高等教育“十二五”规划教材

应用离散数学

Yingyong Lisan Shuxue

赵高长　主编

中国矿业大学出版社

高等教育"十二五"规划

应用离散数学

主　编　赵高长
副主编　周　彬

中国矿业大学出版社

内 容 提 要

本书全面介绍了理工类相关专业所必需的离散数学知识，具体内容包括数理逻辑、集合论、代数论及图论四个方面. 各篇内容相对独立而又有机联系，讲解与证明力求严格完整. 书中的例题、习题具有一定的典型性，理论上具有完整性和系统性，易于教学，便于自学. 本书在编写过程中力求采用现代方法诠释经典内容，结合实际生活并融入了实用算法，引进了建模思想，丰富了实验内容，将传统教学内容与现代教学资源有机结合在一起.

本书可作为高等院校数学与应用数学、计算机科学与技术、信息管理等专业开设的离散数学课程教材或教学参考书，也可供考研和相关专业技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

应用离散数学 / 赵高长主编. —徐州：中国矿业大学出版社，2011.7

ISBN 978-7-5646-1118-7

Ⅰ.①应… Ⅱ.①赵… Ⅲ.①离散数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O518

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 130049 号

书　　名 应用离散数学

主　　编 赵高长

责任编辑 褚建萍

责任校对 孙　景

出版发行 中国矿业大学出版社有限责任公司

（江苏省徐州市解放南路　邮编 221008）

营销热线 (0516)83885307　83884995

出版服务 (0516)83885767　83884920

网　　址 http://www.cumtp.com　**E-mail**:cumtpvip@cumtp.com

印　　刷 徐州中矿大印发科技有限公司

开　　本 787×960　1/16　**印张** 20.75　**字数** 395 千字

版次印次 2011 年 7 月第 1 版　2011 年 7 月第 1 次印刷

定　　价 38.00 元

前　言

离散数学是研究离散量的结构及其相互关系的应用数学学科.离散与连续是现实世界中物质运动对立统一的两个方面,离散数学与连续数学是描述、刻画和表达现实世界物质运动的两种重要工具.计算机的出现是人类文明史上最重要事件之一,它改变了人类的生活方式与生存条件,并对人类的工作方式甚至思维方式产生了极其重大与深远的影响.随着计算机科学的发展,作为研究有限与离散系统的离散数学已成为一门越来越重要的学科.由于计算机本身就是一个离散系统,计算机的许多性质只有在离散的框架下才能得到很好的解释.而计算机的高速发展与广泛应用,促进了信息数字化、符号化与离散化.离散数学已成为计算机科学与技术的重要理论基础之一,在计算机科学与技术等领域中有着广泛的应用.它不仅在可计算性与计算复杂性理论、算法与数据结构、程序设计语言、数值与符号计算、操作系统、软件工程、数据库与信息检索系统、人工智能、网络、计算机图形学、编码理论、密码学以及人机通信等领域中有着广泛的应用,而且它能够使学生熟悉和习惯抽象的符号表示及演算形式,培养和训练学生掌握使用数学语言或符号系统处理问题的基本方法,从而提高学生抽象思维和逻辑推理的能力.为了使学生在这两个方面得到良好的训练,并且有助于数学素质、数学修养、数学情感和数学审美情绪的培养,因此需要加强离散数学的教学.

本书不仅可作为高等院校数学与应用数学、信息管理和计算机科学与技术专业离散数学课程教材,也可以作为计算机软件专业水平考试的参考教材,还可供从事计算机软硬件开发和应用的科学技术人员使用.

本书的主要特色:

(1) 离散数学四部分核心内容(数理逻辑、集合论、代数论和图论)有机地结合在一起,前呼后应,互相联系.但各部分又相对独立,需要时也可单独使用.

(2) 强化基本概念和基本性质的论述.注重基本理论的理解,重要的定理与推论给出了严格的数学证明,内容翔实而清晰,在枯燥的理论中探索出一条全面掌握的新路子,以够用为原则重点突出,内容循序渐进,既能够启发和培养读者的抽象思维能力和严格的逻辑推理能力,还能确保读者的积极性.

(3) 尽量精选离散数学的经典例题及实际应用中的例子,尤其是和数学、计

算机科学与技术紧密联系的例子,以利于提高学生学习的兴趣和分析问题与解决问题的能力.

(4) 在内容阐述时力求深入浅出,语言通俗易懂,用简便的方法及工具处理一些复杂繁琐的问题,并配有大量习题.每章后面都有该章内容的简要小结.

(5) 在本书的最后增加离散数学常用算法,增强学生对离散数学的直观认识及应用离散数学解决实际问题的能力,同时为离散数学实验课程的开展开辟了一条新路.

(6) 在每个章节的后面增加相关数学史的内容及一些和实际问题密切相关的小实例,这些内容介绍了相关数学理论的来龙去脉,有助于提高学生的学习兴趣.

(7) 将内容进行合理分类,根据不同专业及课时安排的具体情况,本书在目录中用不同的标记标示,可以按类学习,在有限的教学资源及条件下最大程度地保障了学生对离散数学课程核心内容的掌握[编者建议本科生学时数可以安排为 48、64、72 学时. 48 学时的教学安排可仅讲授基本内容(未加标注);64 学时的教学安排可进一步讲授"*"标注的部分;72 学时的教学安排则可在前面基础上进一步增加讲授"**"标注的部分. 学时数不足 48 的可在基本内容基础上稍作删减;学时数在 72 以上的可适当安排数值实验环节;其他学时安排可自行作相应调整].

(8) 主要名词都有英语翻译.

全书共分四篇:第一篇数理逻辑,包括命题逻辑与谓词逻辑;第二篇集合论,包括集合的基本概念与运算、二元关系和函数;第三篇代数论,包括代数系统,半群、群、环、域、格及布尔代数等几个典型的代数系统;第四篇图论,包括图的基本概念、常见图及树.

本书由赵高长担任主编、周彬担任副主编,具体编写分工如下:第 1、2、7、8、9 章及附录、答案与提示由赵高长编写,第 4、5、6 章由周彬编写,第 3 章由丁正生编写.在编写过程中,得到西安科技大学乔宝明教授的支持与帮助,在此表示感谢!

本书在编写过程中参考了大量的离散数学书籍和资料,在此一并向有关作者表示感谢.

因作者水平有限,书中不妥及错误之处在所难免,恳请广大读者批评、指正.

编　者

2011 年 3 月

目　录

第一篇　数理逻辑

第二篇　集合论

第三篇 代数论

第四篇 图论

第一篇 数理逻辑

逻辑学是一门研究人类思维形式及思维规律的科学，概念是思维的基本单位.通过概念对事物是否具有某种属性进行肯定或否定的回答，这就是判断；由一个或几个判断推出另一判断的思维形式，就是推理.研究推理有很多种方法，数理逻辑是用数学方法来研究推理过程的科学.

数理逻辑包括五个主要部分：逻辑演算、证明论、公理化集合论、模型论及递归论.本篇仅介绍数理逻辑的基础部分：逻辑演算，它包括命题逻辑和谓词逻辑.

数理逻辑的发展被分为五个时期：(1) 数理逻辑前史时期——古典形式逻辑时期.这一时期主要论述亚里士多德的三段论、斯多阿学派的命题逻辑和中世纪形式逻辑所取得的成就；(2) 数理逻辑初创时期——逻辑代数时期.这一时期从莱布尼茨到施罗德，主要论述数理逻辑产生的社会历史背景、莱布尼茨数理逻辑思想、逻辑代数和关系逻辑的建立和发展；(3) 数理逻辑奠基时期.这一时期从 1879 年弗雷格《概念演算》的出版到希尔伯特的元数学纲领的提出，主要论述逻辑演算的建立、朴素集合论、第三次数学危机和公理集合论，为解决第三次数学危机三大学派所取得的重要结果：逻辑类理论、直觉主义数学基础和逻辑、形式公理学和证明论；(4) 数理逻辑发展初期.这一时期是 20 世纪 30 年代，主要论述哥德尔的几项重大结果——完全性定理、不完全性定理和连续统假设的一致性等以及在哥德尔不完全性定理之后所取得的一系列成果，例如形式语言中真值概念的定义、一般递归函数和图灵机理论、判定问题的重要成果，等等；(5) 数理逻辑现代发展时期.这一时期从 20 世纪 40 年代开始，主要内容是各种非经典逻辑演算和四论——模型论、集合论、递归论和证明论突飞猛进的发展.数理逻辑与计算机科学有着密切关系，程序设计方法学、计算机的逻辑设计、定理的自动证明都是以数理逻辑作为基础的.有些人将莱布尼茨称为数理逻辑的第一创始人、布尔为第二创始人、弗雷格为第三创始人，莱布尼茨致力于思维计算化，布尔专攻三段论的代数化，弗雷格则集数学与逻辑于一身.

数理逻辑之所以引人入胜，主要在于它采用了一整套人工符号，也正因为这个原因它又名符号逻辑.几个不显眼的逻辑符号经过不同排列组合就能表达人类的各种思维规律，进而将人类思维规律包括在一个系统中，这无疑是人类智力发展史上带有总结性的重大成果.

1 命题逻辑

1.1 命题与联结词

1.1.1 命题(proposition)

推理的要素是命题,命题逻辑构成了数理逻辑最基本的研究内容,并且是谓词逻辑的基础.

定义 1.1 命题是具有真假之分的陈述句.即命题有一个值(也可称为真值),真命题的值为“真”,假命题的值为“假”,分别用符号 T(或 1)和 F(或 0)表示.

例 1.1 (1) 西安是陕西省的省会.

(2) 拿破仑是法国人.

(3) $2+3=4$.

(4) 中国是欧洲的一个国家.

(5) 不小于 6 的偶数均可表示为两个奇素数的和.

(6) 请将门打开!

(7) 你是中学生吗?

(8) 这朵花多好看呀!

(9) $x+y=5$.

(10) 我正在说谎.

(1)到(4)都是对某种事物是否具有某种属性或关系进行了陈述,是命题,(1)、(2)是真命题,(3)、(4)是假命题;(5)是著名的哥德巴赫(C. Goldbach)猜想,虽然它的真假目前还不能肯定,终有一天会知道真假,它仍是一个命题;(6)是祈使句;(7)是疑问句;(8)是感叹句;(9)虽是一个陈述句,但句子中含有一个不确定的变元 x,不是命题;(10)也是一个陈述句,但不能分辨出真假,它的真假均能导致矛盾(语义悖论);因此(6)~(10)都不是命题.

为了对命题进行逻辑演算,我们采用数学方法将命题符号化.命题一般用大写的字母 $A,B,\cdots,P,Q,\cdots$ 或带有下标的大写字母来表示.一个抽象的真命题

也可以用 1 表示,一个抽象的假命题也可以用 0 表示.

上面的命题均是一些简单的陈述句,这些命题称为**原子命题**(atomic proposition).原子命题是不能由更简单的命题构成,它们是不可再分的.

例 1.2 (1) 如果天下雨,则地上湿.

(2) 西安不是陕西省的省会.

(3) 今天是星期一或星期二.

(4) Newton 既是一个伟大的数学家,又是一个伟大的物理学家.

(5) 三角形两边相等当且仅当它们对角相等.

(6) 幸福的家庭都是相似的,但不幸的家庭各有各的不幸.

上面这些命题均可由更简单的命题构成,即它们均是可再分的.称上面这些命题为**复合命题**(compound proposition).它们是由原子命题通过一些逻辑词(下称"联结词")构成.

1.1.2 联结词(connectives)

在命题逻辑中,常用单个字母 P,Q 等表示原子命题,它是具体命题的抽象.因为在研究推理时,关心的仅是 P,Q 取什么真值,不涉及它所代表命题的具体内容.由于 P,Q 可独立且取不同的值(或者说,P,Q 可以代表任意的具体命题),因此又称 P,Q 为命题变项或原子变项.给原子变项取某一值,也称给原子变项**指派**(assignment)(或指定)了某一值.

复合命题中常用的联结词有:否定、析取、合取、蕴涵、等价联结词,分别用以下符号表示:$\neg$,$\vee$,$\wedge$,$\rightarrow$,$\leftrightarrow$.通过符号表示命题的过程称为命题符号化.

1.1.2.1 否定(negation)联结词

定义 1.2 设 P 是一个命题,则复合命题"非 P"称为 P 的**否定式**(negative type),记作$\neg P$,$\neg$ 为否定联结词.显然,当 P 是真命题,$\neg P$ 是一个假命题;反之,P 是假命题时,$\neg P$ 是一个真命题.关系如表 1.1 所示.

表 1.1

P	$\neg P$
T	F
F	T

例如在例 1.2 中(2),如果用 P 表示西安是陕西省的省会,则$\neg P$ 表示西安不是陕西省的省会.

例 1.3 一个照明电路中用一个"单刀双掷"开关控制灯 D_1 和灯 D_2,如图 1.1所示.开关向上合时,灯 D_1 亮,灯 D_2 灭;开关向下合时,灯 D_2 亮,灯 D_1 灭.以

A、B 表示灯 D_1、D_2亮灭状态，亮值为 1、灭为 0，则 $B=\neg A$.

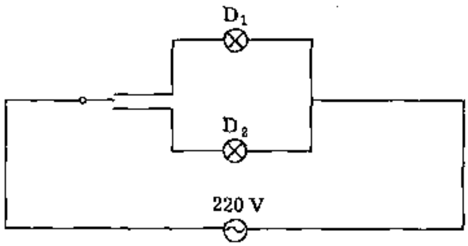

图 1.1

1.1.2.2　析取(disjunction)联结词

定义 1.3　两个命题 P、Q 的析取是一个复合命题，记作 $P\vee Q$，$\vee$ 为**析取联结词**，读作"P 或 Q". $P\vee Q$ 为真当且仅当 P 与 Q 中至少有一个为真，只有两个都为假时，$P\vee Q$ 为假.

关系如表 1.2 所示.

表 1.2

P	Q	$P\vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

例如例 1.2 中(3)，如果用 P 表示今天是星期一，用 Q 表示今天是星期二，则 $P\vee Q$ 表示今天是星期一或星期二.

例 1.4　P：李明在看书，Q：李明在听音乐，则 $P\vee Q$：李明在看书或在听音乐.

在实际命题中，自然语言中的"或"，有"相容或"与"不相容或"之分."张华是大学生或李平是大学生"中的"或"是"相容或"；"今天是星期一或今天是星期二"中的"或"是"不相容或"，这是因为"今天是星期一"和"今天是星期二"同时为真时，导致矛盾. 显然析取联结词 $\vee$ 表示的是"可相容".

1.1.2.3　合取(conjunction)联结词

定义 1.4　两个命题 P、Q 的合取是一个复合命题，记作 $P\wedge Q$，$\wedge$ 为**合取联结词**，读作"P 与 Q"，$P\wedge Q$ 为真当且仅当 P 与 Q 同时为真.

关系如表 1.3 所示.

表 1.3

P	Q	$P\wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

例如例 1.2 中(4),如果用 P 表示 Newton 是一个伟大的数学家,用 Q 表示 Newton 是一个伟大的物理学家,则 $P\wedge Q$ 表示 Newton 既是一个伟大的数学家,又是一个伟大的物理学家.

例 1.5 P:张强身体好,Q:张强学习好,R:张强思想品德好,则 $P\wedge Q\wedge R$:张强为三好学生.

1.1.2.4 蕴涵(implication)联结词

定义 1.5 设有两个命题 P、Q,"如果 P,则 Q"是一个复合命题,记作 $P\rightarrow Q$,$\rightarrow$为蕴涵联结词,$P\rightarrow Q$ 为假当且仅当 P 为真而 Q 为假.常称 P 为蕴涵式的**前件**(antecedent),Q 为蕴涵式的**后件**(consequence).

关系如表 1.4 所示.

表 1.4

P	Q	$P\rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

例如例 1.2 中(1),如果用 P 表示天下雨,用 Q 表示地上湿,则 $P\rightarrow Q$ 表示如果天下雨,则地上湿.

称命题 $P\rightarrow Q$ 为原命题,则 $Q\rightarrow P$ 为其逆命题,$\neg P\rightarrow\neg Q$ 为其否命题,而 $\neg Q\rightarrow\neg P$ 为其逆否命题.

例 1.6 将"如果今天是星期四,那么我今天有英语考试"看成原命题,那么其逆命题、否命题和逆否命题分别是:

(1) 如果我今天有英语考试,那么今天是星期四.

(2) 如果今天不是星期四,那么我今天没有英语考试.

(3) 如果我今天没有英语考试，那么今天不是星期四.

$P \to Q$ 表示的基本逻辑关系是，Q 是 P 的必要条件，或 P 是 Q 的充分条件. 因此，复合命题"只要 P 就 Q"，"P 仅当 Q"，"只有 Q 才 P"等，都可以符号化为 $P \to Q$ 的形式.

如令 P：天下雨，Q：我骑自行车上班，"只有不下雨，我才骑自行车上班"符号化为 $Q \to \neg P$.

1.1.2.5　等价(equivalence)联结词

定义 1.6　设有两个命题 P、Q，"P 当且仅当 Q"是一个复合命题，记作 $P \leftrightarrow Q$，$\leftrightarrow$ 为等价联结词，$P \leftrightarrow Q$ 为真当且仅当 P 和 Q 同真同假.

关系如表 1.5 所示.

表 1.5

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

例如例 1.2 中(5)，如果用 P 表示三角形两边相等，用 Q 表示它们对角相等，则 $P \leftrightarrow Q$ 表示三角形两边相等当且仅当它们对角相等.

例 1.7　将下列命题符号化，并讨论它们的真值.

(1) π 是无理数当且仅当加拿大位于亚洲.

(2) $2+3=5$ 的充要条件是 π 是无理数.

(3) 若两圆 A 和 B 的面积相等，则它们的半径相等；反之亦然.

(4) 当王小红心情愉快时，她就唱歌；反之，当她唱歌时，一定心情愉快.

解　(1) 设 P：π 是无理数，Q：加拿大位于亚洲，符号化为 $P \leftrightarrow Q$，真值为 0.

(2) 设 P：$2+3=5$，Q：π 是无理数，符号化为 $P \leftrightarrow Q$，真值为 1.

(3) 设 P：两圆 A 和 B 的面积相等，Q：两圆 A、B 的半径相等，符号化为 $P \leftrightarrow Q$，真值为 1.

(4) 设 P：王小红心情愉快，Q：王小红唱歌，符号化为 $P \leftrightarrow Q$，真值由具体情况而定.

以上介绍的 5 种常用联结词也称为真值联结词或逻辑联结词. 在命题逻辑中，可用这些联结词将各种各样的复合命题符号化. 基本步骤如下：

(1) 分析各简单命题，将它们符号化；

(2) 使用合适的联结词，把简单命题逐个联结起来，组成复合命题的符号化表示.

命题符号化时可能同时使用多种逻辑联结词，因此，命题符号化涉及逻辑运算的先后次序问题. 对前面讲过的 5 种逻辑联结词，规定运算的先后次序为(自左向右)：$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$. 对于同一优先级的联结词，先出现的先运算. 由于基于运算的先后次序来理解逻辑表达式往往费时费力，用添加括号的办法，按先括号内后括号外的规则进行命题运算. 推荐采用添加括号的方法处理逻辑运算的先后次序.

例 1.8　将下列命题符号化.

(1) 小王现在在宿舍或在图书馆.

(2) 选小王或小李中的一人当班长.

解　各命题符号化如下：

(1) 这里的"或"是排斥或，但因小王在宿舍与在图书馆不能同时发生，因而可符号化为 $P \vee Q$. 其中 P：小王在宿舍；Q：小王在图书馆.

(2) 这里的"或"也为排斥或. 设 P：选小王当班长；Q：选小李当班长. 因为 P 与 Q 可同时为真，所以符号化为$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$，而不应符号化为$P \vee Q$.

例 1.9　将下列命题符号化.

(1) 10 能被 2 整除，3 是偶数.

(2) 2 是素数或是合数.

(3) 如果 $2+2=6$，则 5 是奇数.

(4) 只有 4 是偶数，3 才能被 2 整除.

解　各命题符号化如下：

(1) 设 P：10 能被 2 整除，Q：3 是偶数，则可符号化为：$P \wedge Q$.

(2) 设 P：2 是素数，Q：2 是合数，则可符号化为：$P \vee Q$.

(3) 设 P：$2+2=6$，Q：5 是奇数，则可符号化为：$P \rightarrow Q$.

(4) 设 P：3 能被 2 整除，Q：4 是偶数，则可符号化为：$P \rightarrow Q$，也可以符号化为：$\neg Q \rightarrow \neg P$.

例 1.10　(实例)甲手里有一个围棋子，要乙来猜棋子的颜色是白的还是黑的. 条件：只允许乙问一个只能回答"是"或"否"的问题，但甲可以说真话，也可以说假话. 问乙可以向甲提出一个什么问题，然后从甲回答"是"或"否"中就能判断甲手中棋子的颜色?

解　问题的实质是要设计一个复合命题. 这个复合命题，应使乙得到的回答如表 1.6 所示.

表 1.6

	若棋子为白色	若棋子为黑色
若甲说真话	甲回答“是”	甲回答“否”
若甲说假话	甲回答“是”	甲回答“否”

这样乙就可以断定棋子为白色还是黑色.

但另一方面,甲在说假话时,与其内心的真实回答相反,这样甲内心的真实回答如表 1.7 所示.

表 1.7

	若棋子为白色	若棋子为黑色
若甲说真话	甲心里回答“是”	甲心里回答“否”
若甲说假话	甲心里回答“否”	甲心里回答“是”

令命题 P 表示:“棋子为白色”;Q 表示:“甲说的是真话”;S 表示:“对乙问的问题,甲心里的回答为‘是’”,于是可得真值表 1.8.

表 1.8

P	Q	S
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

构造复合命题 $S=(\neg P\vee Q)\wedge(\neg Q\vee P)$.

即问题是:“要么你说的是真话,要么棋子是黑的”和“要么你说的是假话,要么棋子是白的”这话对吗?按照我们的设计,如果得到的回答为“是”,则棋子必为白色;如果回答为“否”,则棋子是黑的.

这个复合命题,句子很长且说起来别扭,如果我们熟悉了逻辑运算律(后文),此命题可化简为 $P\wedge Q\vee\neg P\wedge\neg Q$. 这样叙述起来就很简洁清楚了:“棋子是白的且你说了真话或者棋子是黑的且你说了假话”对吗?

实验思考题 在互联网上查找从西安到北京或从西安到上海的每天上午 7:00 到 11:00 到达的火车车次.

1.2 命题公式及其真值表

简单命题是命题逻辑中最基本的研究单位，其真值是确定的，又称为**命题常项**[或**命题常元**(propositional constant)]. 命题常项相当于初等数学中的常数. 初等数学中还有变量，对应地，这里有命题变项(或命题变元). 取值 1(真)或 0(假)的变元称为**命题变元**(propositional variable)或**命题变项**.

1.2.1 命题公式

命题公式是由命题常元、命题变元、命题联结词和圆括号等所组成的字符串.

定义 1.7 **命题公式**(propositional formula)(简称公式)的递归定义：

(1) 0、1、单个命题常元、单个命题变元是命题公式；

(2) 如果 P 和 Q 是命题公式，则 $(\neg P)$、$(P\wedge Q)$、$(P\vee Q)$、$(P\rightarrow Q)$、$(P\leftrightarrow Q)$也是命题公式；

(3) 只有有限次地利用上述(1)、(2)所产生的符号串才是命题公式.

在公式中最外层的括号可以省去.

定义 1.8 如果 C 是公式 A 中的一个连续部分，而 C 本身也是一个公式，则称 C 为 A 的子公式(subformula).

例 1.11 $\neg(P\vee Q)$、$P\rightarrow(Q\rightarrow R)$是公式，但 $PQ\rightarrow R$、$\neg P\vee\rightarrow R$ 等都不是命题公式.

1.2.2 公式的真值表及分类

一个含有命题变元的命题公式是没有真假值的，仅当在一个公式中命题变元用确定的命题代入时，才得到一个命题. 这个命题的值，取决于代换命题变元的那些命题的值.

设 $P_1,P_2,\cdots,P_n$是出现在公式 A 中的全部命题变项，给 $P_1,P_2,\cdots,P_n$各指定一个值，称为对公式 A 的一个赋值(或解释). 若指定的一组值使 A 的值为 1，则称这组值为 A 的**成真赋值**(true assignment)；若使 A 为 0，则称这组值为 A 的**成假赋值**(false assignment). 由于每个命题变项有真和假两种赋值，含 $n(n\geqslant 1)$个命题变项的公式共有 2^n 个不同的赋值.

定义 1.9 将命题公式 A 在所有赋值下取值情况列成表，称为 A 的**真值表**(truth table).

命题公式真值表的构造步骤如下：

(1) 若公式 A 共有 $n(n\geqslant 1)$个变元，则真值表第一行的 n 列排出 n 个变元(先按字母后按下角标排序). 公式放在第 $n+1$ 列；