丘成桐主编
数学翻译丛书

VORLESUNGEN ÜBER DIE ENTWICKLUNG DER MATHEMATIK IM 19. JAHRHUNDERT

(TEIL II)

F. 克莱因 著　　李培廉 译

数学在19世纪的发展（第二卷）

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

丘成桐主编

数学翻译丛书

数学在19世纪的发展

(第二卷)

Shuxue Zai 19 Shiji De Fazhan

F. 克莱因 著　　李培廉 译

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

International Press

内容提要

本书是 F. 克莱因的名著《数学在 19 世纪的发展》的第二卷。与第一卷有所不同，它是专门讲述不变量理论以及相对论的数学源头，即相对论的数学史前史的，其中也包括了克莱因本人的一些研究成果。从数学上来讲，狭义相对论可以说就是在 Lorentz 变换群下的不变量理论，而广义相对论则可说是在一般点变换群下的不变量理论。在这个意义上，相对论与克莱因的《Erlangen 纲领》在思想上是一脉相承的。相对论与 19 世纪数学在思想上与历史上的联系第一次在本书中得到了详细的论述。

本书不再是按时间发展的顺序讲述，而是将不变量理论及其在物理学中的应用归拢到一起做系统的讲述。时至今日，它仍是学习不变量理论及其应用的一本极好的教材，对学习数学和物理的学生和教师都有极高的参考价值，也适合对数学及科学思想文化发展感兴趣的读者阅读。

图书在版编目（CIP）数据

数学在 19 世纪的发展. 第 2 卷 /（德）克莱因 (Klein, F.) 著；李培廉译. — 北京：高等教育出版社，2011.11

（数学翻译丛书 / 丘成桐主编）

ISBN 978-7-04-032284-2

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①克… ②李… Ⅲ. ①数学史 – 研究 – 世界 – 19 世纪 Ⅳ. ① O11

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 154657 号

策划编辑 李 鹏　　责任编辑 李 鹏　　封面设计 王凌波　　版式设计 王 莹

责任校对 殷 然　　责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京信彩瑞禾印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm × 960mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	20.75	版　　次	2011年11月第1版
字　　数	410 千字	印　　次	2011年11月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	69.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物 料 号 32284-00

《数学翻译丛书》序

改革开放以后, 国内大学逐渐与国外的大学增加交流。无论到国外留学或邀请外地学者到中国访问的学者每年都有增长, 对中国的科学现代化都大有帮助。但是在翻译外国文献方面的工作尚不能算多。基本上所有中国的教科书都还是由本国教授撰写, 有些已经比较陈旧, 追不上时代了。很多国家, 例如俄罗斯、日本等, 都大量翻译外文书本来增长本国国民的阅读内容, 对数学的研究都大有裨益。高等教育出版社和海外的国际出版社有见及此, 开始计划做有系统的翻译, 由王元院士领导, 北京的晨兴数学中心和杭州的浙江大学数学科学研究中心共同组织数学教授进行这个工作。参与的教授很多, 有杨乐院士, 刘克峰教授等等。我们希望这套翻译书能够使我们的大学生有更多的角度来看数学, 丰富他们的知识。海外的出版公司如美国数学学会等多有帮助, 我们谨此鸣谢。

丘成桐 (Shing-Tung Yau)
2005 年 1 月

编者前言

呈现在读者面前的是本讲义的第二卷，也是它的最后一卷，完成于 1915 年到 1919 年期间，那正是广义相对论吸引着全球数学家和物理学家的年代。Felix Klein，作为一个七十岁高龄的老人，以异乎寻常的精力投入到这一新理论的研究之中。在这一研究时期所集结起来的讲座笔录、通信、演讲稿、笔记和论文稿，由 Klein 本人整理，装满了整整七大公文包。构成本卷基础的只是其中很小一部分。另有一部分，Klein 已以单篇论文的形式发表。但是很多都已经写出了很详细的大纲的底稿，Klein 已经不再能把它们最终完成了。

所以这本第二卷仍然是残缺不全的。原计划从最初的不变量理论在几何学中的发轫讲起，一直系统地讲到 Einstein 的引力理论为止。Klein 本人所关心更多的是在 Einstein 学说的数学源头 (数学的史前史)，而不是在它的最终物理成型上。他把这些数学的史前史写成了三章，还没有决定就这样将它们付印。本书就是它们几乎没变的翻印。

第四章计划讲广义相对论，以及特别是讲在切触变换和连续群的 Lie 理论的观点下的 Hamilton 力学。遗憾的是这章没有完成。在这方面有许多不同年份的底稿，但其中没有一份能达到令编者将它加工出版时，不会使编者以不可允许的方式把个人的表述与 Klein 的混起来。

第四章的缺失对本书的影响主要是在它的自身结构上，而对它的出版意义自然不会有多大的影响。我们并不缺少对相对论的这样的一种表述。相反，这个现代理论与 19 世纪的数学在思想上以及在历史上的联系，却是第一次在本书中得到了详细的叙述。这本第二卷在预备知识、数学素养以及在独立思考方面可能比第一卷有稍高一些的要求; 而传记性的内容相对于第一卷则退居其次。

文字的编辑是由较年轻的那位编者独立承担的。和第一卷一样，指导原则仍然

是尽可能不改动 Klein 的原稿。即便这样, 一些文体的改动还是不可避免的; 一本书不可能从头到尾像一本为范围有限的读者所准备的讲稿那样, 只用一种口气说话。文字未作任何实质的改变。但是科学在 Klein 的文稿完成后的这十年来的后续发展, 使得有必要作一些补充; 这首先就是加了许多脚注, 和第一卷一样, 这些脚注附加一个 (H.), 以便与 Klein 本人的脚注相区别, 其次就是在每章末尾的注释, 它们在文本中的对应位置如通常那样, 用记号 * 来标出。还有, 这些注释是针对有素养的读者, 写得比较简洁。

在阅读校样上, Neugebauer, Friedrichs, Lewy 和 Grell 等诸位先生给了我们宝贵的帮助。我们感谢 D. J. Struik 先生审阅文稿, 给了我们实实在在有力的鼓励。

Göttingen, 1927 年 10 月.

R. Courant,
St. Cohn-Vossen

目　录

引　言

在第一卷中我们是以讲述离散变换群的理论以及在该变换群下不变的“自守”函数于近几十年来在数学的各个分支所获得的意义来结束该卷的.

现在我们转来谈连续变换群, 它们在与离散群的同一时空里, 获得了不亚于前者的广泛发展和意义. 但是我们的叙述不会严格按时间的顺序来展开. Lie 的深入广泛的工作, 在 1870 年发轫于对纯粹几何的研究, 很快就在微分方程的整个领域产生了深远的影响, 可是眼下我们还要向以前推一推. 我们宁可要把它与第一卷第 4 章谈“代数”几何发展的那部分内容联系在一起. 根据我于 Erlanger Programm (Erlangen 纲领) (1872) 中提出的基本原则, 几何学中的不同方向采用的起始公设就可以这样来表征, 即它们都是处理某个简单的线性变换群的不变理论. 现在又出现了一些十分值得注意的动向. 几何理论按照奠定它们基础的变换群来分类的想法也就扩展到了力学和数学物理的领域, 并且也就此成了理解今天处于主流地位的思想的可靠向导. 我这里是指那些集结在相对论名下的思想. 它们最初的形成与几何学家的研究工作毫无关系, 而是由与 Maxwell 电磁场的观念相联系的问题发展而来的. 它们无意中导致了与我们的纯粹数学的原理相似的表述, 这一点是一个最惊人的例子, 它表明, 尽管存在种种新的专门化的研究方向, 数学思想的重大进展的统一性总是时不时会一再地走到前台来. 我的整个讲述的意图有太多是涉及这种对比的, 我不用在这里多谈. 反正我在这方面已深入谈了不少, 例如, 我在第一卷的第 5 章就已经讲了力学和数学物理的发展, 一直讲到了包括 Maxwell 的研究工作在内的内容. 在下面要讲的内容可以说就是将零星分散在第一卷中的相关内容归纳在一起而成的两章. 通过用简单的例子来诠释 Erlangen 纲领的基本思想, 也就同时为今后讲 Lie 的研究工作打下了一个很好的基础.

要想能够达到这样设定的目标无疑需要一定的预备知识. 如果不打算仅仅停留在泛泛的一般性议论上, 必须预设有更详尽一些的知识, 起码要懂一般不变量理

论的基础. 因此我要从这样一些相关的讨论开始, 通过它们寻求保持我在这里的总体叙述的风格, 这样我能处处插入一些有关历史关联的评说. 与第一卷的叙述有一定的重复不可能完全避免, 可是材料的选择完全不同, 对人物的评论更是退居其次.

第一章

线性不变量理论的基本概念初步

A　一般线性不变量理论概述

§1　线性代换. 不变量的概念[1]

首先引进任意 n 个量

$$x_1, x_2, \cdots, x_n$$

作为原始变量 (Urvariable). 令它们经过一个幺模*的齐次线性代换

$$\begin{aligned} x_1 &= s_{11}x_1' + \cdots + s_{1n}x_n', \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad\qquad |s_{ik}| = 1. \\ x_n &= s_{n1}x_1' + \cdots + s_{nn}x_n', \end{aligned} \tag{1}$$

首先, 如果下述变量序列

$$y_1, y_2, \cdots, y_n$$

或

$$z_1, z_2, \cdots, z_n \text{ 等等}$$

[1] 作为一册简明而又特别适合本书需要的教材, 我们推荐 Bôcher 的《高等代数引论》一书 (最早的是英文版, New York 1907, 德文版, Leipzig, 1910 第一版, 1925 第二版). 此外, 我还要提及 *Sylvester* 全集的第一卷 (Cambridge 1904), 在该卷的第 198-202 页有一篇简短的注记, 采自 Cambridge 与 Dublin 数学杂志 IV (1851), 标题是 "论连带代数形式的一般理论", 其中第一次引进了 "不变量" 这个术语. 接下去在第 284 页上有一篇较长的, 可惜尚未全部完成的遗文,"论计算形式的原则" (Cambridge 与 Dublin 数学杂志 VII [1852]), 其中第一次出现了术语 "同步" 和 "逆步", 以及还有许多我们在今后要用到的其他术语. —— 编者注: 这期间新出版了 Weitzenböck 的 *不变量理论*, Groningen 1922.

也都是随 x 一起经同一代换 (1), 我们就称之为 "同步变量 (Kogredient)".

如果考虑一线性形式

$$u_1x_1 + u_2x_2 + \cdots + u_nx_n,$$

它在代换 (1) 下变成

$$u_1'x_1' + u_2'x_2' + \cdots + u_n'x_n',$$

由此就引出对 x "逆步的 (kontragredient)" 变量序列. 办法就是, 将上述前一个线性形式中的 x 用 (1) 式代换成 x', 然后与后一个线性形式中的 x' 逐个比较其系数, 我们就得到:

$$\begin{aligned} u_1' &= s_{11}u_1 + s_{21}u_2 + \cdots + s_{n1}u_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_n' &= s_{1n}u_1 + s_{2n}u_2 + \cdots + s_{nn}u_n. \end{aligned} \tag{2}$$

这里新旧变量出现的位置与 (1) 式相反, 而且系数列表的横行和竖列互换了, 逆步性的本质正在于此. —— 显然, 代换 (1) 与 (2) 的这种相互关系是互为逆反的. 我们可以不从 x 开始, 而同样好地从 u (或者从任何一个与之同步的, 以后我们称其为 v 或 w …… 的变量序列) 来开始 (这就是对偶原理 (Prinzip der Dualität)).

由一些与 x 或 u 同类的变量序列我们还可以进一步组合出另一些变量序列, 它们由于有代换 (1) 或 (2), 也同样经过齐次线性 (幺模) 代换. 例如, 属于这种量的有: 二次项

$$x_1^2, 2x_1x_2, x_2^2, \cdots, x_n^2,$$

或者是由两个同步变量序列组成的双线性组合 (bilinearen Verbindungen):

$$x_1y_1, (x_1y_2 + x_2y_1), x_2y_2, \cdots, x_ny_n,$$

以及

$$(x_1y_2 - x_2y_1), (x_1y_3 - x_3y_1), \cdots, x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1}.$$

我们把它们由于有 (1) 式和 (2) 式而经过的线性代换称之为由 (1) 式或 (2) 式所诱导出的 (*induziert*) 线性代换. 这些导出代换就不再必然是最一般的这类线性代换. 此外, 同步性和逆步性的概念也可以转移到它们的上面.

例如, 取一如下的二次型:

$$f(a, x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2,$$

并要求用 (1) 式把 $f(a, x)$ 变成 $f(a', x') = a_{11}'x_1'^2 + \cdots + a_{nn}'x_n'^2$, 则可证明,

$$a_{11}, a_{12}, a_{22}, \cdots, a_{nn},$$

相对于

$$x_1^2, 2x_1x_2, x_2^2, \cdots, x_n^2$$

是逆步的. 这种二次型的一个特例就是一线性形式的平方:

$$(u_1x_1 + u_2x_2 + \cdots + u_nx_n)^2;$$

可以推断,

$$u_1^2, u_1u_2, u_2^2, \cdots, u_n^2$$

相对于

$$a_{11}, a_{12}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$$

为同步的. (请思考一下这个断言 (Ansatz) 的细节. 值得注意的是, $x_1^2, x_1x_2, \cdots$ 还有 $u_1^2, u_1u_2, \cdots$, 尽管它们不是相互独立的, 但它们仍然是线性无关的*.)

现在对任意 N 个线性无关的量构成的每一整体, 只要经过 (1) 与 (2) 的齐次代换, 我们就随 Sylvester, 称之为一量丛 (*Komplex* (源自拉丁语 Plexus)[1]). 一般线性不变量理论的目的, 在它们的奠基人的眼中看来, 就可以这样来表达: 提供出一些量丛. 人们就可以以最一般的方式用它们来构成一些表达式, 它们对其中单个量丛中的变量而言为有理, 整幂, 和齐次的多项式, 并且具有这样的性质, 它们在幺模代换 (1) 或 (2) 下不变.

由 n 行同步变量构成的行列式, 如下所示者:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_n \end{vmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_1 & w_2 & \cdots & w_n \end{vmatrix}$$

就提供了这样的最简单的例子, 通过简单地应用行列式的乘法定律就可以说明这一点. 但是理论的任务是, 而实际上也确就是, 将全部待求 "不变量" 的构造通过系统的算法归结到这种最简单的例子.

我们在这里不可能 —— 并且对后面的讲述也没必要 —— 对这个一般线性不变量理论梗概做更严格的描述. 更进一步的内容, 且其表述方式对以下的讲述也是非常合适的, 读者可以, 例如, 从 Hurwitz 在数学年鉴 (Math. Annalen), 第 45 卷 (1894) 上的论文中找到. 我们将只限于考察个别最简单的量丛及其相应的不变量, 并用它们来说明量丛的意义和我们所提出的问题的恰当性, 这应该就足够了.

作为 "量丛" 典型的例子, 我们首先来讨论 Graßmann 在他的线性延伸学 (lineale Ausdehnungslehre) (1844 年还有 1862 年) 中引进的几何量的层次 (*Stufen geometrischer Größen*).

[1] 新近也称其为线性量 (*lineare Größe*). 参见 Weyl l.c. 205 页. (H.) (这里前面未引用过 Weyl 的著作, 疑系 Weitzenböck 之误. —— 中译者注)

§2 Graßmann 层量

由 n 行同步变量 $(x),(y),\cdots$, 以及 $(u),(v),\cdots$, 构成的行列式是一个不变量(因而自身也就成了一个量丛), 除此之外, 我们也已把两行的行列式的总体当做量丛提出来了, 这种行列式可以组成如下的矩形表格 (rechteckigen Schema)[1]

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{vmatrix}$$

我们自然也能用量 u,v 来构成这种两行的行列式.

于是 Graßmann 的一般方法就是从总体上来考察量丛, 它们可以由 μ 行同步变量 $(x),(y),\cdots$, 或 $(u),(v),\cdots$ 构成, 其中 μ 依据行的数目可分别取 $0,1,2,\cdots,(n-1)$.

如果我们暂时只从 $(x),(y),\cdots$ 出发, 我们就将获得 n *次层量*[2] 的下述序列:

$\mu=0$ 纯数量 (按 Graßmann 的说法), 与我们所说的不变量一致;

$\mu=1$ 就是 n 个量 x_i 自身;

$\mu=2$ $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 个二阶子行列式 $(x_iy_k-x_ky_i)$ 形成的量丛;

$\mu=n-1$ 由 $(n-1)$ 个变量列 $(x),(y),\cdots$ 组成的 n 个 $(n-1)$ 阶行列式.

由于我们已指出, n 行的行列式是一个不变量, 于此所列举的量丛序列到此循环结束.

同样, 从那些 $(u),\cdots$ 出发, 也可以得到 n 次层量, 它们与那些我们从 $(x)\cdots$ 所得到的层量之间的关系, 还有待于澄清.

为了不使表述陷入太抽象, 我们将用一个最简单的数字例子来做详细的讨论.

在 $n=2$ 时, 自然我们还没有什么新东西.

对 $n=3$ 情况, 我们指出, 两行的行列式

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

对下述逆步量

$$u_1,u_2,u_3,$$

[1] 以后将按习惯译为矩阵. —— 中译者注

[2] 这里得出的是层量这一点仍可由行列式乘法定理来证明, 这个定理可以看成是全部不变量理论的真正基础. — Graßmann 层量是比较晚地才在不变量理论中明确地被提出, 也就是由 Clebsch 于 1872 年提出的 (论不变量理论的一个基本问题, Göttinger Abhandlungen, 第 17 卷).

是同步相关的. 这是由于三行的行列式

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

既然已是个不变量, 将它展成 z 的如下的线性形式:

$$z_1(x_2y_3 - x_3y_2) + z_2(x_3y_1 - x_1y_3) + z_3(x_1y_2 - x_2y_1)$$

后, 就可以看出这一点. 同时我们还可以看出, 对任意的 n, 对 $(n-1)$ 行的行列式组成的量丛, 相应的定理也成立.

现在我们特别来研究 $n=4$ 这一情形 (它因为出现在现代物理的思维中, 对我们来说特别重要). 在 $\mu = 0, 1, 2, 3$ 这四种量丛中, $\mu = 0, 1, 3$ 这三种可以说是已经解决了, 因此我们的注意力就转向 $\mu = 2$ 这个情形.

我们令

$$p_{ik} = x_i y_k - y_i x_k \tag{3}$$

(因而有 $p_{ik} = -p_{ki}$). 通过将下述恒为零的行列式

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}$$

按两行两列子行列式展开, 我们就可以得出下述表达式

$$P = p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} \tag{3'}$$ [1]

取值为零的结论. 而在对 x, y 作线性代换时 p_{ik} 所经过的诱导代换因而也就必定会把方程 $P=0$ 变到自身. 事实上, 人们注意到 p_{ik} 除了 $P=0$ 这个条件外, 不受别的条件的约束*. 从这里再往前推一步就可认识到, 任何与 p_{ik} 同步的 (独立的) 量 b_{ik} 所构成的下述表达式

$$B = b_{12}b_{34} + b_{13}b_{42} + b_{14}b_{23} \tag{4}$$

也是一个不变量. 我们要来详细论述这一步, 因为类似的思考在不变量理论中要经常用到[2], 它里面还包含一个中间结果, 是我们后面必须引用的.

[1] 关于求和项中的下标的记忆规则: 第一项的下标为 12; 34. 然后对末尾三个下标进行循环轮换而第一个下标保持 1 不变. (H.)

[2] 参看我们在前面提到的关于 $u_1^2, u_1u_2, \cdots$ 对 $a_{11}, a_{12} \cdots$ 为同步这一事实.