統計推論

下册

李景仁著

汪永祺譯

臺灣商務印書館發行

統　計　推　論

下　册

李　景　仁　著
汪　永　祺　譯

臺灣商務印書館發行

中華民國六十年一月初版
中華民國七十年三月二版

統計推論 下册

基本定價四元七角正

原著者 李景仁
譯述者 汪永祺
發行人 朱建民
臺北市重慶南路一段三十七號
印刷及發行所 臺灣商務印書館股份有限公司
登記證：局版臺業字第〇八三六號

〇三三一一

序

統計推論分上下兩册。上册講的是統計學的基本原理和方法，而這一册却講的是複迴歸和它的引申。應用複迴歸，新的方法便給引了出來，老的方法也得到了效率上的改善。

讀這本書時，應當先熟悉簡單直線迴歸和變方與變積分析，而這些材料都是在上册前二十章內講過的。

統計學裏討論到的因子通常都是品質性的，這本書的主旨便是倡導數量性因子數量化；所以就將因子爲數量性的複因子試驗用複曲線迴歸方法來解，未採用反應曲面設計的試驗便也就配合上反應曲面。這些做法有一項好處，如果處理均值能用一個低於（$p-1$）次的方程式代表而p是一個因子的變數，處理均值的變方便會縮小。

這本書大致可以分成五部分：

第一部分　第二十七章
第二部分　第二十八，二十九，三十，三十一章
第三部分　第三十二章
第四部分　第三十三，三十四，三十五章
第五部分　第三十六，三十七章

第一部分討論的是矩陣代數，第二部分是複迴歸和曲線迴歸，第三部分是常數配合，第四部分是迴歸方法在變方與變積分析上的應用，第五部分是試驗設計，如果是短期學程，可以省略第三和第五部分而不致破壞完整性。學程更短，乾脆祇教第一和第二部分好了；這兩部分便是一般所謂迴歸問題的材料。

全書裏處處用到矩陣代數，所以第二十七章便成爲必需熟諳的知識。不過，讀者們却不必看到第二十七章的標題而害怕；因爲這本書的材料曾經由一百五十位程度不超過高中代數的學生試用過，還沒有一個人學不會。

複迴歸和變方與變積分析在一般人心目中是兩種不同的方法，而

且每種方法都有一批擁護者，但這本書裏却將它們打成一片了。這種做法可以說是兩全其美的：偏愛變方分析法的人士可以用因子的數量性去砥礪自己喜歡的方法，而偏愛複迴歸的人士也不難把自變數的領域擴充到品質性的圈子裏去。

複迴歸法還有一樣好處，便是可以用在任一種類型的問題上，所以它是可以用來統一統計計算程序的。如果應用電腦，這項好處便更顯得重要；因爲，複迴歸的處理程式到處都有，就不必一一設計了。不過，這兒雖然說到電腦，可並沒有指明書中的方法非用電腦不可，用平常的計算機倒也能解決；其實，書中全部數例都未用過電腦。

統一的計算程序可以經由一套手續做到，而這套手續不妨稱爲處理的數量化。如果有一個 p 變級的品質性因子，用 x 代表賦給 p 個變級的一組 p 個隨意選用的不同值，這因子便可以表達爲迴歸式內的項

$$x \quad x^2 \quad \cdots \cdot x^{p-1} 。$$

經過這一步，變方與變積分析就變成品質性自變數的複迴歸問題了。

上册裏曾用過許多符號如 $\bar{y}$ 和 s^2 等，這本書裏仍然沿用。但爲便利讀者起見，書後還把它們和新加符號的定義都列成了附錄。

書後面的附表中有四個是沿用上册的，便是常態，t，x^2，和 F 分布的各百分點值表；用不到的上册中表就省略不錄了。祇有第 14 表的正交多項式是新添的。

謝謝皮爾遜教授准設由生物統計學誌轉錄附表 4，5，6，7。同時謝謝高克蘭和高可士兩位教授的鼓勵。

李 景 仁

一九六四年二月

統　計　推　論

下　冊

目　　次

附　表

習題解答

符號釋義

索　引

第二十七章

矩陣代數

本章打算討論矩陣代數學（matrix algebra）基本概念和技術，作爲研究較高深迴歸問題的準備。但討論的內容祇限於實用問題，和迴歸關係較遠的術語和定理便一律從略了。

27·1 線性方程系的解

含有三個未知數的線性方程系解法（solutions of system of linear equations）是中學代數中都曾講過的。如果方程系是：

$$5x-2y+z=3 \tag{1}$$

$$2x+y-5z=-6 \tag{2}$$

$$4x-2y+z=1 \tag{3}$$

求解的程序便是：先將式(1)乘 4，式(2)乘 10，式(3)乘 5，得到另一個方程系：

$$20x-8y+4z=12 \tag{4}$$

$$20x+10y-50z=-60 \tag{5}$$

$$20x-10y+5z=5 \tag{6}$$

從式(5)和式(6)中分別減去式(4)，便得到

$$18y-54z=-72 \tag{7}$$

和

$$-2y+z=-7\text{。} \tag{8}$$

將式(7)加上式(8)的九倍，便得到

$$-45z=-135$$

或

$$z=3\text{。}$$

將式(8)內的 z 用 3 代入，便得到

$$y=5。$$

再用 3 和 5 分別代替式(1)中的 z 和 y ，便得到

$$x=2。$$

到這兒為止，線性方程系的解便已完全求得。

上面的求解程序是很繁的，要重複記寫 x，y，z，和 (+) 號與 (=) 號等； 如果不用符號而祇用三個未知數來記寫，手續便會簡單得多。用這種記寫方法，式(1)，(2)，(3)可以寫成：

$$\begin{array}{cccc} 5 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -5 & -6 \\ 4 & -2 & 1 & 1 \end{array} \qquad (9)$$

計算中用到的別的方程式也可以用這種方法。求出的解仍然是；

$$x=2, \quad y=5, \quad z=3。$$

另外還有一種簡化的計算程序，便是將不同方程式的同一未知數的係數用除法變成相等。式(1)，(2)，(3)內 x 的係數 5，2，4 在式(4)，(5)，(6)中已經用適當乘數變成 20 ；要是改用 5 ，2 ，4 分別去除式(1)，(2)，(3)，也能使 x 的係數變成相同。計算工具比較普遍時，不必避免除法的計算，所以方程式的求解便可以用表 27.1 的程序來做了。這種解法與前面講的方法並沒有甚麼不同，但計算法却有三個特點：

(*a*) 不必重複記寫 x ，y ，z ，(+)，(=) 等符號。

(*b*) 將各方程式內同一未知數的係數用除法變成相等。

(*c*) 採用由各式順次減去第一式的統一操作，可以用來檢討計算結果的對錯。

後面各節都是討論矩陣代數學的，其實就是表 27.1 程序內各種規則的解釋。在初學的人看來，這些解釋的過程是很繁的。這兒的例子祇是含有三個未知數的方程系求解，用中學代數的方法，說不定還會簡單一點。但如聯立方程系含有許多方程式，情形便不一樣；按照這兒的規律去作，便要有效得多。

表 27.1 線性方程系的解法

行號	x	y	z	右側值	運算法
(1)	5	−2	1	3	
(2)	2	1	−5	−6	
(3)	4	−2	1	1	
(4)	1	−0.40	0.20	0.60	(1)÷5
(5)	1	0.50	−2.50	−3.00	(2)÷2
(6)	1	−0.50	0.25	0.25	(3)÷4
(7)	0	0.90	−2.70	−3.60	(5)−(4)
(8)	0	−0.10	0.05	−0.35	(6)−(4)
(9)		1	−3.00	−4.00	(7)÷0.9
(10)		1	−0.50	3.50	(8)÷(−0.1)
(11)		0	2.50	7.50	(10)−(9)
(12)			1	3.00	(11)÷2.5
(13)		1		5.00	代入 (10)
(14)	1			2.00	代入 (6)

27·2 矩　陣

任一組排成

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{1}$$

形式的數都稱爲一個矩陣（matrix）。像 27.1 節內式(1)，(2)，(3)中的九個係數，便可以排成

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

而等號右方的數也可以排成

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

所以它們都是矩陣。

矩陣的大小（dimension）可以用陣內所含的行（row）數和列（column）數來表示。含有m行和n列的矩陣便稱爲$m\times n$ 矩陣，所以上面的(2)和(3)便分別是 3×3 和 3×1（不是1×3）矩陣。 如果$m=n$ ，$m\times n$矩陣便稱爲方陣（square matrix）； 矩陣(2)是一個方陣而(3)便不是。

矩陣內的每個數都稱爲矩陣的元素（element），所以矩陣(1)和(2)各有 9 個元素而(3)祇有 3 個；廣義地說，一個$m\times n$ 矩陣便會有mn個元素。矩陣內的元素不一定是個幾位數，實例祇取一位數的；同時這些數又都是可正可負的，有時還得加上數號。

兩個矩陣的對應元素各自相等，兩個矩陣便稱爲相等。如果矩陣(1)和矩陣(2)相等，下面的等式便必需成立：

$$\begin{array}{lll} a_{11}=5 & a_{12}=-2 & a_{13}=\ \ 1 \\ a_{21}=2 & a_{22}=\ \ 1 & a_{23}=-5 \\ a_{31}=4 & a_{32}=-2 & a_{33}=\ \ 1 \end{array}$$

各式中的足註是用來表示元素在矩陣內的位置的，第一個數代表行次而第二個數代表列次，所以 a_{23} 便代表第二行和第三列的元素；廣義地說，元素a_{ij} 的位置便在矩陣內第 i 行和 j 列了。

一個矩陣也可以祇用一個文字來代表。像矩陣(1)便可以寫成

$$A=[a_{ij}] \qquad i=1,2,3; \qquad j=1,2,3;$$

而a_{ij} 便代表矩陣A內第 i 行和 j 列的元素。 一般說來，一個$m\times n$

矩陣便可以寫成

$$A=[a_{ij}] \qquad i=1,2,\cdots,m; \qquad j=1,2,\cdots,n;$$

而省略式並不改變矩陣的原意。

將一個矩陣內的行順次序換成列，得到的矩陣便稱爲原矩陣的轉置（ transpose ）。矩陣

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{4}$$

的轉置便是

$$A'=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{33} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{5}$$

矩陣(2)的轉置便是

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -5 & 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

一個 $m\times n$ 矩陣的轉置是一個 $n\times m$ 矩陣，所以 2×3 矩陣

$$B=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

的轉置是一個 3×2 矩陣

$$B'=\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{8}$$

如果一個矩陣的轉置仍然是原有的矩陣，這個矩陣便稱爲對稱的（symmetric），像下面的矩陣便是對稱的

$$\begin{bmatrix} 95 & -42 & 73 \\ -42 & 50 & 82 \\ 73 & 82 & 17 \end{bmatrix}。 \tag{9}$$