SOUTHEAST
UNIVERSITY PRESS

机械振动理论及应用

颜景平

THEORY OF MECHANICAL VIBRATION WITH APPLICATIONS

Yan Jingping

机械振动理论及应用

颜景平　钟秉林　(日)下乡太郎

东南大学出版社

（苏）新登字第 012 号

内 容 提 要

本书着重阐述机械振动的基本理论与概念。对机械系统自由振动、强迫振动、振动消减和测量等应用性问题，从物理概念出发，深入浅出，剖析本质，直接获得有用结论；同时，与数学上严格证明对照，使数学公式充实以物理内容。力求便于初学者入门，为解决实际工程问题提供基础。

本书可供有关专业学生或工程技术人员作为教材或参考书籍。

责任编辑　　田　湘

机械振动理论及应用

颜景平　主编

*

东南大学出版社出版发行

（南京四牌楼 2 号　邮编 210018）

江苏省新华书店经销　　南京东颖印刷厂印刷

*

开本 850×1168 毫米 1/32　印张 8.75　字数 227 千

1993 年 9 月第 1 版　　1993 年 9 月第 1 次印刷

印数 1—1200 册

ISBN　7—81023—802—7/TH・42

定价：8.00 元

出 版 说 明

研究生教育是培养高层次专门人才的一条重要途径。通过研究生阶段的教学，应使研究生在本门学科上掌握坚实的理论基础和系统的专门知识，并具有从事科学研究工作或独立担负专门技术工作的能力。而编辑出版能够体现学校研究生教育特色、有较高学术水平的研究生教材，是研究生教育的重要基础工作之一。

一本好的研究生教材，应当富有教育性、系统性、启迪性、学术性和新颖性。这即是说，研究生教材必须符合教学的基本规律，注意理论联系实际；必须系统阐明本门学科所必要的基础理论和专门知识，注意突出基本原理和基本内容；必须着眼于研究生能力的培养，注意启发他们的创造性思维；必须体现较高的学术水平，注意有足够的理论深度；必须充分反映国内外最新研究动态，注意当代科学技术发展的前沿。所有这些，既是对研究生教材的要求，也是我们组织出版研究生教材所要遵循的原则。当然，使研究生教材能对本学科领域的科研和工程技术人员有较高的参考价值，也是我们追求的目标。

现在出版的教材虽然是作者多年研究生教学的实践与研究的结晶，从选题、审定到编辑出版，我们也都经过了细致认真的工作，但要使一本研究生教材能满足大家之所求，决非易事。限于我们的水平和经验，难免有失当和错误之处，尚祈读者不吝指正。

东南大学研究生院

东南大学出版社

1990 年 10 月

前　　言

本书根据作者多年教学经验编著。着重基本理论、基本概念的阐述，注意基本方法的训练。对应用性问题，从物理概念出发，深入浅出地剖析其本质，直接获得实用的结果。同时对照数学方法，不失严格性。这种编写方法有助于引导读者应用理论知识解决实际问题。

某些章节中，编者提出了新的见解和解题方法，使那些本来复杂、难以理解的问题得到简化。对现有书籍中的成熟部分则予以继承，但在易读性方面给予足够重视。本书可供高等院校机械振动课程教学之用，也可供工程技术人员参考。

本书 1～3 章单自由度系统，在理论力学基础上逐步深入联系工程实际，起到承上启下的作用；本书 4～6 章两自由度系统、多自由度系统和连续系统，在方程建立、求解和特性研究方面进入新层次，是本书基础性内容；第 7 章近似计算，讲述近似解的理论和方法，为实际应用提供手段，而编程问题对多数读者无讲述必要，故略去；第 8、9 章非线性振动、随机振动，讲述基础性概念、基本理论和方法，引导读者入门，为学习此类书籍或解决工程问题奠定基础。

本书随机振动部分由(日)下乡太郎教授著，近似计算和非线性振动部分由钟秉林教授编著，其余由颜景平教授编著。全书由颜景平教授统稿主编。

本书在编写过程中，得到东南大学研究生院和东南大学出版社的大力支持和帮助。南京航空航天大学振动工程研究所博士导师赵淳生教授担任主审。航海仪器二厂副总工程师潘凯整理修改

插图，徐竹同志描图，博士生芮小健、朱美玲和硕士生韩良均为本书的整理、完善作出了贡献。编者在此一并表示诚挚的谢意。

由于水平有限，错误难免，敬希读者指正。

编　者

1993年6月

目　录

第一章 振动学基础

1.1 概 述

机械振动在许多场合下是有害的，它产生噪声和动载荷，影响设备性能和寿命。因此，对大多数机械来说应将振动的振幅控制在允许范围内。对于另一类机械，如振动料斗、振动筛、激振器等，依赖振动而工作，应控制有关的参数，实现预期功能。

研究机械振动，旨在掌握各种典型结构在自由状态下的振动特性；受外界干扰后的振动响应；消振、隔振、测振等方面的理论和方法。

随着科学技术的发展，各种工程系统日趋复杂，振动问题成为提高机器速度和精度的关键。电子计算机的运用，先进测振技术的出现，把振动研究推向新的高度。掌握结构动力特性设计方法成为工程技术人员必备的基本能力。《机械振动理论及应用》将提供基本的经典理论和先进的研究方法。

1.2 机械振动的分类

根据产生振动的原因可分为：

1. **自由振动**

系统受干扰后，除去干扰因素，在一段时间内继续维持着的振动。

2. **受迫振动**

系统在干扰因素持续作用下的振动。

3. **自激振动**

系统与能源相联系，通过反馈维持振幅不变的振动。例如钟、表上的摆。

根据振动规律可分为：

1. **简谐振动**

运动状态可用一项正弦或余弦函数表达。

2. **非简谐振动**

由多种频率的简谐运动合成。

3. **随机振动**

振幅和频率均具有随机性。例如车辆行驶中，车身的振动受路面不平的随机性支配。

根据振动参数可分为：

1. **线性振动**

系统的阻尼力和弹力，分别与相应点上的速度、位移成正比。

2. **非线性振动**

系统的阻尼力和弹力中有一项不保持上述正比关系。

1.3 简谐振动及其合成

1. **简谐振动表达形式**

$$x = A\sin(\omega t + \varphi) \tag{1-1}$$

式中：φ 为初相位，即 $t=0$ 时的相位，表示质点的初始位移；ω 为角频率或称圆频率，$\omega=\dfrac{2\pi}{T}$，T 为振动周期；A 为振幅，表示质点与其平衡位置间的最大位移。

对式（1—1）求一阶和二阶导数，可得简谐运动的速度和加速度

$$\dot{x} = A\omega\cos(\omega t + \varphi) \tag{1-2}$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x \qquad (1-3)$$

比较式（1—1）、（1—2）和（1—3）可见：

（1）$\dot{x}$ 比 x 超前 90°；$\ddot{x}$ 比 $\dot{x}$ 超前 90°

（2）$\ddot{x}$ 与 x 成正比，比例常数为（$-\omega^2$），通常利用这个关系来识别简谐运动。

简谐运动还可用矢量表示。因为表达简谐运动的三个参数 A、ω 和 φ 分别对应于一个矢量的模、矢量旋转角速度和初始方位。简化的表达式为

$$x = Ae^{i(\omega t+\varphi)} \qquad (1-4)$$

按欧拉公式，式（1—4）可写成

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) + iA\sin(\omega t + \varphi) \qquad (1-5)$$

上式的实部和虚部分别对应于矢量 $\boldsymbol{A}$ 以等角速 ω 旋转时在实轴和虚轴上的投影。因此它同时表达了两个方向的简谐运动，只当不致引起误解的场合才能使用。严格的表达式应写为

$$x = \frac{A}{2}\left[e^{i(\omega t+\varphi)} + e^{-i(\omega t+\varphi)}\right] = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad (1-6)$$

$$y = \frac{A}{2}\left[e^{i(\omega t+\varphi)} - e^{-i(\omega t+\varphi)}\right] = iA\sin(\omega t + \varphi) \qquad (1-7)$$

式（1—6）表示两旋转矢量 $\dfrac{\boldsymbol{A}}{2}$，从初始相位 φ 处，向相反方向以等角速度 ω 旋转，虚轴上的投影相互抵消；实轴上的投影相叠加后（图 1.1）成为

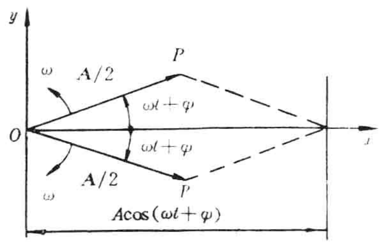


图 1.1　两旋转矢量合成余弦振动

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

式（1 — 7）相当于将图 1.1 中的 $\overline{OP}$ 倒相 180°，即将 $\dfrac{A}{2}$ 换为 $-\dfrac{A}{2}$。如此，实轴投影相互抵

消，而虚轴投影相互叠加后（图 1.2）成为

$$y = A\sin(\omega t + \varphi)$$

式(1 − 7) 中的符号 i 仅表示振动方向，当方向明确时可不写出。

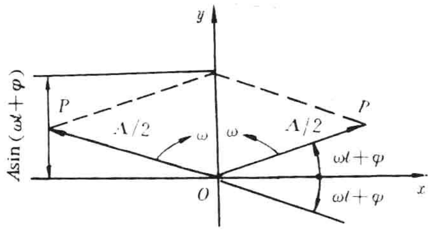


图 1.2　两旋转矢量合成正弦振动

2. **简谐振动合成**

振动分析中，常需将两个简谐振动叠加，设

$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

两者叠加后的振动成为

$$x = x_1 + x_2$$

x 可藉助矢量关系确定（图 1.3）。由图知

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$$

它们的模 A、A_1 和 A_2 具有如下关系

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \tag{1 − 8}$$

$$\varphi = \mathrm{tg}^{-1}\frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \tag{1 − 9}$$

有时需要将互相垂直的两个简谐振动相加，如图 1.4 所示的圆锥摆，质点 P 在 x 轴和 y 轴上的投影分别是两个简谐振动

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t + \varphi) \\ y = B\sin(\omega t + \varphi) \end{cases} \tag{1 − 10}$$

此种情况下，所谓相加是指确定 P 点的综合运动。由物理概念知，P 的轨迹为椭圆，其长轴为 A；短轴为 B。式（1－10）为该椭圆的参数方程，消去参变量 t 后可得

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = 1$$

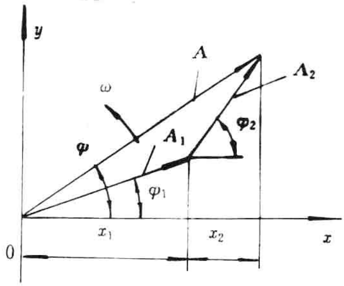


图 1.3　两简谐振动叠加

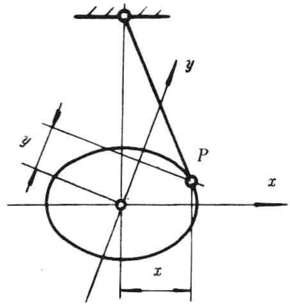


图 1.4　圆锥摆

1.4　非简谐周期振动及其频谱

很多往复运动具有固定的周期 T，但不是简谐运动。亦即，位移 $x=f(t)+f(t+nT)$，如图 1.5 所示，$n=1, 2, \cdots\cdots$。

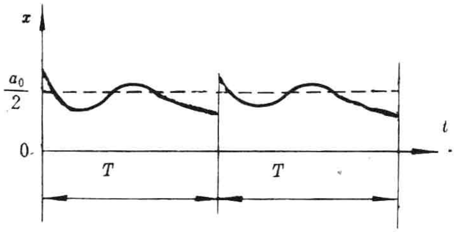


图 1.5　非简谐周期函数

引用谐波分析法，把周期函数展成富氏级数

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_1 t+b_n\sin n\omega_1 t) \qquad (1-11)$$

式中：$\omega_1=\dfrac{2\pi}{T}$为往复运动的基本角频率，

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{\omega_1}{\pi} \displaystyle\int_0^T f(t)\mathrm{d}t, & \dfrac{a_0}{2} \text{为 } f(t) \text{ 的平均值} \\ a_n = \dfrac{\omega_1}{\pi} \displaystyle\int_0^T [f(t)\cos n\omega_1 t]\mathrm{d}t \\ b_n = \dfrac{\omega_1}{\pi} \displaystyle\int_0^T [f(t)\sin n\omega_1 t]\mathrm{d}t \end{cases} \tag{1-12}$$

式（1－11）也可写成

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_1 t + \varphi_n) \tag{1-13}$$

式中：$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \qquad \varphi_n = \mathrm{tg}^{-1}\frac{a_n}{b_n} \tag{1-14}$$

式（1－14）的关系可藉助于图 1.3，令其中 $\varphi_2 - \varphi_1 = 90°$得到。

由式（1－11）或（1－13）可知，非简谐周期振动可分解为多个简谐振动之和，故又称多谐振动。

把各次谐波的幅值 A_n 与相应角频 $\omega_n = n\omega_1$ 之间的关系用图线表示，称为频谱。图 1.6 示出了矩形波的频谱，该频谱按如下方法画出：用 ω_1 表示矩形波的基本角频率，藉助于式（1－12）确定

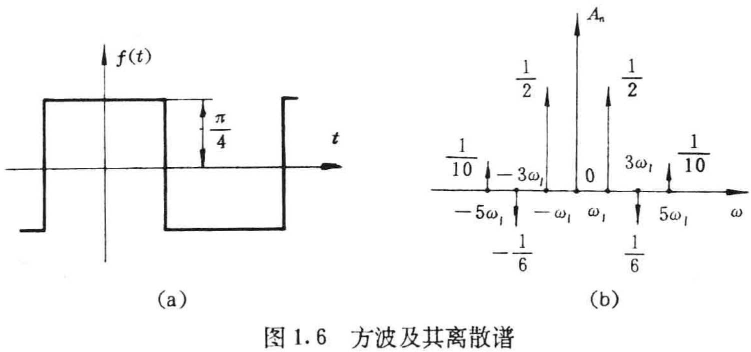


图 1.6　方波及其离散谱

出它的富氏级数

$$f(t) = \cos\omega_1 t - \frac{1}{3}\cos 3\omega_1 t + \frac{1}{5}\cos 5\omega_1 t - \cdots\cdots \tag{1-15}$$

引用关系式

$$\cos\omega_1 t = \frac{1}{2}e^{i\omega_1 t} + \frac{1}{2}e^{-i\omega_1 t}$$

$$-\frac{1}{3}\cos 3\omega_1 t = -\frac{1}{6}e^{i3\omega_1 t} - \frac{1}{6}e^{-i3\omega_1 t}$$

于是 $\cos\omega_1 t$ 项由图中 ω_1 和 $(-\omega_1)$ 处的$\frac{1}{2}$表示；$-\frac{1}{3}\cos 3\omega_1 t$ 项由图中 $3\omega_1$ 和 $(-3\omega_1)$ 处的 $(-\frac{1}{6})$ 表示；余类推。由式（1－15）可知，阶数越高，谱值越小，以至可略而不计。

为直观起见，图 1.7 画出由各阶谱合成矩形波的过程。由此可见，阶数越多，越接近矩形波。反之，若失去高次谐波，原来水平部分便出现纹波，垂直部分则成为倾斜线。

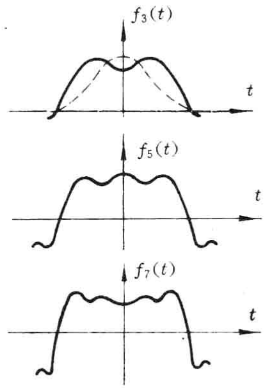


图 1.7　各阶谱波合成矩形波的过程

例　将图 1.8 所示矩形波展成富氏级数，图中 $T=\frac{2\pi}{\omega}$。

解　由图知

$$f(t) = \begin{cases} P, & 0 \leqslant t < \frac{T}{4} \\ -P, & \frac{T}{4} \leqslant t < \frac{3}{4}T \\ P, & \frac{3}{4}T \leqslant t < T \end{cases}$$

并且 $f(t+nT)=f(t)$。由于 $f(t)$ 是偶函数，只应含 cos 项，故 sin 系数为零，即

$$b_n = 0$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\omega_1}{\pi}\left[\int_{T/4}^{3T/4}(-P\cos n\omega_1 t)\mathrm{d}t + \int_{3T/4}^{5T/4}(P\cos n\omega_1 t)\mathrm{d}t\right] \\ &= \frac{\omega_1 P}{\pi}\frac{1}{n\omega_1}\left[-\sin\frac{3n\pi}{2} + \sin\frac{n\pi}{2} + \sin\frac{5n\pi}{2} - \sin\frac{3n\pi}{2}\right] \\ &= \frac{4P}{n\pi}(-1)^{\frac{n-1}{2}} \qquad n = 1,3,5,\cdots\cdots \end{aligned}$$

故 $$f(t)=\frac{4P}{\pi}\left(\cos\omega_1 t-\frac{1}{3}\cos 3\omega_1 t+\frac{1}{5}\cos 5\omega_1 t-\cdots\cdots\right)$$

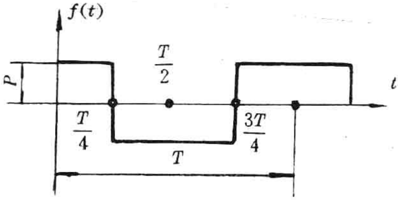
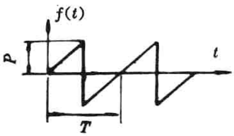
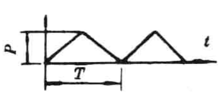


图 1.8 矩形波

为了便于应用，表 1.1 给出常见周期波的富氏展开式。

表 1.1 常见周期波的富氏展开式

波 形	展开式
	$f(t)=\frac{2P}{\pi}\left(\sin\omega_1 t-\frac{1}{2}\sin 2\omega_1 t+\frac{1}{3}\sin 3\omega_1 t-\cdots+\cdots\cdots\right)$
	$f(t)=\frac{P}{2}-\frac{P}{\pi}\left(\sin\omega_1 t+\frac{1}{2}\sin 2\omega_1 t+\frac{1}{3}\sin 3\omega_1 t+\cdots\cdots\right)$
	$f(t)=\frac{P}{2}-\frac{4P}{\pi^2}\left(\frac{\cos\omega_1 t}{1^2}+\frac{1}{2}\frac{\cos 2\omega_1 t}{2^2}+\frac{1}{3}\frac{\cos 3\omega_1 t}{3^2}+\cdots\cdots\right)$