



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高等数学

第三版

○ 主编 侯风波



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高等数学

Gaodeng Shuxue

(第三版)

主编 侯风波



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材,是为了适应我国高等职业教育培养高技能人才的需要,适应高等教育大众化发展趋势的现实,更好地贯彻《中共中央、国务院关于进一步加强人才工作的决定》的有关精神,在认真总结全国高职高专院校高等数学课程教学改革经验,特别是国家示范性高等职业院校数学课程改革经验基础上,根据当前高职院校学生实际情况和可持续发展的需要,对《高等数学(第二版)》修改完善而成。

在保证本书第二版的特色的前提下,本书适度降低了难度,调整了例题、习题的配置,加大了每节后思考题与习题的分量,以保证对基本知识点的训练与掌握。内容包括函数、极限与连续、导数与微分、一元函数微分学的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、常微分方程、向量与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、级数、符号计算系统 Mathematica 及其应用。书后附有初等数学常用公式、常用平面曲线及其方程、习题答案与提示。本书特别注意培养学生用数学概念、思想、方法消化吸收工程概念、工程原理的能力,把实际问题转化为数学模型的能力,利用计算机求解数学模型的能力。

与本书配套的辅助教材有《高等数学训练教程(第三版)》、《高等数学练习册(第二版)》,电子教材有《高等数学电子教案》(赠送)、《高等数学助学课件》(配书)和《高等数学交互式练习》。

本书可作为高职高专工科各专业通用数学教材,也可供工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/侯风波主编. —3版. —北京:高等教育出版社,2010.5

ISBN 978-7-04-029232-9

I. ①高… II. ①侯… III. ①高等数学-高等学校-教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 060669 号

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 北京宏伟双华印刷有限公司

开 本 850×1168 1/16
印 张 20.5
字 数 470 000

购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
畅想教育 <http://www.widedu.com>

版 次 2000 年 8 月第 1 版
2010 年 5 月第 3 版
印 次 2010 年 8 月第 2 次印刷
定 价 29.80 元(含光盘)

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 29232-00

第三版前言

《高等数学(第三版)》的出版距离其第二版的出版已经过去了整整7年。在这7年中有许多高职高专院校使用此书作为高等数学课程教材。同时,有许多教师希望结合当前高职高专院校生源变化以及人才培养目标的优化尽快对本教材进行修订完善,并对本教材的进一步完善提出了许多有益的建议,在此,一并表示深深感谢!

在过去7年中,编者一直坚持结合高职院校人才培养目标进行高等数学教学研究及教改实践。主持的《以应用为导向的高职高专数学课程改革与建设》课题2009年9月获第六届高等教育国家级教学成果二等奖。该成果主要包括如下7个方面:

1. 确立了以培养“吸收、转化、求解、创新”四方面能力为主线的高职高专数学课程教学改革理念。

高职高专高等数学课程在应用性人才培养中应该主要培养学生如下4方面的能力:

① 利用数学知识消化、吸收工程概念和工程原理的能力。

② 把实际问题转化为数学模型的能力。

③ 利用计算机和相应软件包求解数学模型的能力。

④ 善于归纳、类比、联想的创造性思维能力。

2. 确立了“高职高专高等数学课程两配合的教学模式”。

为了培养学生利用数学解决专业实际问题的能力,利用选修课的时间,以数学实验课和数学实践课的形式,进行培养学生利用数学知识、数学软件和计算机解决专业实际问题能力的改革。该项改革极大地调动了学生“学数学,用数学”的热情,创新了高职高专高等数学课程教学“必修课与选修课,理论课与实践课”两配合的教学模式。作为必修课的高等数学理论课程以培养学生“吸收、转化、求解、创新”4方面能力为主线,采用真实案例启动教学;作为选修课的实践课通过让学生自己动手完成与其专业密切联系的真实课题,通过“做、学、教”一体化的教学方法训练学生用数学知识解决实际问题的能力。

3. 确立了高职高专高等数学课程建设的“四五二”建设模式。

高等数学课程改革与建设的“四五二”课程建设模式包括4大操作环节,5大建设内容及2个确实保证。4大操作环节是:制定课程建设规划,具体落实规划,定期课程评估,再定新的课程建设规划。5大建设内容有师资队伍建设和教学质量建设、教学条件建设、教学改革建设、教书育人建设。它们既是课程建设的核心内容,也是课程建设的重点工作。2个确实保证是:对教学上遇到的重大教学课题,要确实保证立项专门研究,以求重点突破;对每一个教学周期及每项教学建设与改革工作都要保证及时总结。

4. 高等数学课程2004年被评为“国家级精品课程”。

为了方便学生的自主性学习和教师的创造性教学,建设了包括网上自测系统、网上在线答疑系统、高等数学助学课件、高等数学电子教案、高等数学学习系统、高等数学网络课程、数学建模等丰富教学资源的高等数学精品课程网站。高等数学课程2002年被评为“河北省精品课程”,2004年被评为“国家级精品课程”。

5. 确立了课程教学资源整体建设理念。

为了及时固化和升华教学改革成果,根据高职高专各专业培养应用性人才的需要,基于既方便学生学、又方便教师教的目的,把课程质量标准、主教材、电子教案、练习册、训练教程、教师教学法建议、应用案例库、自测题库的编写以及教学方法、教学手段的制定由专人,按专题统一考虑整体建设。主教材例题、习题、思考题与知识点的相互呼应,例题、习题、思考题与知识点的选择与层次编排遵从由浅入深、由易到难、难易适度、循序渐进、应用导向、启发思维的原则,特别要注意思考题的编写一定要贯彻启发式教学原则,要把思考题的作用限制在“帮助学生换个角度对有关知识点进行理解”的范围内,避免把思考题设计得过难。辅助教学资源的编写要遵从强调用情景真实的“案例实践”呈现问题,营造现实工作过程中待解决问题的情境;主张用问题启发学生的思维,鼓励学生基于解决问题的学习、基于案例实践的学习;通过设计各种情境真实的“案例实践”问题,开拓学生的创新思维与想象空间;充分利用各种信息为学生提供跨学科的知识链接,提高学生的综合素质与能力。少理论多应用,少独立多联合,少笔算多电算。将现代数学软件 Mathematic, MATLAB 等融入其中。辅以数学建模,重视数值计算和数据处理。这就是教学资源整体建设的原则。

6. 编写出版了高职高专高等数学课程系列立体化教材。

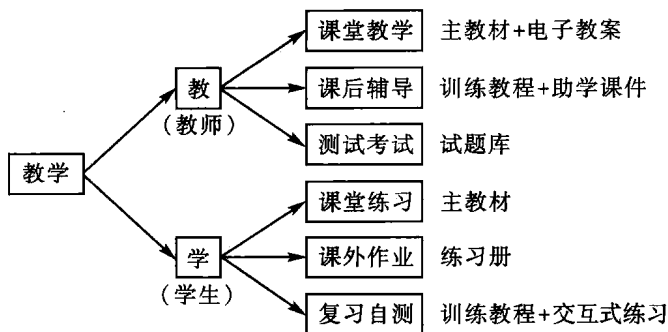
2000 年,在认真总结我校国家试点专业教改实践及充分吸收“三校”的成功教改经验的基础上,根据教育部 1999 年组织制订的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》,主编出版了本书第一版,该教材引入了 Mathematica 符号计算系统,使高等数学的教学在 Mathematica 软件平台上进行,极大地调动了学生学习数学的积极性,提高了学生用数学解决实际问题的能力。自教材出版以后,凭借其“凝练、通俗、应用、能力”的特点,得到了许多同行教师及学生的厚爱,该教材于 2002 年获得教育部全国普通高等学校优秀教材一等奖。

为了适应教育信息化的需要,推动教学资源的现代化进程,本着精益求精的态度,吸收了众多读者的反馈意见,结合自身多年数学教学教改的实践以及对国内外高职高专院校教改经验的总结,对教材进行了全面改版,于 2003 年 5 月推出了作为普通高等教育“十五”国家级规划教材的本书的第二版。其在应用方面实现了新突破,符合高职高专教育培养应用性人才的目标和要求,大大扩展了高等数学基础课的应用空间。这一独创性的工科高等数学教材编写工作,使古朴厚重的高等数学课程焕发了生机,充满了时代气息。为了在更高层次上突出高等数学在科学技术和实际生活中的应用,教材结合具体内容,引入了建立初步数学模型的训练,并结合计算机及数学软件包的使用,注重学生创新能力的培养。与其配套的辅助教材除了《高等数学训练教程(第二版)》和《高等数学练习册》,还配有包括《高等数学电子教案》、《高等数学助学课件》、《高等数学交互式练习》、《高职高专高等数学试题库系统》在内的电子教材,从而开启了高职高专高等数学的立体化教学包工作。该教学包既扩大了信息载体的种类,丰富了教学媒体,又实现了教师多种方式的教學,并为学生自主性学习创造了良好的条件(见高等数学立体化教学包结构图)。该立体化教学包是支持《以应用为导向的高职高专数学课程改革与建设》课题成果的核心内容。

7. 确立了数学建模四结合的教育模式,数学建模竞赛多次取得国家一等奖的好成绩。

数学建模四结合教育模式,即数学建模与数学课程教学内容相结合,对全体学生进行的课上建模教育和对参赛选手进行的课下建模训练相结合,集中培训与个别指导相结合,学生总结与教师总结相结合。数学建模课与数学实践课相互融合。数学建模可以展示数学在多学科中的应用,使学生感受到了数学的威力与魅力,通过学生对数学建模过程的参与,使学生感受到数学的实际应用。通过数学建模培养学生“运用数学知识解决实际问题的能力”,充分体现了高职教育培养“高技能”、“应用性”人才的特色。通过教师为学生精心准备的教学资源引导学生进行自主性、探究性学习。以学生为中心开展数学建模活动。以问题为主线,鼓励学生自己动手解决实际问题。

通过数学建模训练培养学生利用数学解决实际问题的能力,把数学建模教育融入课堂教学之中,贯穿



高等数学立体化教学包结构图

于高等数学课程教学全过程已取得了较突出的成绩。

教材作为学校教学内容和教学方法的载体,在深化教育教学改革、全面推进素质教育、培养创新人才中有着举足轻重的地位。随着高等教育的蓬勃发展,高校教学改革在不断地深入进行,为了适应我国高等职业教育培养高技能人才的需要,适应高等职业教育大众化发展趋势的现实,更好地贯彻《中共中央、国务院关于进一步加强人才工作的决定》的有关精神,在认真总结全国高职高专院校高等数学课程教学改革经验,特别是国家示范性高等职业院校数学课程改革经验基础上,根据当前高职院校学生心智发展水平和可持续发展的需要,对本书第二版修改完善而成第三版。

本书修订过程中,在保持第二版深受大家欢迎且有较强适应性的内容相对稳定的前提下,主要做了如下工作:

1. 删掉了一些难度较大且不是必需的知识点。
2. 删掉了一些难度较大的例题。
3. 删掉了一些难度较大的习题。
4. 增补了一些知识点的解释与注释。
5. 增补了一些与知识点对应的易于理解的例题。
6. 增补了一些与知识点对应的易于理解的习作题。
7. 为了方便学生阅读和记听课笔记,本次修订特在每页的右侧留了一定的空白。

与本书配套的教材还有可修改的开放性的《高等数学电子教案》(光盘),教师可根据教学需要进行适当的修改,用于多媒体教学。

与本书配套的教材还有《高等数学助学课件》(光盘)、《高等数学训练教程(第三版)》和《高等数学练习册(第二版)》等,供学生课后自主性学习使用。

关于本书习题的使用有如下建议:

1. 书中每节后的习作题供学生复习巩固本节有关知识点用。
2. 每章后的复习题供学有余力或打算“专升本”的学生系统复习巩固本章知识点用。
3. 《高等数学练习册(第二版)》供教师给学生布置作业用。

在本书出版过程中,得到了高等教育出版社蒋青和邓雁城两位编辑的大力支持与帮助,在此表示真挚的感谢!

第二版前言

高等数学是高职高专院校各专业必修的一门重要的基础课程。它对培养、提高学生的思维素质、创新能力、科学精神、治学态度以及用数学解决实际问题的能力都有着非常重要的作用。高等数学的主要内容是微积分。300多年前,牛顿(Newton)和莱布尼茨(Leibniz)创立了微积分的诸多概念。自那时起微积分无论是在自然科学还是在社会科学,甚至在数学科学自身都发挥了重要的作用,显示出了强大的威力和无穷的魅力。正因为如此,有关微积分的理论研究几个世纪以来吸引了大批数学家为之奋斗,微积分的理论基础已非常坚固,理论体系也已非常完善。微积分的教学也朝着理论体系尽善尽美的方向努力,这就导致了这一课程的定义、规则、技巧越来越多,相比之下其思想、其应用在整个课程中所占的比重越来越少,致使许多学生认为这是一门枯燥无味的课程。可喜的是,现在已有遍布世界各地的许多高等数学教师在致力于改善这一现状。本书就是作者在亲历多年的高等数学教学改革的基础上编写而成的一本高职高专教学用书,第一版出版以后,得到了许多同行教师及学生的使用与厚爱,并于2002年获得了教育部全国普通高等学校优秀教材一等奖,第二版就是在认真研究我国当前高职高专教育大众化发展趋势下的教育现状,充分听取各方面的建议,吸取全国高职高专院校高等数学教学改革经验的基础上,根据《教育部新世纪高职高专教育高等数学课程内容与体系改革与建设》项目的研究成果,按照教育部《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》,在第一版的基础上修改而成的。为了广大师生更方便地使用本书,特就有关问题分别向教师和学生谈几个观点。

致教师:

高等数学中每一个重要概念都有其实际背景。从实际问题出发引出概念可激发学生的求知欲,提高教学效果。教师的教学活动表面上以完成教学基本要求(或教学大纲)中所规定的知识点的教学为目标,实质上,结合人才培养目标去思考确定课程的知识、能力、素质的具体培养目标才更有现实意义。高职高专教育以培养应用性人才为教育目标。那么,作为支持高职高专教育应用性人才培养目标的重要基础课程——高等数学课程应该具体培养学生哪些方面的能力?学数学是为了用数学。这是人人都接受的观点。那么,用到哪儿?怎么用?却大相径庭。而诸如高等数学要学习后继课程服务、要为培养学生的思维能力服务、要为获得新知识服务、要为处理实际工程中的相关问题服务等均在一定程度上引起了共识。但是,在一定程度上也存在着争议。通过多年的教学研究与实践,我们认识到:高职高专院校的数学教育必须培养如下三方面的能力:一是用数学思想、概念、方法消化吸收工程概念和工程原理的能力;二是把实际问题转化为数学模型的能力;三是求解数学模型的能力。培养用数学思想、概念、方法消化吸收工程概念和工程原理的能力,必须重视数学概念的教学,培养学生把实际问题转化为数学模型的能力,必须重视数学建模训练,培养学生求解数学模型的能力,必须结合数学软件包进行高等数学教学。另外,数学是最好的思维体操,作为数学教师应有意识地去结合教学内容培养学生的逻辑思维、类比思维、发散思维及联想思维等各种思维能力,帮助他们欣赏数学美,进而,培养学生的创新能力。这些都是我们在教学中努力尝试的。在本书的编写、修订过程中,也试着将这些观点与有关内容适度结合,但做得还远远不够。

愿我们在今后的教学实践中共勉。

致学生:

为什么要学习高等数学?高等数学是学习后继课程的基础,是打开科学大门的钥匙,是高科技的核心。数学主要是研究现实世界中数量关系与空间形式的科学。现实世界中,凡是涉及量的大小,量的变化,量与量之间的关系都要用到数学。客观世界中一切实在的物体都有形。因此,宇宙之大,粒子之微,光速之快,……,无处不用到数学。要想实在地学到并掌握专业知识,必须掌握数学。

在学习高等数学过程中,必须特别注意如下4个问题:(1)要认真听课。同一个问题听老师讲懂要比自己看明白容易得多;(2)要善于记笔记。俗话说,好记性不如赖笔头;(3)要认真规范地做作业。这样不但有助于对所学知识的复习巩固,而且还有助于培养训练严谨认真的工作作风;(4)要善于用数学软件包 Mathematica 在计算机上求解数学模型,以训练用数学解决实际问题的能力。

全书内容包括函数、极限与连续、导数与微分、一元函数微分学应用、不定积分、定积分、定积分的应用、常微分方程、向量与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、级数、数值计算初步、符号计算系统 Mathematica 及其应用。书后附有初等数学常用公式、常用平面曲线及其方程、习题答案与提示。本书配套的辅助教材有《高等数学训练教程(第二版)》、《高等数学练习册》,电子教材有《高等数学电子教案》、《高等数学学习系统》和《高等数学助学课件》。

另外,考虑到读者阅读经济管理类书籍的需要,本书还包含了微积分在经济学中的应用。

本书可作为高职高专工科类及经济管理类各专业高等数学教材,也可作为工程技术人员的高等数学知识更新教材。

本教材的基本教学时数不少于100学时,标有*号的内容要另行安排学时。

参加本书编写的有侯风波(承德石油高等专科学校)、张学奇(承德石油高等专科学校)、孟庆才(河北工程技术高等专科学校),薛桂兰(山西省工业职业技术学院)、乐美龙(宁波职业技术学院),全书框架结构、统稿、定稿由侯风波教授承担。

自本书第一版出版发行3年来,有许多高职高专数学教师使用本书作为教材,并对本次修改提出了许多很好的建议。本书的编写和出版得到了高等教育出版社有关领导的重视,并给予了大力支持与帮助,高级策划蒋青女士为本书的编辑出版付出了辛勤的劳动,并提出了许多好的建议,在此一并致以最诚挚的谢意。非常欢迎使用本书的师生继续给予批评指导,以便在下一一次修订中使之进一步完善。

编者

2003年春

第一版前言

本书是教育部高职高专规划教材,是根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》,在认真总结全国高职高专数学教改经验的基础上,结合对国际国内同类教材发展趋势的分析而编写的。

通过多年的教学研究与实践,我们认识到:高职高专院校的数学教育必须培养如下三方面的能力:一是用数学思想、概念、方法消化吸收工程概念和工程原理的能力;二是把实际问题转化为数学模型的能力;三是求解数学模型的能力。因此,本书关注数学概念在实际生活中的应用,并结合具体问题进行数学建模训练,特别是将 Mathematica 软件包结合数学内容融于各章中讲授,不但极大地提高了学生利用计算机求解数学模型的能力,而且提高了学生学数学、用数学的积极性。

本书充分体现了上述教学思想,具有 9 大特点:(1) 结合数学建模突出“以应用为目的,以必需、够用为度”的教学原则,加强对学生应用意识、兴趣、能力的培养,编入了数学建模和实例。(2) 编入了数学软件包——Mathematica,提高学生结合计算机及数学软件包求解数学模型的能力。(3) 突出强调数学概念与实际问题的联系。(4) 结合具体内容进行数学建模训练,注重双向翻译能力的培养。(5) 结合高职高专的特点,适度淡化了深奥的数学理论,强化了几何说明,如去掉了极限的 ε - δ 语言及微分中值定理的证明,代之以几何描述。(6) 将分散于微积分各部分的数值计算集中在一起,并适当扩充后用数值分析的观点结合计算机进行处理。(7) 不仅优选了微积分在几何、物理方面的应用,而且挖掘了微积分在经济领域中的应用,编入了经济应用实例。(8) 增加了向量微积分的内容,扩展了向量的应用。(9) 每章末都专设了例题与练习一节,以方便习题课的开设及学生的复习巩固,例题的选择既结合重点、难点,又突出数学的思维方法,并一题多解。

全书内容包括数学软件包、函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、常微分方程、向量与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、级数、数值计算初步。书后附有初等数学常用公式、常用平面曲线及其方程、Mathematica 软件包的常用系统函数、空间曲面所围成的立体图形及习题答案与提示。

另外,考虑到读者阅读经济管理类书籍的需要,本书还包含了微积分在经济学中的应用。

本书可作为高等职业学校、高等专科学校、成人高等学校及本科院校举办的二级职业技术学院工科类专业高等数学教材,也可供经济管理类专业选用,还可作为工程技术人员的高等数学知识更新教材。

本教材的基本教学时数不少于 120 学时,标有 * 号的内容要另行安排学时。

参加本书编写的有侯风波(承德石油高等专科学校)、张学奇(承德石油高等专科学校)、孟庆才(河北工程技术高等专科学校)、汪永高(华北矿业高等专科学校),全书框架结构安排、统稿、定稿由侯风波承担。

教育部高等学校数学与力学教学指导委员会成员、北京航空航天大学教授李心灿和北方工业大学数学学科主任、副教授宋瑞霞承担了本教材的审稿工作,他们认真审阅了本书的全部原稿,并提出了许多有

价值的意见。在此,编者对他们表示衷心的感谢。

由于水平所限,时间也比较仓促,本书难免有不足之处,敬请读者斧正。

编者

2000 年春

目 录

第一章 函数 1	第三节 定积分的积分方法 124
第一节 函数及其性质 1	* 第四节 广义积分 128
第二节 初等函数 6	习题六 132
* 第三节 数学模型方法简述 7	第七章 定积分的应用 135
习题一 10	第一节 定积分的几何应用 135
第二章 极限与连续 13	第二节 定积分的物理应用与经济应用举例 140
第一节 极限的定义 13	习题七 145
第二节 极限的运算 22	第八章 常微分方程 147
第三节 函数的连续性 28	第一节 常微分方程的基本概念与分离 变量法 147
习题二 33	第二节 一阶线性微分方程与可降阶的高阶 微分方程 151
第三章 导数与微分 36	第三节 二阶常系数线性微分方程 155
第一节 导数的概念 36	习题八 161
第二节 求导法则 47	第九章 向量与空间解析几何 164
第三节 微分及其在近似计算中的应用 60	第一节 空间直角坐标系与向量的概念 164
习题三 67	第二节 向量的点积与叉积 169
第四章 一元函数微分学的应用 70	第三节 平面与直线 175
第一节 拉格朗日中值定理及函数 的单调性 70	第四节 曲面与空间曲线 181
第二节 柯西中值定理与洛必达 法则 74	第五节 向量函数的微分 187
第三节 函数的极值与最值 77	习题九 189
* 第四节 曲率 81	第十章 多元函数微分学 192
第五节 函数图形的描绘 83	第一节 多元函数的极限及连续性 192
* 第六节 一元函数微分学在经济上的应用 87	第二节 偏导数 196
习题四 93	第三节 全微分 200
第五章 不定积分 95	第四节 多元复合函数微分法及偏导数的 几何应用 203
第一节 不定积分的概念及性质 95	第五节 多元函数的极值 210
第二节 不定积分的积分方法 100	习题十 216
习题五 112	第十一章 多元函数积分学 219
第六章 定积分 114	第一节 二重积分的概念与计算 219
第一节 定积分的概念 114	第二节 二重积分应用举例 226
第二节 微积分基本公式 120	

* 第三节 三重积分的概念与计算	227	第十三章 符号计算系统 Mathematica	
* 第四节 对坐标的曲线积分	232	及其应用	272
* 第五节 格林公式及其应用	236	第一节 初识符号计算系统 Mathematica	272
* 第六节 对坐标的曲面积分及其应用	238	第二节 用 Mathematica 做高等数学	283
习题十一	243	习题十三	294
第十二章 级数	245	附录 A 初等数学常用公式	295
第一节 数项级数及其敛散性	245	附录 B 常用平面曲线及其方程	299
第二节 幂级数	253	附录 C 习题答案与提示	302
* 第三节 傅里叶级数	263	参考文献	313
习题十二	269		

第一章

函 数

千姿百态的物质世界无不处在运动、变化和发展之中. 16 世纪, 随着社会的发展, 为适应社会生产力发展的需要, 运动变化就成为自然科学研究的主题, 对各种变化过程和过程中的变量间的依赖关系的研究产生了函数概念. 函数是刻画运动变化中变量相依关系的数学模型, 其思想是: 通过某一事实的信息去推知另一事实. 数学上最重要的函数是那些可根据某一数值而推知另一数值的函数, 例如如果我们知道了圆的半径, 那么它的面积也就确定了.

微积分是从研究函数开始的. 本章将在中学数学已有函数知识的基础上进一步理解函数概念, 并介绍反函数、复合函数及初等函数的主要性质, 为微积分的学习打下基础.

第一节 函数及其性质

本节先复习函数的概念与性质, 除函数的定义外, 读者还应特别关注分段函数的求值与作图细节.

一、函数的概念

函数的概念在 17 世纪之前一直与公式紧密关联, 到了 1837 年, 德国数学家狄利克雷 (Dirichlet, 1805—1859) 抽象出了直至今日仍为人们易于接受, 并且较为合理的函数概念.

1. 函数的定义

定义 1 设有两个变量 x 和 y , 若当变量 x 在非空实数集 D 内, 任意取定一个数值时, 变量 y 按照一定的规律 f , 有唯一确定的值与之对应, 则称 y 是 x 的函数, 记作

$$y = f(x), \quad x \in D,$$

其中变量 x 称为自变量, 变量 y 称为函数 (或因变量). 自变量的取值范围 D 称为函数的定义域.

若对于确定的 $x_0 \in D$, 通过对应规律 f , 函数 y 有唯一确定的值 y_0 相对应, 则称 y_0 为函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处的函数值, 记作

$$y|_{x=x_0} \quad \text{或} \quad f(x_0),$$

函数值的集合,称为函数的值域,记作 M ,即 $M = \{y | y = f(x), x \in D\}$.

若函数在某个区间上的每一点都有定义,则称这个函数在该区间上有定义.

2. 函数的两个要素

函数的对应规律和定义域称为函数的两个要素,而函数的值域一般称为派生要素.

(1) 对应规律

例 1 $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ 就是一个特定的函数, f 确定的对应规律为

$$f(\quad) = 2(\quad)^2 + 3(\quad) - 1.$$

例 2 设 $y = f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$, 求 $f\left(\frac{2}{\pi}\right)$.

解 $y \Big|_{x=\frac{2}{\pi}} = f\left(\frac{2}{\pi}\right) = \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$

例 3 设 $f(x+1) = x^2 - 3x$, 求 $f(x)$.

解 令 $x+1=t$, 则 $x=t-1$, 所以

$$f(t) = (t-1)^2 - 3(t-1) = t^2 - 5t + 4,$$

所以 $f(x) = x^2 - 5x + 4.$

(2) 定义域

自变量的取值范围称为函数的定义域.

例 4 求函数 $y = \sqrt{x^2 - x - 6} + \arcsin \frac{2x-1}{7}$ 的定义域.

解 这是两个函数之和的定义域, 先分别求出每个函数的定义域, 然后求其公共部分即可.

使 $\sqrt{x^2 - x - 6}$ 有定义, 必须满足 $x^2 - x - 6 \geq 0$, 即

$$(x-3)(x+2) \geq 0,$$

解得 $x \geq 3$ 或 $x \leq -2$,

即 $\sqrt{x^2 - x - 6}$ 的定义域为 $(-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$.

使 $\arcsin \frac{2x-1}{7}$ 有定义, 必须满足 $\left| \frac{2x-1}{7} \right| \leq 1$, 即

$$-7 \leq 2x - 1 \leq 7,$$

解得 $-3 \leq x \leq 4,$

即 $\arcsin \frac{2x-1}{7}$ 的定义域为 $[-3, 4]$.

于是, 所求函数的定义域是 $[-3, -2] \cup [3, 4]$.

例 5 下列函数是否相同, 为什么?

(1) $y = \ln x^2$ 与 $y = 2 \ln x$;

(2) $w = \sqrt{u}$ 与 $y = \sqrt{x}$.

解 (1) $y = \ln x^2$ 与 $y = 2 \ln x$ 不是相同的函数, 因为定义域不同.

(2) $w = \sqrt{u}$ 与 $y = \sqrt{x}$ 是相同的函数, 因为对应规律与定义域均相同.

3. 函数的记号

y 是 x 的函数, 可以记作 $y=f(x)$, 也可以记作 $y=\varphi(x)$ 或 $y=F(x)$ 等, 但同一函数在讨论中应取定一种记法, 同一问题中涉及多个函数时, 则应取不同的记号分别表示它们各自的对应规律, 为方便起见, 有时也用记号 $y=y(x)$, $u=u(x)$, $s=s(x)$ 等表示函数. 这种函数的记号也称为函数的解析表达式.

4. 函数的表示法

函数可以用至少三种不同的方法来表示: 表格法、图像法和公式法.

例 6 中央电视台每天都播放天气预报, 经统计, 某地 1999 年 9 月 19 日—29 日每天的最高气温如表 1.1 所示.

表 1.1

日期(9月)	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
最高气温/℃	28	28	27	25	24	26	27	25	23	22	21

这个表格确实表达了温度是日期的函数, 这里不存在任何计算温度的公式(否则就不需要气象局了), 但是每一天都会产生出一个唯一的最高气温, 对每个日期 t , 都有一个与 t 相应的唯一最高气温 N .

例 7 王先生到郊外去观景, 他匀速前进, 离家不久, 他发现一骑车人的自行车坏了, 他帮助这个人把自行车修好, 随后又上路了. 请把王先生离家的距离关于时间的函数用图形描述出来.

解 王先生离家的距离关于时间的函数图形如图 1-1 所示.

如果给图 1-1 标明具体的数值(如图 1-2), 则可由解析表达式表示为

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 3, & 1 < x \leq 3, \\ 3x - 6, & 3 < x \leq 5. \end{cases}$$

该函数 $f(x)$ 的定义域为 $D=[0, 5]$, 但它在定义域的不同范围内是用不同解析式来表示的, 这样的函数称为分段函数. 分段函数是定义域上的一个函数, 不要理解为多个函数, 分段函数需要分段求值, 分段作图. 大家可以根据该分段函数重新叙述一件事.

例 8 作出下面分段函数的图形:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 1, \\ 3-x, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

解 该分段函数的图形如图 1-3 所示.

我们给出的函数定义是一种传统的函数模型, 到了 19 世纪 70 年代, 康托尔(Cantor, 1845—1918)的集合论出现之后, 函数可明确地定义

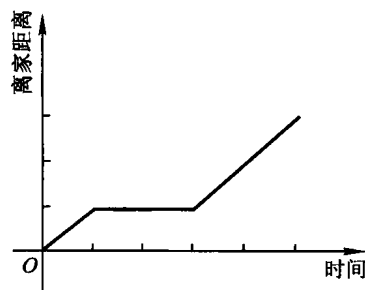


图 1-1

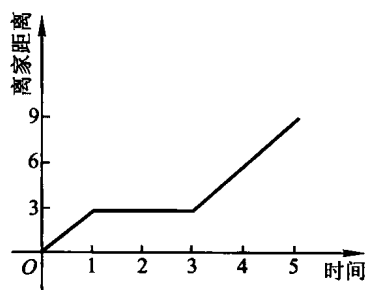


图 1-2

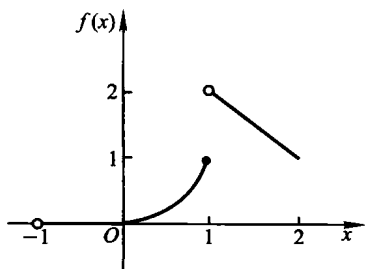


图 1-3

为集合间的对应关系,更突出了对应规律,是近代函数的模型.

定义 2 设 D 与 M 分别是两个非空实数集,存在对应规律 f ,若对 D 中的每一个数 x ,通过对应规律 f ,集合 M 中都有唯一确定的数 y 与之对应,则称 f 为从 D 到 M 的函数(也称为映射),记作

$$f: D \rightarrow M,$$

其中 D 称为函数 f 的定义域, D 中的每一个 x 根据对应规律 f 对应于一个 y ,记作 $y=f(x)$,称为函数 f 在 x 的函数值,全体函数值的集合

$$W = \{y | y=f(x), x \in D\} \subset M$$

称为函数 f 的值域, x 称为 f 的自变量, y 称为因变量,如图 1-4 所示.

例 9 设自变量 x 的取值范围为数集 $A = \{4, 6, 3\}$,下列数学结构给出了变量 y 与 x 的对应关系如下:

x	4	6	3	4
y	1	2	5	7

问该数学结构是否确定了 y 是 x 的函数?

解 由于在题设所给数学结构中, $x=4$ 时变量 y 有 2 个不同的值 1 和 7 与之对应,所以,该数学结构不是函数.

二、函数的几种特性

设函数 $f(x)$ 在某区间 I 上有定义.

1. 有界性

若存在正数 M ,使得在区间 I 上 $|f(x)| \leq M$,则称 $f(x)$ 在 I 上有界.

例 10 $f(x) = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界,因为 $|\sin x| \leq 1$. 而 $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内无界.

2. 单调性

若对于区间 I 内任意两点 x_1, x_2 ,当 $x_1 < x_2$ 时,有 $f(x_1) < f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 I 上单调增加,区间 I 称为单调增区间;若 $f(x_1) > f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 I 上单调减少,区间 I 称为单调减区间. 单调增区间或单调减区间统称为单调区间.

3. 奇偶性

设 I 为关于原点对称的区间,若对于任意 $x \in I$,都有 $f(-x) = f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数;若 $f(-x) = -f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数.

4. 周期性

若存在不为零的数 T ,使得对于任意 $x \in I$,有 $x+T \in I$,且 $f(x+T) = f(x)$,则称 $f(x)$ 为周期函数,通常所说的周期函数的周期是指它的最小正周期.

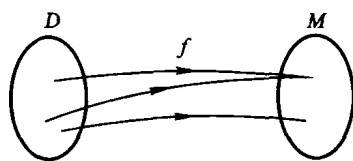


图 1-4

三、反函数

定义 3 设给定 y 是 x 的函数 $y=f(x)$, 如果把 y 当作自变量, x 当作函数, 则由关系式 $y=f(x)$ 所确定的函数 $x=\varphi(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数, 而 $y=f(x)$ 称为直接函数.

习惯上总是用 x 表示自变量, 而用 y 表示函数, 因此, 往往把 $x=\varphi(y)$ 改写成 $y=\varphi(x)$, 称为 $y=f(x)$ 的矫形反函数, 记作

$$y=f^{-1}(x),$$

所以, 我们常称函数 $y=f(x)$ 的反函数 $x=\varphi(y)$ 为直接反函数.

思考题

1. 确定一个函数需要有哪几个基本要素?
2. 思考函数的几种特性的几何意义.
3. 直接函数 $y=f(x)$, 其直接反函数为 $x=\varphi(y)$, 其矫形反函数为 $y=f^{-1}(x)=\varphi(x)$.
 - (1) $x=\varphi(y)$ 与 $y=\varphi(x)$ 是否为同一函数?
 - (2) $y=f(x)$, $x=\varphi(y)$, $y=f^{-1}(x)$ 在同一坐标系中的几何表现是什么?

习作题

1. 设自变量 $x \in \{1, 2, 3, 4\}$, 判断下列数学结构哪些是函数? 哪些不是函数? 为什么?

$$(1) \quad \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ f: & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 0 & 2 & 1 & -1 \end{array};$$

$$(2) \quad \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \varphi: & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array};$$

$$(3) \quad \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ y: & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 2 & 3 & 0 & 1 & 4 \end{array};$$

$$(4) \quad \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ h: & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 1 & 2 & 3 \end{array}.$$

2. 一位旅客住在旅馆里, 图 1-5 描述了他的一次行动. 请你根据图形给纵坐标赋予某一个物理量后, 再叙述他的这次行动. 你能给图 1-5 标上具体的数值, 精确描述这位旅客的这次行动并且用一个函数解析式表达出来吗?

3. 在下列各对函数中, 是相同函数的是().

$$(1) y=\ln x^7 \text{ 与 } y=7\ln x;$$

$$(2) y=\ln\sqrt{x} \text{ 与 } y=\frac{1}{2}\ln x;$$

$$(3) y=\cos x \text{ 与 } y=\sqrt{1-\sin^2 x};$$

$$(4) y=\frac{1}{x+1} \text{ 与 } y=\frac{x-1}{x^2-1};$$

$$(5) y=\ln x^8 \text{ 与 } y=8\ln x.$$

4. 求下列函数的定义域:

$$(1) y=\sqrt{x+1}+\frac{1}{x-2};$$

$$(2) y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

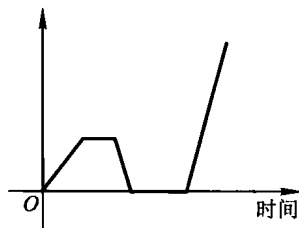


图 1-5