，稱爲**偏微分方程式**，至於(1.7)式的方程式，則稱爲**全微分方程式**。

一般微分方程式中含有一個最高階的微分項，我們就以這項微分式的階數來稱呼**微分方程式的階數**，例如(1.3)式最高階的微分項是一階，就稱爲一階常微分方程式，(1.5)式因最高次的微分項是n階，就稱爲n階常微分方程式，(1.6)式稱爲一階偏微分方程式。

微分方程式是描述曲線函數群之特性的關係式，而這種曲線函數群是自然界的運行規律，所以微分方程式是用來描述物理現象之運行規律的關係式，舉例來說，牛頓第二運動定律說：物體的運動加速度和外力成正比，其加速度的方向是和外力作用的方向一致。讓我們用m表示沿一條直線運動的物體的質量，坐標取位移 x(t) 和時間 t，f(t) 代表在時刻 t，作用於該物體的外力，那麼物體在直線上的運動可用下 里二階常微分方程式來表示。

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=f(t)$$

一般來說，微分方程式**解的形式**是以變數的隱函數來表示其關係式，並且這個關係式絕不含有隱函數的微分項，這個隱函數的關係式代入原微分方程式是恒等滿足的，我們所要探討之微分方程式的解，就是具有這種形式的解。

n 階常微分方程式是描述含有n 個任意常數的函數群，這些函數的集合就構

成了它的一般解，所以微分方程式的**一般解**(general solution)是含有和階數相等個數之常數的函數群。**特殊解**(Particular solution)是在一般解中，給予某種特定常數值的微分方程式之解。用〔例題1〕來說明它們的意義：①式即爲微分方程式③的一般解，而取 $c=0$ 時，$x^2+y^2=1$ 即爲③式的特殊解，同理，②式爲微分方程式④的一般解，而取 $a=1$ 和 $b=2$ 時，$(x-1)^2+(y-2)^2=1$ 爲④的特殊解。

但是我們又發現一項事實，那就是 $y=\pm 1$ 也滿足③式，但這樣的直線方程式是無法從①式給定一個常數值之特殊解中獲得，這種解，我們稱之爲**奇異解**(singular solution)。因此微分方程式的解包含有一般解和奇異解。

雖然大部份的微分方程式是很難求得解，但是某些微分方程式可以經過轉換而變成能用不定積分的形式來表示，這樣的解法，稱爲**求積法**。

含有二個變數 x, y之微分方程式的一般解，可以用平面上的曲綫群來描述，每一條曲線就稱爲微分方程式的**解曲線**。

通常一階常微分方程式可以表示爲

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

參照圖1.2，設這個微分方程式之解曲線上任一點爲 $p(x,y)$，則通過該點的斜率爲 $f(x,y)$；反過來說，這種斜率函數所決定出來的曲線群，就是上面這個一階常微分方程式的一般解。圖1-2表示例題1的微分方程式用 y' 表示爲

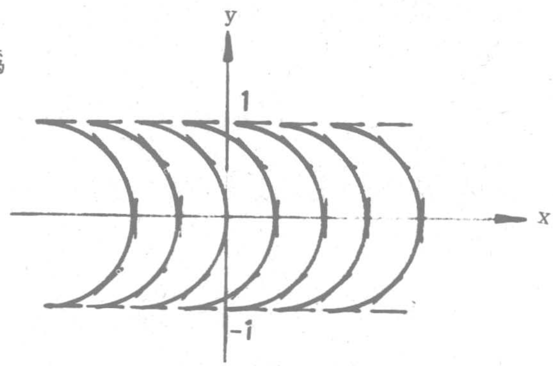

圖1・2

$$y'=\frac{-\sqrt{1-y^2}}{y}$$

是解曲線上之斜率分佈狀態的函數。

一階常微分方程式的一般解是解曲線 $F(x,y,c)=0$，若給了下面的條件：

"當 $x=x_0$ 時，必需滿足 $y=y_0$"

則這個條件相當於 $F(x_0,y_0,c)=0$，因此常數 c 可以解出而得到微分方程式

的一個特殊解，這種條件稱爲**初期值條件**，因此初期值條件給定後，在解曲線裏通過(x_0, y_0)的那一條曲線，就是初期值問題的解。二階常微分方程式的一般解含有二個任意常數，因此需給定二種條件分別爲

"當 $x=x_0$ 時，$y=y_0$ ，及 $x=x_1$ 時，$y=y_1$ "

" 在 $x=x_0$ ，$y=y_0$ 時，必需滿足 $y'=y_0'$ "

高階的微分方程式給定條件時，也是同樣的情形，對於第一種形態的條件，稱爲**邊界條件**或境界條件。第二種形態的條件是屬於初期值條件，因爲所有給定的條件都在一個起始點之故。

最後我們討論與曲線群相交的一種曲線如下圖 1-3所示，稱爲交角截曲線。若一曲線與曲線群 $F(x,y,c)=0$ 的各曲線之交角爲 θ ，則此曲綫稱爲 **θ 交角截曲線**，若 $\theta=90°$ ，則稱爲**正交截曲線**。此處所謂兩曲綫的交角是在曲綫之交點分別作二曲綫之切綫，由此二切綫所成之夾角。

【例題2】 由曲線群 $F(x,y,c)=0$ 消去常數c後，所得到的常微分方程式爲 $f(x,y,y')=0$ ，試證明若 $m=\tan\theta$ ，則 θ 交角截曲線的微分方程式爲

$$f\left(x,y,\frac{y'-m}{1+my'}\right)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

若交角是 90°，則正交截曲線的微分方程式爲

$$f\left(x,y,-\frac{1}{y'}\right)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

(證) 令 θ 交角截曲線的方程式爲 $Y=Y(X)$ ，它和曲線群 $F(x,y,c)=0$ 的一條曲線相交在點 $P(x,y)$ ，因此 $x=X$, $y=Y$ 。通過此P點在二條曲線上的切線斜率分別爲 dy/dx 和 dY/dX ，其交角爲 θ ，則由三角公式得

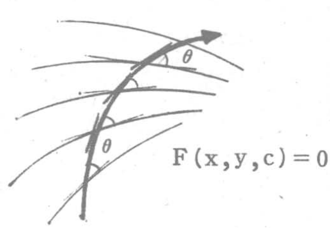

圖 1．3

$$m=\tan\theta=\frac{\frac{dY}{dX}-\frac{dy}{dx}}{1+\frac{dY}{dX}\frac{dy}{dx}}$$

於是解得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dY}{dX}-m}{1+m\frac{dY}{dX}}$$

代入 $f(x,y,y')=0$ 中，並用 y' 取代 dY/dX，y 取代 Y，x 取代 X，就得到①式之 θ 交角截曲線的微分方程式。

在正交截曲線的情形，則由曲線 $y=y(x)$ 和 $y=Y(X)$ 正交的條件

$$\frac{dy}{dx}\frac{dY}{dX}=-1$$

所以

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\frac{dY}{dX}}$$

代入 $f(x,y,y')=0$ 中並用相同轉換的處理就得②式之正交截曲線的微分方程式。

1-2 一階常微分方程

如前節所述，並非所有的一階微分方程式皆可求得其解，只有在可以變換成求積法時，這類的問題才可以用分析的方法來表示其解，常微分方程式在應用上大部份是屬於初期值問題或者邊界值問題，這類微分方程式是用數值的解法，透過計算機的處理來求得其數值近似解（參閱第七章）。

以下我們將介紹一些具有特定形態的微分方程式，它們可以變換成求積法的形式而求得其解，這種特定形態的微分方程式計有可分離變數形，齊次形，線性形微分方程式和完全微分方程式以及 Clairaut 的微分方程式。

1-3 變數可分離形

令 $f(x)$ 為 x 的函數，$g(y)$ 為 y 的函數，則具有下式

(1.8) $$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$$

之形態的微分方程式，就是屬於**可分離變數形**。它的解可以概括如下：

定理 1.1

可分離變數形微分方程式的一般解爲

(1.9) $$\int\frac{1}{g(y)}\,dy=\int f(x)dx+c \quad (c\text{ 爲任意常數})$$

(**證**) 在 $g(y)\neq 0$ 的情況下

$$\frac{1}{g(y)}\cdot\frac{dy}{dx}=f(x)$$

兩邊取積分，則得

$$\int\frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx}\,dx=\int f(x)dx+c \quad (c\text{ 爲任意常數})$$

上式左端經過積分置換後，就得到(1.9)式。

在 $g(y)=0$ 的情形，則因 $g(y)=0$ 有一根 $y=\alpha$，而 $y=\alpha$ 滿足(1.8)式，因此它構成了(1.8)式的奇異解，一般解與奇異解加起來的形式仍然具有(1.9)式的形態。

上面的解法，可以看成是將(1.8)式分解成微分之間的關係式

$$\frac{1}{g(y)}\,dy=f(x)dx$$

然後兩邊積分就得到(1.9)式。

【**例題 1**】 求 $(x-1)\dfrac{dy}{dx}+(y-1)=0$ 的解

(**解**) 在 $x\neq 1$，$y\neq 1$ 的情況下，將原微分方程式寫成

$$\frac{dx}{x-1}+\frac{dy}{y-1}=0$$

兩邊積分得　$\log_e(x-1)+\log_e(y-1)=c$　（c爲任意常數）…………①

或　$\log_e(x-1)(y-1)=c$

令常數 $A=e^c$，則上式可化簡爲

$(x-1)(y-1)=A$　……………………………………②

這是原微分方程式的一般解。

在 $x\neq 1$，$y=1$ 的情況下，則 $y=1$ 爲微分方程式的解

在 $x=1$，$y\neq 1$ 的情況下，則微分方程式可改寫成

$$(x-1)+(y-1)\frac{dx}{dy}=0$$

因此我們知道 $x=1$ 爲此微分方程式的解，但是是不是特殊解呢？從②式中可知在 $x=1$ 或 $y=1$ 的情況下，則 $A=0$，所以 $x=1$ 是微分方程式的一個特殊解。

嚴格說起來，$x=1$ 並不是原來微分方程式的解，可是當我們把 x 和 y 看成同等資格的變數時，才可以改變其變數來轉換微分方程式，這種對等關係最常見於一般關係式的一般解中。

上式若用絕對值來表示，則計算的結果爲

$$\log_e|x-1|\,|y-1|=c$$

$$|x-1|\,|y-1|=A\Rightarrow(x-1)^2(y-1)^2=A^2$$

因此得到　$(x-1)(y-1)=\pm A$

而任意常數 A 可以爲正，負，和零三種情況，它和②式的解是一樣的，因此在解微分方程式的過程中，取絕對值看起來可以省略，不必去考慮它的存在，這是因我們在常數項中已考慮其存在的緣故。

若用①式當做微分方程式的解，就必需要在 $x\neq 1$，$y\neq 1$ 的假設下方能成立，但是如果允許①式的常數項 $c\to-\infty$ 時，那它應亦是①式的特殊解。

從例題 1 的討論中可以看出，微分方程式的解必需面面顧慮到，而這樣的考慮也正是學習用分析的方法來求解微分方程式的重點。

【例題 2】　將一質量爲 m 的物體以垂直的方向向上拋出，假設重力加速度爲 g，該物體的初速爲 v_0，在下面兩種假設的狀況下求物體到達最高點的時間，