中国学生解题方法大全系列

掌握一个解题方法
比做一百道题更重要

初中数学

IETIFANGFA

解题方法大全

（初一）

山西教育出版社

初中数学

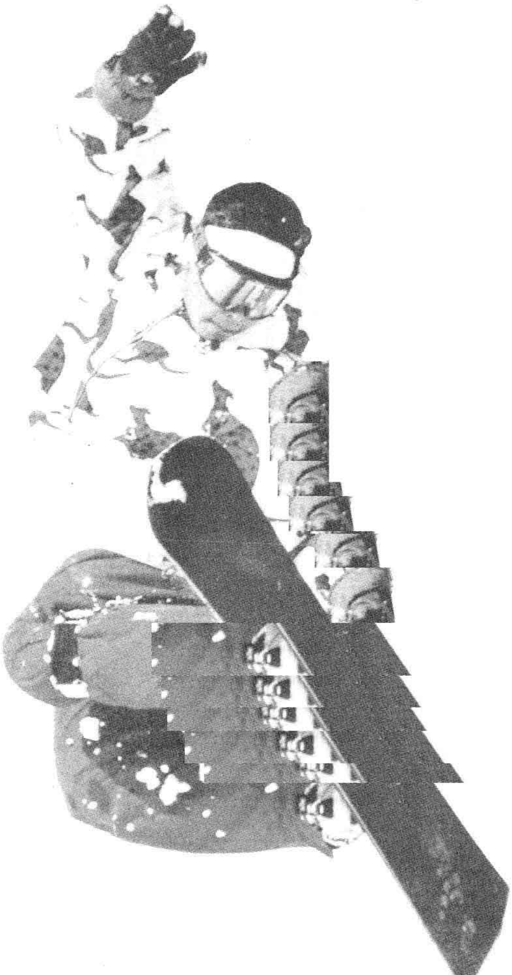
IETIFANGFA

解题方法大全

（初一）

初中数学解题方法大全

（初一）



本册主编　景　山
本册副主编　张建生

山西教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

初中数学解题方法大会.初一/景山,张建生编.—太原:山西教育出版社,2003.9
ISBN 7-5440-2492-X

Ⅰ.初… Ⅱ.①景…②张… Ⅲ.数学课-初中-解题 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 019181 号

山西教育出版社出版发行
(太原市迎泽园小区 2 号楼)
太原市新华胶印厂印刷　新华书店经销
2003 年 9 月第 1 版　山西第 2 次印刷
开本:850×1168　1/32　印张:9.5
字数:232 千字　印数:10001-25000 册
定价:10.00 元

前　　言

在基础教育中，数学是一门主课，世界各个国家都是如此．为什么人们如此重视数学呢？因数学是训练思维的体操，数学是打开科学大门的钥匙，是人们进行理性探讨的工具．数学是一种文化，属于一种科学文化，属于一种理性文化．

初中数学是打开人脑智慧之门的重要途径之一．要学好数学需要多种能力的综合，其中思维能力尤为重要．

本(丛)书介绍的解题方法、思维方法、解题窍门，符合初中生的思维特点和认识水平，深受同学们喜爱．这些是我们在多年的教学中发现、积累、总结的，有的还是第一次系统地向全国初中生作介绍．这些方法与初中数学教材有机结合，巧妙而有趣，易学、好用又好记．有这些思维方法窍门，不仅使解题快捷，而且更能激发同学们学习数学的兴趣，提高灵活解题的能力．

本(丛)书囊括了初中数学全部的知识点，例题最为典型，每道例题都代表着一个类型、一个知识点，只要把握好例题的思维方法，就能很好地掌握一个或几个知识点；体例最新，每道例题，解前都有分析，解题后有点评或误区点拨，且每章后都有配套练习题，旨在提高学生综合运用知识的能力．

本(丛)书内容翔实、知识点密集，实用性强，通过深入浅出、一点即通的讲解，既解决了初中学生解题中所遇到的难关，又把读者引到一个新的思维境界．同学们用它辅助数学学习，可开思维之窍，入解题之门，养成遇到问题抓本质的习惯；而且还可沟通不同知识的内在联系，有助于提高解题的技能和技巧，使学生受益终身；教师将它引入课堂，能活跃课堂气氛，增强教学艺术．所以它不

仅是初中生开阔眼界、拓宽思维的有益读物，而且对初中数学教师的教学也有一定的参考价值.

耕耘者总盼着丰收的金秋，这本(丛)书如能为身处题海中的初中生朋友送去一叶小舟，一副双桨，希你们顺利到达理想的彼岸.能为开启同学们的智慧带来一点裨益，作者将感到极大的欣慰.由于时间仓促，水平有限，书中缺点错误在所难免，敬请广大读者批评指正.

目 录

一、用字母表示数

算术与代数是研究数的学科,算术仅用数字表示特殊的数,代数则用字母表示普遍的数.用字母代表数,列出代数式,这是一个由特殊到一般的过程;用具体的数代替代数式里的字母进行计算,求出代数式的值,这是一个由一般到特殊的过程.这种特殊与一般的互相转化,是数学中重要的思维方法.

用字母表示数,我们必须明确以下几点:

1.要注意字母表示数的任意性.

如:比较 $2a$ 和 $3a$ 的大小.

这道看来十分简单的题目,似乎可以马上做出解答,有些学生拿到题目,就脱口而出:$2a<3a$,其实仔细想想就会领悟到不一定如此.因字母 a 可表示正数,可表示零,也可表示负数.所以解答这类问题时,必须考虑到字母表示数的任意性,即字母 a 可以表示一切有理数.因而要用分类的方法解答如下:当 $a>0$ 时,$2a<3a$;当 $a=0$ 时,$2a=3a$;当 $a<0$ 时,$2a>3a$.

2.要注意字母表示数的相对确定性.

字母虽然可以任意取值,但一取定,就确定了.比如,公式 $S=ab$ 揭示了长方形的面积等于长与宽之积的共同性.但当 a 取 5,b 取 4 时,则面积 S 为 20.

在同一个问题中相同字母不能表示不同的数值.大家知道:“两个数相加,交换加数的位置和不变.”这个加法交换律可以用“$a+b=b+a$”表示,且 a、b 表示一切有理数,但左右两边的 a 和 b 必须分别表示同一数.例如左边 $a=3,b=5$,右边 $a=2,b=6$,虽然它们的和相等,但却不是原等式的意义了.

3. 要注意字母表示数的实际意义.

字母表示数，不能使它所表示的实际数量失掉意义，即字母所取的值，既要符合运算的要求，又要符合实际意义.

在代数式中，数字因数与字母因数及字母因数之间的乘号是可以省略的，而当字母被数值代替时，需补上乘号.

用字母表示数，在列代数式和代数式求值中有着广泛的运用.

【例 1】 当 $x=0$、$x=-\frac{3}{4}$、$x=2$ 时，求代数式 $\frac{1}{2}x^2-x+1$ 的值.

【思路分析】 代数式 $\frac{1}{2}x^2-x+1$ 的值是由 x 的取值决定的，x 每确定一个值，就能求出一个代数式的值. 当 $x=0$ 时，就是用 0 替换代数式中的 x；$x=-\frac{3}{4}$ 时，就是用 $-\frac{3}{4}$ 替换代数式中的 x；当 $x=2$ 时，就是用 2 替换代数式中的 x. 代入时，原来的数字和运算符号都不变，将原来省去的乘号重新添上，然后按运算顺序分别计算出代数式的值.

【解】 当 $x=0$ 时，则

$$\frac{1}{2}x^2-x+1=\frac{1}{2}\times 0^2-0+1=1;$$

当 $x=-\frac{3}{4}$ 时，则

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x^2-x+1&=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{3}{4}\right)^2-\left(-\frac{3}{4}\right)+1\\&=\frac{1}{2}\times\frac{9}{16}+\frac{3}{4}+1\\&=\frac{9}{32}+\frac{24}{32}+1\\&=\frac{33}{32}+1\\&=2\frac{1}{32};\end{aligned}$$

当 $x=2$ 时，则

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x^2-x+1&=\frac{1}{2}\times 2^2-2+1\\&=2-2+1\\&=1.\end{aligned}$$

【知识点滴】(1)注意求代数式的值的书写格式：代入数值前一定要指明字母的取值，即把"当……时"写出来；

(2)求代数式的值，第一步只代入，不计算.第二步计算，求出代数式的值；

(3)当代入的数是分数或负数(以后要学到)时，要添上括号；

(4)由此例可以看出：一个代数式的值，是由代数式中的字母所取的值确定的，字母取值不同，一般代数式的值也不同.

【例2】 如图1-1所示.

(1)用代数式表示图中阴影部分的面积；

(2)当 $a=4$、$b=2$ 时，求代数式之值.

【思路分析】如图1-1所示，正方形的面积可分割为两个面积相等的小直角三角形、两个面积相等的大直角三角形、长方形三部分，故由图可见，阴影部分的面积等于正方形面积减去两个小直角三角形的面积，再减去两个大直角三角形的面积之差.

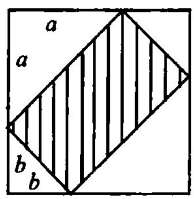


图 1-1

【解】

(1)
$$\begin{aligned}S_{阴影}&=S_{正方形}-2S_{小三角形}-2S_{大三角形}\\&=(a+b)^2-2\times\frac{1}{2}b^2-2\times\frac{1}{2}a^2\\&=(a+b)^2-b^2-a^2.\end{aligned}$$

(2)当 $a=4$、$b=2$ 时，则

$$\begin{aligned}S_{阴影}&=(4+2)^2-2^2-4^2\\&=36-4-16\end{aligned}$$

$= 16.$

【知识点滴】这里用分割法求解,是一种常用的解题思维方法.

【例 3】 测得某弹簧的长度 y 与所挂重物重量 x 的关系有一组数据(该弹簧所挂重物最多不得超过 15 千克,否则弹簧变形):

x(千克)	0	1	2	3	4	5	…
y(厘米)	5	$0.5+5$	$1.0+5$	$1.5+5$	$2.0+5$	$2.5+5$	…

(1)试写出弹簧的长度 y,用所挂重物 x 表示的公式;

(2)计算:当 $x=10$ 千克和 $x=12$ 千克时弹簧的长度.

【思路分析】怎样用含 x 的代数式表示 y 呢?在 y 这一栏中的数是两部分的和.先看"+"号前的部分与 x 的关系:

$$\frac{0.5}{1}=\frac{1.0}{2}=\frac{1.5}{3}=\cdots.$$

因此,得 y 前一部分是 $0.5x$,再加上 5,得弹簧的长度 y.

【解】(1)由表格可知($x\leqslant 15$)

$$y=(0.5x+5)\text{厘米}.$$

(2)当 $x=10$ 千克时,$y=0.5\times10+5=10$(厘米);

当 $x=12$ 千克时,$y=0.5\times12+5=11$(厘米).

【知识点滴】(1)若题目中有单位的列代数式问题,列出的代数式应带上单位.列出的代数式是加减关系的,应把式子括起来,后面再写上单位;

(2)此题有人在解第 1 小题时,写成

$$y=0.5x+5 \quad \text{或} \quad y=0.5+5\text{厘米}.$$

这样对吗?为什么?

【例 4】 已知 $a+\frac{1}{a}=5$,求代数式 $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+a+7+\frac{1}{a}$ 的值.

【思路分析】此题没有给出 a 的值,目前又无法求出 a 的值,

所以不能直接用 a 的值代入代数式求值. 但观察代数式,我们可以把$(a+\frac{1}{a})$看成一个整体,用 5 来替换,则$(a+\frac{1}{a})^2$ 为 5^2,再根据加法交换律和结合律,使问题迎刃而解.

【解】 已知 $a+\frac{1}{a}=5$,整理所求代数式并代入已知时得

$$\begin{aligned}&(a+\frac{1}{a})^2+a+7+\frac{1}{a}\\&=(a+\frac{1}{a})^2+(a+\frac{1}{a})+7\\&=5^2+5+7\\&=37.\end{aligned}$$

【知识点滴】 因为代数式中的每个字母都表示数,所以代数式也表示数. 数的一些运算也适用于代数式.

【例 5】 已知 $x^2+x-1=0$,求代数式 $2x^3+4x^2+3$ 的值.

【思路分析】 此题按常规的解题习惯,须求出 $x^2+x-1=0$ 中 x 的值,这样,立即产生了一个问题,初一我们没有学过一元二次方程. 但若把所求的代数式变形,运用整体代入,则可得到如下两种解法.

【解法一】 $\because\quad x^2+x-1=0,$

$\therefore\quad x^2+x+1=2.$

$\therefore\quad x^3-1=2(x-1).$

即 $\quad x^3=2x-1.$

$$\therefore\quad 2x^3+4x^2+3=2(2x-1)+4x^2+3=4(x^2+x-1)+5=5.$$

【解法二】 $\because\quad x^2+x-1=0,$

$\therefore\quad x^2+x=1.$

$$\therefore\quad 2x^3+4x^2+3=2x(x^2+x)+2x^2+3$$

$$=2(x^2+1)+3$$
$$=5.$$

【题末点评】本例用整体代入,不仅化难为易,且妙趣横生.

【例6】 已知 $mn=1$,求代数式$\frac{m}{m+1}+\frac{n}{n+1}$的值.

【思路分析一】通分,化异分母为同分母.

【解法一】 $\frac{m}{m+1}+\frac{n}{n+1}=\frac{m(n+1)+n(m+1)}{(m+1)(n+1)}$
$$=\frac{mn+m+n+mn}{(m+1)(n+1)}=\frac{mn+m+n+1}{mn+m+n+1}$$
$$=1.$$

【思路分析二】将两式中的"1"用 mn 代换,然后再化简求出值.

【解法二】 $\frac{m}{m+1}+\frac{n}{n+1}=\frac{m}{m+mn}+\frac{n}{n+mn}$
$$=\frac{1}{1+n}+\frac{1}{1+m}=\frac{1+m+1+n}{(1+n)(1+m)}$$
$$=\frac{1+m+n+1}{1+m+n+mn}=\frac{1+m+n+1}{1+m+n+1}=1.$$

【思路分析三】根据 m、n 互为倒数的关系,将第二个分母化成与第一个分式的分母相同.

【解法三】 $\frac{m}{m+1}+\frac{n}{n+1}$
$$=\frac{m}{m+1}+\frac{\frac{1}{m}}{\frac{1}{m}+1}=\frac{m}{m+1}+\frac{1}{1+m}$$
$$=\frac{m+1}{m+1}=1.$$

【思路分析四】用$\frac{m}{m}$乘以第二个分式,再用 $mn=1$ 代换化为同分母.

【解法四】 $\dfrac{m}{m+1}+\dfrac{n}{n+1}=\dfrac{m}{m+1}+\dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{m}{m}$

$=\dfrac{m}{m+1}+\dfrac{nm}{mn+m}=\dfrac{m}{m+1}+\dfrac{1}{1+m}=1.$

【思路分析五】将第一个分式中的 1 用 mn 代替,然后化为同分母.

【解法五】 $\dfrac{m}{m+1}+\dfrac{n}{n+1}$

$=\dfrac{m}{m+mn}+\dfrac{n}{n+1}$

$=\dfrac{m}{m(1+n)}+\dfrac{n}{n+1}$

$=\dfrac{1}{1+n}+\dfrac{n}{n+1}=1.$

【思路分析六】将两个分式提取 m,然后化为同分母.

【解法六】 $\dfrac{m}{m+1}+\dfrac{n}{n+1}=m\left[\dfrac{1}{m+1}+\dfrac{n}{m(n+1)}\right]$

$=m\left[\dfrac{1}{m+1}+\dfrac{n}{mn+m}\right]$

$=m\left[\dfrac{1}{m+1}+\dfrac{n}{1+m}\right]$

$=m\left(\dfrac{1+n}{1+m}\right)$

$=\dfrac{m+mn}{1+m}=\dfrac{m+1}{1+m}=1.$

【思路分析七】将第一个分式中的分子、分母同乘以 n,再用 $mn=1$ 代换.

【解法七】 $\dfrac{m}{m+1}+\dfrac{n}{n+1}=\dfrac{mn}{(m+1)n}+\dfrac{n}{n+1}$

$=\dfrac{1}{mn+n}+\dfrac{n}{n+1}=\dfrac{1}{1+n}+\dfrac{n}{n+1}=1.$

【思路分析八】令 $m=n=1$.

【解法八】 $\dfrac{m}{m+1}+\dfrac{n}{n+1}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1.$

【题末点评】本题虽小,但集多种解法于一题,这些解法是解决复杂问题的关键,请同学们加以领悟.

✓**【例 7】** 已知 $abc=1$,求代数式$\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}$的值.

【思路分析一】观察此题的三个分式,并注意到条件 $abc=1$,发现:如将第二个分式分子、分母同乘以 a,第三个分式分子、分母同乘以 ab,则三个分式的分母通过代换就都是 $ab+a+1$.从而可得如下解法.

【解法一】原式$=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{a\cdot b}{a(bc+b+1)}+\frac{ab\cdot c}{ab(ca+c+1)}$

$$=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{1+ab+a}+\frac{1}{a+1+ab}$$

$$=\frac{ab+a+1}{ab+a+1}$$

$$=1.$$

【思路分析二】用特殊值代入.

【解法二】令 $a=-1,b=-1,c=1$ 满足 $abc=1$,代入原式得

$$原式=\frac{-1}{1+(-1)+1}+\frac{-1}{-1-1+1}+\frac{1}{-1+1+1}$$

$$=-1+1+1$$

$$=1.$$

【知识点滴】在解法二的解题过程中,应用特殊值代入的方法,蕴藏着从一般到特殊的数学思维方法,即在含字母的代数等式中对字母赋以一些特定的值,从而得到一些特殊结论,称之为赋值法,请在解题中注意体会运用.

【例 8】 若 $(a-1)^2+(ab-2)^2=0$,求代数式 $\frac{1}{ab}+\frac{1}{(a+1)(b+1)}+\frac{1}{(a+2)(b+2)}+\cdots+\frac{1}{(a+1996)(b+1996)}$的

值.

【思路分析】 本题已知条件中有两个未知数,需用非负数的概念求解.

【解】 由已知等式,得 $a-1=0$, $ab-2=0$,故 $a=1$, $b=2$.将 a、b 的值代入原式,得

$$\begin{aligned}原式&=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{1997\times1998}\\&=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\\&\quad+\left(\frac{1}{1997}-\frac{1}{1998}\right)\\&=1-\frac{1}{1998}=\frac{1997}{1998}.\end{aligned}$$

【题末点评】 本题解法通过拆项免去了复杂的计算,使解答简捷明快.