

18 Lectures On Mathematical Way Of Thinking



小学数学

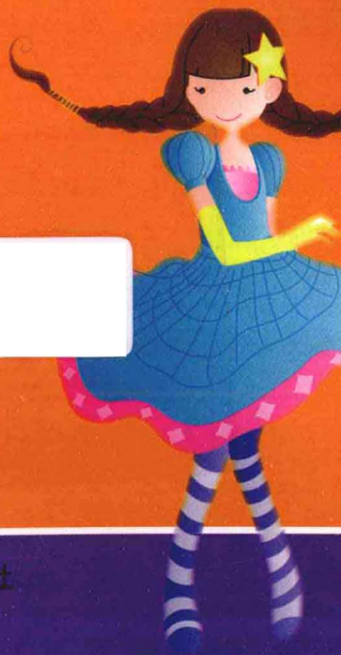
解题思维 方法大全

主编 * 陆志昌 景山

必备的工具书

- 奥妙的数学
- 奇特的解法

六年级



山西出版传媒集团 山西教育出版社

掌握一种解题思维方法 比做一百道题更重要
激发创新思维 培养解题技能

内容提要

传统的解题方法类图书是按题讲解方法，而本书与之不同，是按不同的思维方法来选题、讲解，共介绍了发散思维法、调频思维法等十八种解题思维方法。因而结构和分类更加科学合理，对习题讲解更加深入明白。

小学数学解题思维方法大全（三年级）

小学数学解题思维方法大全（四年级）

小学数学解题思维方法大全（五年级）

小学数学解题思维方法大全（六年级）

初中数学解题思维方法大全（七年级）

初中数学解题思维方法大全（八年级）

初中数学解题思维方法大全（九年级）

ISBN 978-7-5440-5585-7



9 787544 055857 >

定价：17.00元



18 Lectures On Mathematical Way Of Thinking

小学数学

解题思维 方法大全

主编 陆志昌 景山

必备的工具书

- 奥妙的数学
- 奇特的解法

六年级



山西出版传媒集团
山西教育出版社

图书在版编目 (C I P) 数据

小学数学解题思维方法大全. 六年级/陆志昌, 景山主编. —太原: 山西教育出版社, 2012.12

(数学解题思维方法系列丛书/陆志昌, 景山主编)

ISBN 978-7-5440-5585-7

I. ①小… II. ①陆… III. ①小学数学课—题解 IV. ①G624.505

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 170693 号

小学数学解题思维方法大全·六年级

责任编辑 薛海斌

助理编辑 闫果红

复 审 邓吉忠

终 审 刘立平

装帧设计 李 珍

印装监制 贾永胜

出版发行 山西出版传媒集团·山西教育出版社

(太原市水西门街馒头巷7号 电话: 0351-4035711 邮编: 030002)

印 装 山西晋财印刷有限公司

开 本 850×1168 1/32

印 张 8.25

字 数 209千字

版 次 2012年12月第1版山西第2次印刷

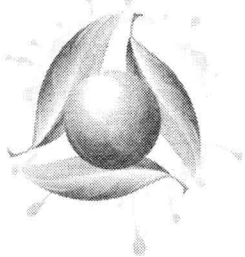
印 数 5001-10000册

书 号 ISBN 978-7-5440-5585-7

定 价 17.00元

如发现印装质量问题,影响阅读,请与印刷厂联系调换。电话:0351-2673871

出版宣言



我们的口号：掌握一种解题思维方法比做一百道题更重要！

我们常常会看到这样一种现象：不少同学整天忙着做作业，什么“竞赛辅导”、“升学练兵”，手头资料一大堆，习题做了好几本，但学习成绩就是提不高，这是为什么？

究其原因，就是没有掌握好正确的解题思维方法。

解题思维方法是什么？

方法是身陷困境后突然伸出的一只援手；方法是苦思冥想中的恍然大悟；方法是茫茫大海上引你前行的点点白帆；方法是攀登顶峰时你选择的最佳路径。

我们精心策划出版的这套《数学解题思维方法大全》与其他同类书相比，最突出的是有五大亮点：

理念新。

与传统的解题方法类图书相比，本书的结构分类与之不同。传统的解题方法类图书是按题型讲解方法，如植树问题、行程问题等等，而本丛书是按不同的思维方法进行讲解的，如分析综合法、发散思维法等等。每本书介绍了近二十种不同的解题思维方法，突破了通过习题讲解方法的传统理念。另外，丛书的特色

栏目“情境体验·问题探究”和“思维聚焦·融会贯通”中渗透了全国各地名师教育理念的变化,从“学生身边的实例”入手,让学生探索发现,从而掌握解题思维方法。

思路新。

丛书集中讲授一些解题思维方法、窍门,与日常生活中司空见惯的实例紧密结合,不仅简捷、巧妙,同时还十分有趣,运用这些思维方法来解答相应的问题不仅准确,而且快捷。

题目新。

新型的例题是有效地培养学生思维的深刻性、灵活性、独创性、敏感性的重要手段。本丛书大量题目是一代名师近期原创的新题、活题以及国内外的竞赛题,注重知识“点”与“面”的联系,课堂内与课堂外的渗透,培养学生新的思维、新的想象、新的发现。

作者功底深。

丛书全部由特级教师、高级教师主笔,采用双学段老师编写的方式:即小学段由初中老师和小学老师共同完成;初中段由高中老师和初中老师共同完成,各展所能,优势互补,使全书实现了“命题思维、能力考查、思维方法”的最佳结合。

体例新。

本丛书每道例题,解答前都有思路分析与规范解答,它是作者解题的体会和感受,是解题经验的总结。因此也可以说它是作者从解题实践中具体概括出来的精髓。更重要的是恰到好处的点拨,使学生做到立足基础、抓住关键、突破难点,研究方法,以一题代一类,真正使学生做到举一反三、触类旁通,从而达到跳出题海、启迪思维的效果。丛书特设的“熟能生巧”专栏,用

于学生自我检验,为进一步巩固所学解题思维方法奠定基础。

天才不常有,蠢才也罕见,思维就在你的头脑中。《数学解题思维方法大全》正迫不及待地向你走来!同学们用它辅助数学学习,可开思维之窃,入解题之门,从而受益终身;教师将它引入课堂,能活跃课堂气氛,增强教学艺术,提高教学效果。所以它不仅是学生开阔眼界、拓宽思维的有益读物,而且是家长的好帮手、教师的好参谋。

耕耘者总盼望丰收的金秋。本丛书一定能为莘莘学子送去一叶小舟,一副双桨,希望同学们顺利地到达理想的彼岸。如果本丛书能为开启同学们的智慧带来一点裨益,作者将感到极大的欣慰。不当之处,诚望广大读者指正。

目 录

contents

第一讲	估算巧解	顿开茅塞	
		——估算法	1
第二讲	等量代换	浅显简易	
		——代换法	11
第三讲	拆分一招	技能提高	
		——拆分法	23
第四讲	反面思考	干净利落	
		——还原法	34
第五讲	一一对应	巧妙解题	
		——对应法	45
第六讲	分组着眼	开辟坦途	
		——分组法	56
第七讲	推向极端	令人叫绝	
		——极端法	66
第八讲	巧妙转化	豁然开朗	
		——转化法	77
第九讲	疑聚发散	沟通纵横	
		——发散思维法	89



第十讲	画图列表	好处不少	
		——图示法.....	110
第十一讲	赋以特值	柳暗花明	
		——设数代入法.....	24
第十二讲	借助交集	简洁流畅	
		——交集法.....	135
第十三讲	分析综合	至关重要	
		——分析综合法.....	146
第十四讲	构造抽屉	别出心裁	
		——构造法.....	158
第十五讲	运用方程	迎刃而解	
		——方程法.....	166
第十六讲	疑难莫慌	割补帮忙	
		——割补法.....	177
第十七讲	找不变量	搭桥过渡	
		——定量法.....	187
第十八讲	操作实验	探索新路	
		——操作法.....	198
参考答案.....			211



第一讲 估算巧解

顿开茅塞



——估算法



一、情境体验

1. 情境

某车间加工一种零件,3人5小时加工105个零件,照这样计算,6人加工210个零件,需要多少小时?

- A. 5 B. 10 C. 12 D. 35

小明这样解:

从题中的数量关系看,人数3人增加到6人是扩大了2倍,而生产的零件数从105个增加到210个也是扩大2倍,因此在生产效率相同的条件下,所需的工作时间仍应是5小时,所以应选A。

2. 问题探究

你能说出小明的解题思维方法吗?



二、思维聚焦

小明的这种解题思维方法称为估算法。

在日常生活与工作中,人们要对有关问题进行估算,比如天气、判断某人的身高或年龄、考试结束后估算成绩等,往往都要做个大概的估计。在处理数学问题时,我们也会遇到不要求精确答案的情况。如果非要按部就班地求出一个精确的答案,不但繁琐,而且有时根本无法求解。在这种情况下,我们可以根据所学过的知识,只对问题的答案做大致范围的测算,便可使问题获解,这种思维方法我们把它叫做估算思维,也叫估算法。估算

思维一般和放缩思维同时采用,往往有意想不到的效果。



三、融会贯通

例1 估算(不用笔算),“ $0.495 \times 20.1 + \frac{1}{2} \times 10.01$ ”的结果是()左右(整数)。

(第一届“小学生数学报”数学竞赛第一试试题)

[分析] 把0.495、20.1、10.01取近似值, $0.495 \approx 0.5$, $20.1 \approx 20$, $10.01 \approx 10$,然后进行运算。

[解]

$$\begin{aligned} & 0.495 \times 20.1 + \frac{1}{2} \times 10.01 \\ & \approx 0.5 \times 20 + 0.5 \times 10 \\ & = 10 + 5 \\ & = 15 \end{aligned}$$

[点拨] 此例用估算法,简单明了。

例2 某校五年级3个班举行一次数学考试,五(1)班45人,平均分是85分;五(2)班51人,平均分是87分;五(3)班45人,平均分是89分,这3个班每人的平均分是多少分?

A. 85 B. 86 C. 87 D. 89

[分析] 根据平均数的意义,3个班每人的平均分既不能低于或等于85分,也不可能高于或等于89分,所以答案A、D都是错误的;

因为五(1)班和五(3)班都是45人,若从五(3)班每个同学中取2分补给五(1)班的每个同学,平均分正好是87分,又与五(2)班的平均分相同。

[解]

应选C。

[点拨] 此例用估算法,简捷明快。

例 3 一个小于 200 的自然数,它的每位数字都是奇数,并且它是两个两位数的乘积,那么这个自然数是多少?

[分析] 我们先估算取值范围,依题意,这个小于 200 的自然数是两个两位数的乘积,而 $15 \times 15 = 225$,所以这两个两位数只能在 10、11、12、13、14 中选取;

又因为每位数字都是奇数,所以可能是 11、13。

又考虑到任何一个两位数与 11 的积肯定有一位数字是偶数,如 $11 \times 17 = 187$,因而其中一个因数只能是 13,但 $13 \times 17 = 221$ 比 200 大,所以只有 $13 \times 15 = 195$ 符合题意。

[解] 根据以上分析,所求的自然数为

$$13 \times 15 = 195$$

[点拨] 此例用估算法解答,别具一格。

例 4 求 $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$ 的整数部分。

[分析] 用放缩法处理,设 $A = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$,那么

$$A < \frac{1}{3} \times 5 = 1 \frac{2}{3}, \quad A > \frac{1}{7} \times 5 = \frac{5}{7}$$

$$\text{即 } \frac{5}{7} < A < 1 \frac{2}{3}$$

至此我们已经能确定 A 的整数部分了。

[解]

所求值的整数部分是 1。

[点拨] 利用放缩思维和估算法解题,对不等式进行放大或缩小。但范围必须适当,本例在分母较小的情况下,把 $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$ 分成 2 次进行放缩,提高了近似值的精确度。

例5 小马虎计算13个自然数的和的平均数的近似值是12.43,老师指出百分位上的有效数字错了。小马虎错在哪里?正确答案是多少?

[分析] 这道题看上去似乎条件不足,无法入手。但仔细想想,应用收缩思维来解,好像又出现一点光明。13个自然数的平均数是百分位错了,这个平均数一定是介于12.40与12.49之间,故思路正确,于是得到如下解法。

[解]

$$12.40 \times 13 = 161.20, \quad 12.49 \times 13 = 162.37$$

所以 $161.20 < 13$ 个自然数的和 < 162.37

可知,13个自然数的和是162(自然数的和应是整数)。

正确答案是 $162 \div 13 \approx 12.46$

答:13个自然数的和的平均数的近似值是12.46。

[点拨] 解题之道贵在避实击虚,化难为易,本例通过收缩思维和估算思维,简化了运算。

例6 一个四位数 $6 \square \square 6$ 能被134整除,求这个四位数和它除以134的商。

(第一届“九章杯”中国小学生数学竞赛决赛试题)

[分析] 原四位数一定在6006到6996之间,容易求出商的范围,利用整除性再求出这个商。

[解] 商的取值范围应在下列两个商数之间:

$$6006 \div 134 = 44 \cdots 110$$

$$6996 \div 134 = 52 \cdots 28$$

则正确的商值是范围在45到52之间的自然数。根据商值个位数与4相乘之积的个位数是6的条件分析,商值个位数必是9,所以所求商是49,被除数为 $(134 \times 49 =) 6566$ 。

答:这个四位数6566除以134的商是49。

[点拨] 本例也可通过判断商的个位数是4或9,十位数是4或5,然后逐一验证求解。

例7 有一个三位数,十位上的数字比个位上的数字大3;百位上的数字是个位上数字的平方。又知这个三位数比它的十位与个位上数字乘积的25倍还多202,这个三位数是多少?

[分析] 抓住“百位上的数字是个位上数字的平方”这一条件,可知它个位上的数字不会超过3(因为大于3的数的平方数都不是一位数),故可用估算法求解。

[解] 我们先“估”这个三位数的个位上是“3”,根据题意得这个三位数是963,接着用题目中的第二个条件来验证: $963 - 6 \times 3 \times 25 = 513$,大于题目所说的202,可见这次估值3过大;

再“估”它的个位数是“2”,这个三位数为452,然后验证:

$$452 - 5 \times 2 \times 25 = 452 - 250 = 202$$

完全符合题意。

答:这个三位数是452。

[点拨] 此例用估算法,收到了事半功倍的效果。

例8 计算: $12345678910111213 \div 31211101987654321$,求它的前三位数字。(小学奥数竞赛初赛A卷试题)

[分析] 对于小学生来说,这的确是一道比较复杂的问题,因为被除数和除数都是17位数,直接计算,费时且易错,怎样解答这道题呢?运用估算法,就十分方便。

[解] 将上式的除式写成分式。

$$\frac{12345678910111213}{31211101987654321} \quad \textcircled{1}$$

因将分母扩大,分数的值变小,将分母减小,分数的值变大,故有

$$\frac{12345678910111213}{3122000000000000} < \frac{12345678910111213}{31211101987654321} < \frac{12345678910111213}{3121000000000000} \quad \textcircled{2}$$

题目所求的是小数点后前三位数字,我们只需计算到小数点后的第四位就可以了。

②式中前面的分数值 $1234.5678 \div 3122 \approx 0.3954$ (商只要

取到小数点后的前4位,故被除数中8以后的数字不起作用)

②式中后面的分数值 $1234.5678 \div 3121 \approx 0.3955$

$$0.3954 < \frac{12345678910111213}{31211101987654321} < 0.3955$$

那么,小数点后前三位是395。

答:所求的前三位数字是395。

[点拨] 本例运用的放缩思维和估算思维解相当成功。

例9 11112222个棋子排成一个大的长方阵,每一行的棋子数比每一列的棋子数多一个。这个长方阵每一行有多少个棋子?

[分析] 拿到此题,有的同学想到用方程求解,设长方阵的每一行有 x 个棋子,则每一列有 $(x-1)$ 个棋子,则得方程

$$x \times (x - 1) = 11112222$$

$$x^2 - x = 11112222$$

可是在小学范围内,没有学过一元二次方程,无法求出 x ,于是解题陷入困境。

我们将11112222分解成两个整数的乘积,并且这两个整数只相差1,为此不妨用收缩思维法试一试。

[解] 因为 $3000 \times 3000 < 11112222 < 3000 \times 4000$,也就是说,两个整数都在3000至4000范围内,把11112222分解质因数

$$11112222 = 2 \times 3 \times 11 \times 101 \times 1667$$

再联想到我们经常计算的题目

$$3 \times 4 = 12$$

$$33 \times 34 = 1122$$

由此使我们不难想到大于3000,小于4000的数只有

$$2 \times 1667 = 3334, \quad 3 \times 11 \times 101 = 3333$$

检验一下:

$$3333 \times 3334 = 11112222$$

果然不错,由此得到每一行有 3334 个棋子。

[点拨] “算得准确”是解题的基本要求,本例综合运用了收缩思维、联想思维、估算思维等才使问题获解,由此可见,综合运用上述思维方法在解决数学问题时是何等重要!

例 10 在 0 与 1 之间有一些真分数,这些分数已不能再约分,并且每个分数的分子与分母的乘积都是 720。请你从小到大写出这些分数。(第五届北大少年数学邀请赛第二试试题)

[分析] 要求分数的分子与分母的乘积都是 720,而且分数已不能再约分,那么,把 720 分解质因数: $720 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$,则所求分数的分子是其中一部分因数的积,分母是另一部分因数的积,而且同一个质因数不能同时在分子、分母中出现。

此外,由于所求的分数是 0 与 1 之间的真分数,则分子小于分母。

[解] 把 720 分解质因数 $720 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$
按题中要求,所求分数是

$$\frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{3 \times 3 \times 5} = \frac{16}{45}$$

$$\frac{3 \times 3}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5} = \frac{9}{80}$$

$$\frac{5}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3} = \frac{5}{144}$$

$$\frac{1}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5} = \frac{1}{720}$$

按从小到大排列 $\frac{1}{720}$ $\frac{5}{144}$ $\frac{9}{80}$ $\frac{16}{45}$

[点拨] 0 与 1 之间的真分数有无限多个,要求其中分子与分母的乘积都是 720 的分数是有限个,再从这有限个分数中选出不能再约分的分数。



四、熟能生巧

1. 小华翻开数学课本,发现连续两页的页码数的积是2970。你知道这两个页码数各是多少吗?

2. 求 31.719×1.2798 的整数部分。

(第七届《小学生数学报》数学竞赛决赛试题)

3. 有一本书的中间被撕掉了一张,余下各页的页码数之和正好是1145。那么,被撕掉的那一张的页码数是几?

4. 司机在汽车行驶的某一时刻,看到里程表上指出的数目是一个对称数15951(所谓对称数就是从左到右和从右到左读起来都是一样的数)。4小时后里程计上又出现了一个新的对称数,问这辆汽车是以多大的速度行驶的?(按照交通部门的规定:汽车在普通公路上行驶的速度每小时不得超过70千米)

5. 求繁分数 $\frac{1}{\frac{1}{70} + \frac{1}{71} + \frac{1}{72} + \frac{1}{73} + \frac{1}{74}}$ 化简后的整数部分。

(1998年香港小学数学精英选拔赛试题)

6. 一批货,每次运95箱,则4次运不完,5次又不够运;每次运75箱,则6次运不完,7次又不够运;如果每次运65箱,运若干次正好运完。这批货有多少箱。