

統計推論

下 冊

李 景 仁 著

汪 永 祺 譯

臺灣商務印書館發行

C8
805
2

卷

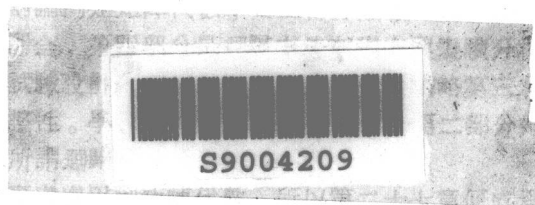
S017638

統 計 推 論

下 冊

李 景
汪 永

信 祺 著
譯



臺灣商務印書館發行

中華民國六十年一月初版
中華民國七十年三月二版

統計推論 下冊

基本定價四元七角正

版權所有
翻印必究

原著者 李景仁

譯述者 汪永祺

發行人 朱建民

印刷及
發行所

臺灣商務印書館股份有限公司

臺北市重慶南路一段三十七號
登記證：局版臺業字第〇八三六號

序

統計推論分上下兩冊。上冊講的是統計學的基本原理和方法，而這一冊却講的是複迴歸和它的引申。應用複迴歸，新的方法便給引了出來，老的方法也得到了效率上的改善。

讀這本書時，應當先熟悉簡單直線迴歸和變方與變積分析，而這些材料都是在上冊前二十章內講過的。

統計學裏討論到的因子通常都是品質性的，這本書的主旨便是倡導數量性因子數量化；所以就將因子為數量性的複因子試驗用複曲線迴歸方法來解，未採用反應曲面設計的試驗便也就配合上反應曲面。這些做法有一項好處，如果處理均值能用一個低於 $(p-1)$ 次的方程式代表而 p 是一個因子的變數，處理均值的變方便會縮小。

這本書大致可以分成五部分：

第一部分 第二十七章

第二部分 第二十八，二十九，三十，三十一章

第三部分 第三十二章

第四部分 第三十三，三十四，三十五章

第五部分 第三十六，三十七章

第一部分討論的是矩陣代數，第二部分是複迴歸和曲線迴歸，第三部分是常數配合，第四部分是迴歸方法在變方與變積分析上的應用，第五部分是試驗設計，如果是短期學程，可以省略第三和第五部分而不致破壞完整性。學程更短，乾脆祇教第一和第二部分好了；這兩部分便是一般所謂迴歸問題的材料。

全書裏處處用到矩陣代數，所以第二十七章便成為必需熟諳的知識。不過，讀者們却不必看到第二十七章的標題而害怕；因為這本書的材料曾經由一百五十位程度不超過高中代數的學生試用過，還沒有一個人學不會。

複迴歸和變方與變積分析在一般人心目中是兩種不同的方法，而

且每種方法都有一批擁護者，但這本書裏却將它們打成一片了。這種做法可以說是兩全其美的：偏愛變方分析法的人士可以用因子的數量性去砥礪自己喜歡的方法，而偏愛複迴歸的人士也不難把自變數的領域擴充到品質性的圈子裏去。

複迴歸法還有一樣好處，便是可以用在任一種類型的問題上，所以它是可以用來統一統計計算程序的。如果應用電腦，這項好處便更顯得重要；因為，複迴歸的處理程式到處都有，就不必一一設計了。不過，這兒雖然說到電腦，可並沒有指明書中的方法非用電腦不可，用平常的計算機倒也能解決；其實，書中全部數例都未用過電腦。

統一的計算程序可以經由一套手續做到，而這套手續不妨稱為處理的數量化。如果有一個 p 變級的品質性因子，用 x 代表賦給 p 個變級的一組 p 個隨意選用的不同值；這因子便可以表達為迴歸式內的項

$$x \quad x^2 \quad \dots \quad x^{p-1}。$$

經過這一步，變方與變積分析就變成品質性自變數的複迴歸問題了。

上冊裏曾用過許多符號如 $\bar{y}$ 和 s^2 等，這本書裏仍然沿用。但為便利讀者起見，書後還把它們和新加符號的定義都列成了附錄。

書後面的附表中有四個是沿用上冊的，便是常態， t ， x^2 ，和 F 分布的各百分點值表；用不到的上冊中表就省略不錄了。祇有第 14 表的正交多項式是新添的。

謝謝皮爾遜教授准設由生物統計學誌轉錄附表 4，5，6，7。同時謝謝高克蘭和高可士兩位教授的鼓勵。

李 景 仁

一九六四年二月

統計推論

下冊

目次

序

第二十七章 矩陣代數

27. 1	線性方程系的解.....	1
27. 2	矩陣.....	3
27. 3	矩陣的乘法.....	6
27. 4	乘法法則.....	8
27. 5	矩陣的求逆.....	12
27. 6	正交矩陣.....	18
27. 7	奇矩陣.....	22
27. 8	杜氏對稱矩陣求逆法.....	23
27. 9	變碼.....	29
27.10	含有元素零的矩陣求逆.....	32
27.11	純乘數對逆矩陣的影響.....	35
	習題.....	37
	參考文獻.....	39

第二十八章 複迴歸的代數問題

28. 1	基本符號.....	40
28. 2	徵值的估算.....	43
28. 3	正規方程式的另種形式.....	46
28. 4	偏迴歸係數和全迴歸係數.....	49
28. 5	複迴歸的圖示.....	53

28. 6	平方和的劃分	56
28. 7	條列變方的估值	61
28. 8	複相關係數	61
28. 9	計算實例	63
28.10	統計學中的單位	72
28.11	一個變數所產生的淨平方和	76
28.12	幾個變數所產生的淨平方和	79
28.13	代數恒等式	86
	習題	86
	參考文獻	89
第二十九章 複迴歸的推論問題		
29. 1	有關族羣的原設	90
29. 2	一般擬說的測驗	90
29. 3	特定擬說的測驗	93
29. 4	淨平方和的正交性	95
29. 5	偏迴歸係數的分布	99
29. 6	偏迴歸係數的線性組合	104
29. 7	訂正均值分布	110
29. 8	試驗的籌劃	117
29. 9	迴歸與複因子試驗	120
29.10	變碼	124
29.11	計算方法	135
29.12	奇矩陣	139
	習題	142
	參考文獻	144
第三十章 曲線迴歸		
30. 1	多項式	145
30. 2	曲線配合	150

30. 3	族羣的性質	152
30. 4	徵值的估算	154
30. 5	校正平方和與乘積和	160
30. 6	一般擬說的測驗	162
30. 7	相關係數	164
30. 8	多項式次數的決定	166
30. 9	單自由度	171
30.10	迴歸係數的測驗	174
30.11	其他擬說的測驗	175
30.12	迴歸係數的可信間距	179
30.13	訂正均值的分布	180
30.14	曲線回歸與變方分析的比較	183
30.15	變換自變數	188
30.16	試驗的籌劃	192
30.17	奇矩陣	196
30.18	逢機區集	197
30.19	簡算法	198
	習 題	198
	參考文獻	201

第三十一章 複曲線迴歸

31. 1	迴歸的種類	202
31. 2	族羣性質	203
31. 3	徵值的估算	205
31. 4	離模差	209
31. 5	方程式次數的決定	211
31. 6	訂正均值的分布	214
31. 7	變換自變數	217
31. 8	單自由度	222

31. 9	複因子試驗和反應曲面	226
31.10	反應曲面法的優點	238
31.11	複因子試驗的籌劃	240
31.12	反應曲面設計	246
	習題	247
	參考文獻	248
第三十二章 常數配合		
32. 1	完全逢機試驗	249
32. 2	逢機區集	257
32. 3	拉丁方	266
32. 4	完全逢機試驗的變積分析	273
32. 5	逢機區集的變積分析	287
32. 6	缺失觀測值	302
32. 7	迴歸係數的限制條件	309
	習題	311
	參考文獻	313
第三十三章 處理的數量化		
33. 1	完全逢機試驗	315
33. 2	逢機區集	320
33. 3	拉丁格	327
33. 4	完全逢機試驗的變積分析	332
33. 5	逢機區集的變積分析	338
33. 6	缺失觀測值	346
33. 7	附記	352
	習題	354
第三十四章 複變積和曲線變積		
34. 1	複變積	355
34. 2	矩陣求逆法的應用	360

34. 3	習用的計算法	362
34. 4	訂正處理均值	365
34. 5	訂正處理均值的變方	367
34. 6	訂正處理均值差的變方	369
34. 7	逢機區集的曲線變積	371
34. 8	逢機區集的習用計算方法	379
34. 9	逢機區集的訂正處理均值	382
34.10	模式的選擇	385
34.11	直線變積的訂正處理均值	391
34.12	棄置多餘項的好處	393
34.13	品質性和數量性處理	393
	習 題	395
	參考文獻	397

第三十五章 不等大樣品複因子試驗

35. 1	基本概念	398
35. 2	互涉效應的測驗	403
35. 3	用變方分析互涉效應	409
35. 4	互涉的解釋	411
35. 5	品質性因子的互涉效應	413
35. 6	品質性因子與數量性因子的互涉效應	415
35. 7	數量性因子的互涉	419
35. 8	品質性因子的無互涉狀況	424
35. 9	訂正邊緣均值	428
35.10	品質性與數量性因子的無互涉狀況	435
35.11	數量性因子的無互涉狀況	441
35.12	祇有兩個變級的因子	445
35.13	成比例的樞頻度	451
35.14	節要	457

習題	457
參考文獻	459
第三十六章 試驗設計	
36. 1 混同試驗	460
36. 2 部分重複	462
36. 3 裂區	464
36. 4 反應曲面	467
36. 5 不完全區集	467
習題	468
參考文獻	468
第三十七章 多因子試驗	
37. 1 觀測值的標識	469
37. 2 各種合計	470
37. 3 變方分析	474
37. 4 完全逢機試驗	479
37. 5 逢機區集	479
37. 6 裂區內的複因子試驗	480
37. 7 複因子試驗內的裂區	481
37. 8 分裂裂區	483
37. 9 附記	485
習題	485
參考文獻	486
第三十八章 摘要	
38. 1 複迴歸	487
38. 2 應用	487
38. 3 計算方法	488
參考文獻	488

附 表

表 3	常態曲線的相對累計頻度.....	491
表 4	x^2 分布的百分點值	492
表 5	x^2 / ν 的百分點值.....	493
表 6	t 分布的百分點值.....	494
表 7a	F 分布的 5 % 點值.....	495
表 7b	F 分布的 2.5 % 點值.....	497
表 7c	F 分布的 1 % 點值.....	499
表 7d	F 分布的 0.5 % 點值.....	501
表 14	數量性處理的正交乘數組.....	503

習 題 解 答

第二十七至三十七章.....	507
----------------	-----

符 號 釋 義

小寫字母.....	521
大寫字母.....	524
希臘字母.....	526

索 引

插表索引.....	531
插圖索引.....	537
英中主題索引.....	538
主題索引.....	563

第二十七章

矩陣代數

本章打算討論矩陣代數學 (matrix algebra) 基本概念和技術，作為研究較高深迴歸問題的準備。但討論的內容祇限於實用問題，和迴歸關係較遠的術語和定理便一律從略了。

27.1 線性方程系的解

含有三個未知數的線性方程系解法 (solutions of system of linear equations) 是中學代數中都會講過的。如果方程系是：

$$5x - 2y + z = 3 \quad (1)$$

$$2x + y - 5z = -6 \quad (2)$$

$$4x - 2y + z = 1 \quad (3)$$

求解的程序便是：先將式(1)乘 4，式(2)乘 10，式(3)乘 5，得到另一個方程系：

$$20x - 8y + 4z = 12 \quad (4)$$

$$20x + 10y - 50z = -60 \quad (5)$$

$$20x - 10y + 5z = 5 \quad (6)$$

從式(5)和式(6)中分別減去式(4)，便得到

$$18y - 54z = -72 \quad (7)$$

和

$$-2y + z = -7 \quad (8)$$

將式(7)加上式(8)的九倍，便得到

$$-45z = -135$$

或

$$z = 3。$$

將式(8)內的 z 用 3 代入，便得到

$$y = 5。$$

再用 3 和 5 分別代替式(1)中的 z 和 y ，便得到

$$x = 2。$$

到這兒為止，線性方程系的解便已完全求得。

上面的求解程序是很繁的，要重複記寫 x ， y ， z ，和 (+) 號與 (=) 號等；如果不用符號而祇用三個未知數來記寫，手續便會簡單得多。用這種記寫方法，式(1)，(2)，(3)可以寫成：

$$\begin{array}{cccc} 5 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -5 & -6 \\ 4 & -2 & 1 & 1 \end{array} \quad (9)$$

計算中用到的別的方程式也可以用這種方法。求出的解仍然是；

$$x = 2, \quad y = 5, \quad z = 3。$$

另外還有一種簡化的計算程序，便是將不同方程式的同一未知數的係數用除法變成相等。式(1)，(2)，(3)內 x 的係數 5，2，4 在式(4)，(5)，(6)中已經用適當乘數變成 20；要是改用 5，2，4 分別去除式(1)，(2)，(3)，也能使 x 的係數變成相同。計算工具比較普遍時，不必避免除法的計算，所以方程式的求解便可以用表 27.1 的程序來做了。這種解法與前面講的方法並沒有甚麼不同，但計算法卻有三個特點：

- (a) 不必重複記寫 x ， y ， z ，(+)，(=) 等符號。
- (b) 將各方程式內同一未知數的係數用除法變成相等。
- (c) 採用由各式順次減去第一式的統一操作，可以用來檢討計算結果的對錯。

後面各節都是討論矩陣代數學的，其實就是表 27.1 程序內各種規則的解釋。在初學的人看來，這些解釋的過程是很繁的。這兒的例子祇是含有三個未知數的方程系求解，用中學代數的方法，說不定還會簡單一點。但如聯立方程系含有許多方程式，情形便不一樣；按照這兒的規律去作，便要有效得多。

表 27.1 線性方程系的解法

行 號	x	y	z	右側值	運 算 法
(1)	5	-2	1	3	
(2)	2	1	-5	-6	
(3)	4	-2	1	1	
(4)	1	-0.40	0.20	0.60	(1)+5
(5)	1	0.50	-2.50	-3.00	(2)+2
(6)	1	-0.50	0.25	0.25	(3)+4
(7)	0	0.90	-2.70	-3.60	(5)-(4)
(8)	0	-0.10	0.05	-0.35	(6)-(4)
(9)		1	-3.00	-4.00	(7)+0.9
(10)		1	-0.50	3.50	(8)+(-0.1)
(11)		0	2.50	7.50	(10)-(9)
(12)			1	3.00	(11)+2.5
(13)		1		5.00	代入 (10)
(14)	1			2.00	代入 (6)

27.2 矩 陣

任一組排成

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (1)$$

形式的數都稱為一個矩陣 (matrix)。像 27.1 節內式(1), (2), (3)中的九個係數, 便可以排成

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

而等號右方的數也可以排成

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

所以它們都是矩陣。

矩陣的大小 (dimension) 可以用陣內所含的行 (row) 數和列 (column) 數來表示。含有 m 行和 n 列的矩陣便稱為 $m \times n$ 矩陣，所以上面的(2)和(3)便分別是 3×3 和 3×1 (不是 1×3) 矩陣。如果 $m = n$ ， $m \times n$ 矩陣便稱為方陣 (square matrix)；矩陣(2)是一個方陣而(3)便不是。

矩陣內的每個數都稱為矩陣的元素 (element)，所以矩陣(1)和(2)各有 9 個元素而(3)祇有 3 個；廣義地說，一個 $m \times n$ 矩陣便會有 mn 個元素。矩陣內的元素不一定是個幾位數，實例祇取一位數的；同時這些數又都是可正可負的，有時還得加上數號。

兩個矩陣的對應元素各自相等，兩個矩陣便稱為相等。如果矩陣(1)和矩陣(2)相等，下面的等式便必需成立：

$$\begin{array}{lll} a_{11} = 5 & a_{12} = -2 & a_{13} = 1 \\ a_{21} = 2 & a_{22} = 1 & a_{23} = -5 \\ a_{31} = 4 & a_{32} = -2 & a_{33} = 1 \end{array}$$

各式中的足註是用來表示元素在矩陣內的位置的，第一個數代表行次而第二個數代表列次，所以 a_{23} 便代表第二行和第三列的元素；廣義地說，元素 a_{ij} 的位置便在矩陣內第 i 行和 j 列了。

一個矩陣也可以祇用一個文字來代表。像矩陣(1)便可以寫成

$$A = [a_{ij}] \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3;$$

而 a_{ij} 便代表矩陣 A 內第 i 行和 j 列的元素。一般說來，一個 $m \times n$

矩陣便可以寫成

$$A = [a_{ij}] \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

而省略式並不改變矩陣的原意。

將一個矩陣內的行順次序換成列，得到的矩陣便稱為原矩陣的轉置 (transpose)。矩陣

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (4)$$

的轉置便是

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (5)$$

矩陣(2)的轉置便是

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -5 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

一個 $m \times n$ 矩陣的轉置是一個 $n \times m$ 矩陣，所以 2×3 矩陣

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

的轉置是一個 3×2 矩陣

$$B' = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

如果一個矩陣的轉置仍然是原有的矩陣，這個矩陣便稱為對稱的 (symmetric)，像下面的矩陣便是對稱的

$$\begin{bmatrix} 95 & -42 & 73 \\ -42 & 50 & 82 \\ 73 & 82 & 17 \end{bmatrix}. \quad (9)$$