高职高专“十二五”规划教材

公共基础课教材

高等数学（下册）

GAODENG SHUXUE

主　编◎杨立军

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

高 等 数 学

(下 册)

主审　余克秋
主编　杨立军　罗成林
编者　沈　平　李　斌　毛天梅
　　　邹小维　章曙雯

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

本教材共9章，内容分别为：函数与极限；导数与微分；导数的应用；不定积分；定积分及其应用；微分方程；拉普拉斯变换；矩阵及其应用；无穷级数。本教材注重应用意识，将知识点以实例引入再回归到数学思想；另外，注重基本概念和基本方法的教学，在内容处理上兼顾对学生抽象概括能力、逻辑推理能力、自我学习能力、综合分析问题和解决问题能力的培养。对教材的深广度进行了合理调整，尽量与中学教材相适应，避免跨度太大，使学生能循序渐进地达到学习目标。

高等数学是理、工科院校一门重要的学科，是非数学专业理工科专业学生的必修课，也是学习其他相关课程的基础课程。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：全2册 / 杨立军主编．--上海：上海交通大学出版社，2012

ISBN 978－7－313－08686－0

Ⅰ.①高… Ⅱ.①杨… Ⅲ.①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第145282号

高等数学

(下册)

杨立军　主编

上海交通大学 出版社出版发行

(上海市番禺路951号　邮政编码200030)

电话：64071208　出版人：韩建民

北京市后沙峪印刷厂印刷　全国新华书店经销

开本：787mm×1092mm　1/16　总印张：23.5　总字数：567千字

2012年7月第1版　2012年7月第1次印刷

印数：1～3030

ISBN 978－7－313－08686－0/O　定价(上下册)：46.00元

前　言

为了适应高等院校人才培养的新要求，充分发挥数学课程在高等院校人才培养中的重要作用，本着“拓宽文化基础、增强能力支撑、构建学生可持续发展平台和提供专业工具”的精神，针对高等院校学生的学习特点，编者融合多年来的教学实践经验而编写了本教材。

本教材具有以下特色：

(1)理念创新：数学是一门传统而特殊的科学文化，它代表着通常意义的科学精神、客观思维和逻辑方法，数学研究是人类的智力开拓、推动人类进步最重要的思维学科之一。开设高等数学课程的意义和目的，既是继承人类智慧的结晶，也是通过数学知识的积累而进行思维训练，从而使学生走向社会之前具备一定的素质积淀，为其将来职业生涯的可持续发展而奠定基础。

(2)方法创新：注重应用意识，将知识点以实例引入再回归到数学思想，使学生对数学原理具备一定的应用概念；注重基本概念和基本方法的教学，培养学生运用数学原理及方法分析问题和解决问题的能力；注重通俗易懂，同时又兼顾数学的科学性和严谨性，对数学基本知识及其应用的叙述清晰而准确。

(3)内容创新：充分考虑高等院校学生的认知特点，在内容处理上兼顾对学生抽象概括能力、逻辑推理能力、自我学习能力、综合分析问题和解决问题能力的培养；对教材的深广度进行了合理调整，尽量与中学教材相适应，避免跨度太大，使学生能循序渐进地达到学习目标；合理设置习题的类型及数量，并尽可能与专业课程相联系，在保持数学课程自身系统性和逻辑性的基础上，尽可能显现抽象科学的直观性和应用性。

(4)版面创新：合理调整教材版面的整体布局，力图达到清晰明快的视觉效果，使学生在愉悦而静谧的阅读过程中汲取知识，以促进自身学习能力的提升。

本教材由杨立军担任主编，在编写过程中，沈平、李斌、毛天梅、邹小维、章曙雯等参编人员分别对各章节内容进行了精心的修改、调整、润色，罗成林教授审定并提出了许多指导性意见和建议，最后由余克秋统稿定稿。

由于编者水平有限，加之时间仓促，书中存在错漏之处，恳请广大读者批评指正。

武汉铁路职业技术学院数学教材编写组

目　录

第6章 微分方程

在生产实践和实际生活中，常常需要根据各种变量的关系求出变量的函数关系，而变量之间的某种关系又隐藏在其导数或微分之中，这样就需要列出含有未知函数导数或微分的方程，并解这种方程才能求得未知函数，解决这一问题的方法和途径就是微分方程理论. 本章将介绍关于微分方程的一些基本概念和几种较为简单的常微分方程的解法.

6.1 微分方程的基本概念

6.1.1 引例

例 1. 一曲线通过点(1,2)，且知在该曲线上任一点 $P(x,y)$ 处切线的斜率为 $2x$，求此曲线方程.

解: 设所求曲线的方程为 $y = y(x)$，根据导数的几何意义，可知未知函数 $y = y(x)$ 应满足关系式:

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$，或 $y' = 2x$，$\mathrm{d}y = 2x\mathrm{d}x$ ①

对 ① 式两边积分:

右边为 $\int y'\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}y = y + C_1$ ，左边为 $\int 2x\mathrm{d}x = x^2 + C_2$；

由于两边均为积分，所以积分产生的常数可以合二为一，一并写到右边，所以得

$y = x^2 + C$， ②

其中 C 是任意常数，由此得到的是一曲线族. 此外，因为未知函数 $y = y(x)$ 还应满足条件: $x = 1$ 时，$y = 2$ 简记为: $y|_{x=1} = 2$，代入 ② 式，得: $C = 1$，

所求曲线方程为: $y = x^2 + 1$.

例 2. 列车在平直线路上以 20m/s(72km/h) 的速度行驶，当制动时列车获得的加速度为 $-0.4\mathrm{m/s^2}$，问开始制动后多少时间列车才能停止，列车在这段时间里行驶了多少路程?

解: 设列车开始制动的时刻为 $t = 0$，制动 ts 时行驶的距离为 sm.

根据题意，列车制动阶段的运动方程 $s = s(t)$ 应满足关系式:

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -0.4, \qquad ①$$

把 ① 式两端积分一次，得 $v = \frac{ds}{dt} = -0.4t + C_1$， ②

再积分一次，得：$s = -0.2t^2 + C_1 t + C_2$， ③

这里 C_1, C_2 都是任意常数.

由于未知函数 $s = s(t)$ 还应满足下列条件：

$t = 0$ 时：$s = 0, v = \frac{ds}{dt} = 20$，简记为 $s|_{t=0} = 0, v|_{t=0} = \frac{ds}{dt}|_{t=0} = 20$， ④

分别代入 ②③ 得：$C_1 = 60, C_2 = 0$，

再把 C_1, C_2 的值代入 ② 式及 ③ 式得：

$$v = -0.4t + 20, \quad ⑤$$

$$s = -0.2t^2 + 20t, \quad ⑥$$

在 ⑤ 式中令 $v = 0$，得到列车从开始制动到完全停止所需的时间为：

$t = \frac{20}{0.4} = 50 \text{ s}$；

将 $t = 50$ 代入 ⑥ 式，得到列车在制动阶段行驶的路程为：$s = 500 \text{ m}$.

上两例中，所建立的变量关系方程中均含有未知函数的导数，这种方程称为微分方程，微分方程的相关概念介绍如下.

6.1.2 微分方程的有关概念

1) 微分方程

定义 6.1 凡表示未知函数、未知函数导数及自变量之间关系的方程称为微分方程. 或简言之，凡含未知函数导数(或微分)的方程称为微分方程.

例如：$y'' + 4xy' + 2y = 6x, y^{(4)} + 3y^{(3)} + y = 0$、$y^{(6)} = 0$，均为微分方程.

注意：在微分方程中，并不要求未知函数、未知函数导数与自变量三者都同时显现，但在方程中导数或微分是必须显现的.

2) 常微分方程

定义 6.2 如果微分方程中所含的未知函数是一元函数的微分方程，则称为常微分方程.

常微分方程的一般形式为：$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$，如 $\frac{d^2 y}{dx^2} = -ay^2$.

3) 偏微分方程

如果微分方程中所含的未知函数是多元函数的微分方程，则称为偏微分方程. 如 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a\frac{\partial^2 y}{\partial y^2}$，即未知函数含有多个变量的情况.

在本章中仅介绍几种较为简单的常微分方程及其解法.

4) 微分方程的阶

定义 6.3 微分方程中未知函数的最高阶导数的阶数，称为微分方程的阶.

例如：$x^3y''' + x^2y'' - 4xy' = 3x^2$，是三阶微分方程；

$y^{(4)} - 4y + 10y'' + 5y = \sin 2x$，是四阶微分方程；

$y^{(n)} + 1 = 0$，是 n 阶微分方程.

n 阶微分方程的一般形式为：

$F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)}) = 0$ 或 $y^{(n)} = f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$.

注意：n 阶微分方程中 $y^{(n)}$ 是必须出现的，而 $x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}$ 等变量则可以不出现.

5) 微分方程的解

(1) 微分方程的解.

定义 6.4 满足微分方程的函数(可以是显函数，也可是隐函数) 也即把函数及由它得出的相应的各阶导数，代入微分方程能使该方程成为恒等式，则此函数称为该微分方程的解.

设函数 $y = \varphi(x)$ 在区间 I 上有 n 阶连续导数，如果在区间 I 上 $F[x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x)] = 0$ 恒成立，那么函数 $y = \varphi(x)$ 就叫做微分方程 $F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)}) = 0$ 在区间 I 上的解.

(2) 微分方程的通解.

从上面例题知：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$ 的解是 $y = x^2 + C$；

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -0.4 \text{ 的解是 } s = -0.2t^2 + C_1t + C_2.$$

可以看出，一阶微分方程的解含有一个任意常数，二阶微分方程的解含有两个任意常数.

定义 6.5 如果微分方程的解中含有任意常数，且独立的任意常数的个数与微分方程的阶数相同，这样的解叫做微分方程的通解.

值得注意的是：微分方程的通解中，各个任意常数必须是相互独立的，必须实质上是任意的. 例如，$y = C_1x + C_2\mathrm{e}^x$ 中的 C_1,C_2 是相互独立的，实质上是任意的，但 $y = (C_1 + C_2)\mathrm{e}^x$ 中的 C_1,C_2 就不是相互独立的，实质上是一个常数.

(3) 微分方程的特解.

定义 6.6 微分方程通解中的任意常数被赋予了定值的解称作微分方程的特解.

说明：常微分方程的一个解对应平面上的一条曲线，叫做微分方程的积分曲线，多个解对应多条曲线，所以微分方程的通解表示的平面上的曲线族.

(4) 初值条件. 从前面例题可知，要得出微分方程的特解，往往先得给出未知函数在自变量取某值时的函数值及导数值的附加条件，这种条件称为微分方程的初值条件；如果附加条件是零时刻的函数值或导数值，则称为微分方程的初始条件.

一般的，因为 n 阶微分方程 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)}) = 0$ 的通解 $y = f(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$ 中含有 n 个任意常数，所以确定它们时需要 n 组数据，写成：$y\big|_{x=x_0} = y_0, y'\big|_{x=x_0} = y_1$，(其中 $x_0,y_0,y_1,\cdots,y_{(n-1)}$ 均是已知数)，这就是 n 阶微分方程的初值条件，只需把它们代入其通解中，可得 n 个方程的方程组，从而解出 n 个常数.

(5) 初值问题. 求微分方程满足初值条件的解的问题称为初值问题,实际上就是求取微分方程满足初值条件的特解问题. 例如求微分方程 $y' = f(x,y)$ 满足初值条件 $y|_{x=x_0} = y_0$ 的解的问题,记为:$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$,就是一个初值问题.

例 3. 验证函数 $x = C_1\cos kt + C_2\sin kt$ 是微分方程 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + k^2x = 0$ 的解,并求满足初始条件 $x|_{t=0} = A, x'|_{t=0} = 0$ 的特解.

解:(1) 因为:$x = C_1\cos kt + C_2\sin kt$,

所以所给函数的导数为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -kC_1\sin kt + kC_2\cos kt$,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} &= -k^2C_1\cos kt - k^2C_2\sin kt \\ &= -k^2(C_1\cos kt + C_2\sin kt).\end{aligned}$$

将 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ 及 x 的表达式代入微分方程中,得:

$$-k^2(C_1\cos kt + C_2\sin kt) + k^2(C_1\cos kt + C_2\sin kt) \equiv 0,$$

这是一个恒等式,表明函数 $x = C_1\cos kt + C_2\sin kt$ 满足方程 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + k^2x = 0$,因此所给函数是所给方程的解.

(2) 由条件 $x|_{t=0} = A$ 及 $x = C_1\cos kt + C_2\sin kt$ 得:$C_1 = A$,

再由条件 $x'|_{t=0} = 0$ 及 $x' = -kC_1\sin kt + kC_2\cos kt$ 得:$C_2 = 0$.

把 C_1, C_2 的值代入 $x = C_1\cos kt + C_2\sin kt$,

即得满足初始条件 $x|_{t=0} = A, x'|_{t=0} = 0$ 的特解为:$x = A\cos kt$.

例 4. 质量为 m 的物体只受重力作用而自由降落,试建立其微分方程.

解:选取物体降落的铅直线为 x 轴,其方向朝下指向地心. 并设物体在 t 时刻的位置为 $x = x(t)$,则由二阶导数的力学意义可知 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ 为物体运动方向的加速度,又因为 $F = ma$ 且物体“只受重力作用”,所以有:

$$mg = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = g, \text{(这即要建立的微分方程)} \quad ①$$

积分一次得
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = gt + C_1, \quad ②$$

再积分一次得
$$x = \frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2, \quad ③$$

此为微分方程的通解.

假定物体开始下降时刻 $t = 0$ 时物体的位置为 x_0,速度为 v_0,

即初始条件为
$$x\Big|_{t=0} = x_0, v\Big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = v_0,$$

代入 ③ 式得 $C_1 = v_0, C_2 = x_0$,

所以自由降落物体的运动方程为 $x = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0$;

如果是自由落体运动,并设此时的位置 $x = 0$,

则初始条件为 $x\Big|_{t=0} = 0, v\Big|_{t=0} = \frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = 0$,

得自由落体运动运动方程为 $x = \frac{1}{2}gt^2$.

6.1 课堂练习与作业

(1) 指出下列微分方程的阶数:

①$x\mathrm{d}x + y^2\mathrm{d}y = 0$; ②$y'' + 6y' = 2x^2 - 1$;

③$L\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}Q = 0$; ④$xy'' + 3yy' - x = 0$.

(2) 验证下列各题中所给的函数是否为所给微分方程的解:

①$y'' - 2y' - y = 0, y = e^x + e^{-x}$;

②$y'' + y = e^x, y = C_1\sin x + C_2\cos x + \frac{1}{2}e^x$.

(3) 验证 $y = Cx^3$ 是方程 $3y - xy' = 0$ 的通解,并求满足初始条件 $y(1) = \frac{1}{3}$ 的特解.

6.2 可分离变量的微分方程及其解法

6.2.1 可分离变量的微分方程

1) 概念

定义 6.7 形如$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y)$的一阶微分方程称为可分离变量方程(其中 $f(x)$,$g(y)$ 分别是 x 和 y 的连续函数,且 $g(y) \neq 0$).

2) 解法

(1) 整理变形并分离变量得出$\frac{\mathrm{d}y}{g(x)} = f(x)\mathrm{d}x$ 的形式;

(2) 两边积分$\int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x$,若$\frac{1}{g(y)}$,$f(x)$ 的原函数分别为 $G(y)$,$F(x)$,则方程的通解为:$G(y) = F(x) + C$.

例 1. 求方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x}$解.

解:(1) 显然 $y = 0$ 为方程的解;

(2) 当 $y\neq 0$ 时，方程可变为 $\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$，所以是可分离变量的微分方程.

两边积分得：

$$\ln|y|=\ln|x|+C_1\text{，即 }\ln\left|\frac{y}{x}\right|=C_1,\ \frac{y}{x}=\pm e^{C_1},$$

令 $\pm e^{C_1}=C$，于是得原方程的通解为 $\quad y=Cx$.

注意：不考虑 y 是否为零，由原方程直接变形为 $\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$，且两边积分时不取绝对值则得 $\ln y=\ln x+\ln C$，即 $y=Cx$，与上解答结果完全一样.

例 2. 求解 $x(y^2-1)\mathrm{d}x+y(x^2-1)\mathrm{d}y=0$.

解：(1) 显然 $y=\pm 1$ 和 $x=\pm 1$ 均为方程的解；

(2) 当 $y\neq\pm 1, x\neq\pm 1$ 时，方程可为：$\frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x+\frac{y}{y^2-1}\mathrm{d}y=0$，所以是可分离变量的微分方程，用可分离变量法求解.

两边积分，得 $\quad \ln|x^2-1|+\ln|y^2-1|=\ln|C|$，

即 $\quad (y^2-1)(x^2-1)=C(C\neq 0)$，

于是原方程的通解为 $\quad (y^2-1)(x^2-1)=C$.

该通解中包含了 $y=\pm 1, y=\pm 1$ 的情形.

从上两例可知，在微分方程的求解过程中凡涉及分母为零和取绝对值的情况时，往往可以不予考虑，但最终所得结果会一样. 于是使微分的求解过程得到简化.

例 3. 求微分方程 $x+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1+y^2-xy^2$ 的通解.

解：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1-x+y^2(1-x)=(1-x)(1+y^2)$，是可分离变量的微分方程，用可分离变量法求解.

分离变量 $$\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=(1-x)\mathrm{d}x,$$

积分得 $$\arctan y=x-\frac{1}{2}x^2+C(C\text{ 为任意常数}).$$

$\arctan y=x-\frac{1}{2}x^2+C$（$C$ 为任意常数）即为所求微分方程的通解.

例 4. 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y^2+1}{y(x^2-1)}$ 的通解.

解：分离变量 $$\frac{y}{y^2+1}\mathrm{d}y=\frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x,$$

两边积分 $$\int\frac{y}{y^2+1}\,\mathrm{d}y=\int\frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x,$$

得 $$\frac{1}{2}\ln(y^2+1)=\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{2}\ln C,$$

化简 $$y^2+1=C\cdot\frac{x-1}{x+1}(C\text{ 为任意常数}).$$

$y^2+1=C\cdot\dfrac{x-1}{x+1}$（$C$ 为任意常数）即为所求微分方程的通解.

6.2.2　通过变量代换可化为可分离变量的微分方程

有些一阶微分方程，虽然不是直接的可分离变量的微分方程，但经适当的变形后实施变量代换，则可转化为可分离变量微分方程.

1) $\dfrac{dy}{dx}=f(ax+by+c)$ 型微分方程

对此类微分方程的处理通常是：令 $ax+by+c=z$ 实施变量代换，转化为可分离变量微分方程 $\dfrac{1}{a+bf(z)}dz=dx$，然后两边积分，最后回代即可.

例 5. 求解方程 $\dfrac{dy}{dx}=x+y+1$.　①

解： 令 $z=x+y+1$，　②

两边对 x 求导得：

$$\frac{dz}{dx}=1+\frac{dy}{dx}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}-1,\tag{③}$$

式 ②、③ 同代入式 ① 得：$\dfrac{dz}{dx}-1=z$，

分离变量

$$\frac{dz}{z+1}=dx\Rightarrow\ln(z+1)=x+\ln C,$$

$$\ln\frac{z+1}{C}=x\Rightarrow\frac{z+1}{C}=e^x\Rightarrow z+1=C_1e^x,$$

即

$$x+y+1+1=Ce^y\Rightarrow y=Ce^x-x-2.$$

例 6. 求 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x+y+1}$ 的解.

解： 颠倒法也是常用的一种变形，此题先用颠倒法将原方程变为：

$\dfrac{dx}{dy}=x+y+1$，　①

再令　$z=x+y+1$，　②

式 ② 两边对 y 求导得　$\dfrac{dz}{dy}=\dfrac{dx}{dy}+1\Rightarrow\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{dz}{dy}-1$，　③

式 ②、③ 同代入式 ① 得　$\dfrac{dz}{dy}-1=z$，

分离变量

$$\frac{dz}{z+1}=dy\Rightarrow\ln(z+1)=y+\ln C,$$

$$\ln\frac{z+1}{C}=y\Rightarrow\frac{z+1}{C}=e^y\Rightarrow z+1=C_1e^y.$$

即　$x+y+1+1=Ce^y\Rightarrow x=Ce^y-y-2$.

例 7. 求 $y'=\sin(x-y)$ 的解.

解：令 $x-y=u$， ①

两边对 x 求导得：$u'=1-y' \Rightarrow y'=1-u'$， ②

式 ①、② 同代入原式得　　$1-u'=\sin u$，

即 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1-\sin u$ 分离变量并积分得：

$$\int \frac{1}{1-\sin u}\mathrm{d}u=\int \mathrm{d}x \Rightarrow \int \frac{1+\sin u}{1-\sin^2 u}\mathrm{d}u=x+C,$$

$$\int \frac{1+\sin u}{\cos^2 u}\mathrm{d}u=x+C,$$

$$\int \sec^2 u\mathrm{d}u+\int \sec u\tan u\mathrm{d}u=x+C,$$

$$\tan u+\sec u=x+C,$$

$$\tan(x-y)+\sec(x-y)=x+C.$$

2) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{y}{x}\right)$ 型微分方程

(1) 概念：

在一阶微分方程中，如果 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y$ 前多项式中关于 x,y 各单项式的次数均相等，则它们总可化为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{y}{x}\right)$ 的形式. 形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{y}{x}\right)$ 的一阶微分方程称为“关于 x,y 的齐次微分方程”.

例如：$(xy^2-x^3)\mathrm{d}x+y(x^2-2y^2)\mathrm{d}y=0$，因为各单项式的次数均为三次，所以它是关于 x,y 的齐次微分方程.

又如：$(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=0$ 也是齐次方程，因其可化为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x+y}{x-y}=\frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$.

(2) 解法：

① 变形：将原方程变形成 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{y}{x}\right)$ 形式；

② 代换：令 $\frac{y}{x}=u$，则 $y=ux$，两边对 x 求导得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u$，将所设 $\frac{y}{x}=u$ 和所得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u$ 一同代入原方程，从而得：$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=f(u)$；

③ 分离变量得 $\frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$，

④ 回代：两端积分 $\int \frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u}=\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$ 求出结果后，再用 $\frac{y}{x}$ 回代 u，便得所给齐次方程的通解.

例 8. 解方程 $xy'=y(1+\ln y-\ln x)$.

解：原方程可化为　　$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}\left(1+\ln\frac{y}{x}\right)$，

令 $u=\frac{y}{x}$，则 $y=ux$，得：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u$，于是：$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=u(1+\ln u)$，

分离变量 $\frac{\mathrm{d}u}{u\ln u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$，

两端积分得 $\ln\ln u=\ln x+\ln C$，

$\ln u=Cx$，即 $u=\mathrm{e}^{Cx}$，

故方程通解为 $y=x\mathrm{e}^{Cx}$.

3) 其他形式的变量代换

变量代换的实施并不是都有一定的法则可依，往往要据具体问题具体分析，有时不妨可用试探方法去尝试. 举例说明如下：

例 9. 求 $xy'+y=y(\ln x+\ln y)$ 的解.

解：原式可变为 $xy'+y=y\ln(xy)$，令 $xy=u$，

对 x 求导得 $u'=y+xy'$，

代入原式 $u'=\frac{u}{x}\ln(u)\Rightarrow\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u}{x}\ln u$，

分离分量得 $\frac{1}{u\ln u}\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$，

积分得 $\ln(\ln u)=\ln x+\ln C\Rightarrow\ln u=Cx$，

所以有 $xy=\mathrm{e}^{C\cdot x}$.

注意：(1) 以微分形式给出的微分方程，两个变量地位对等.

(2) 当求得一个方程的通解为隐函数时，通常认为求解过程完成.

一般说来，并不勉强一定要求出显函数的表达式.

6.2.3 可分离变量微分方程应用举例

利用微分方程解决实际问题的一般步骤是：

(1) 分析问题，设立未知函数，并据条件建立微分方程，确定初值条件；

(2) 求出微分方程的通解；

(3) 据初值条件确定通解中的任意常数，求出微分方程相应的特解.

下面举例说明微分方程的应用.

例 10. [曲线方程] 已知曲线上任意一点 $P(x,y)$ 处的切线垂直于该点与原点的连线，求该曲线的方程.

解：设该曲线的方程为 $y=f(x)$，则据题意得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{y}{x}=-1,$$

$$y\mathrm{d}y=-x\mathrm{d}x\Rightarrow\frac{1}{2}y^2=-\frac{1}{2}x^2+C_1,$$

令 $2C_1=C$，得 $y^2+x^2=C$.

$y^2+x^2=C$ 即为所求曲线的方程.

例 11.［物体冷却规律］牛顿冷却定律指出：物体在空气中的冷却速度与物体的温度和空气的温度差成正比．现将牛顿冷却定律应用于刑事侦查中死亡时间的鉴定：在一次谋杀发生后，尸体的温度从原来的 37℃ 按照牛顿冷却定律下降，如果 2 小时后尸体的温度变为 35℃，并且假定当时周围空气温度保持为 20℃ 不变，试求出尸体温度 H 随时间 t 的变化规律；如果尸体发现时的温度为 30℃，时间是下午 4 点整，那么谋杀是何时发生的？

解：设尸体温度随时间的变化的函数为 $H=H(t)$（t 从谋杀后计时），则据尸体在空气中的冷却速度 $\frac{dH}{dt}$ 与尸体的温度和空气的温度 20℃ 的差成正比，可知 $\frac{dH}{dt}=-k(H-20)$，其中 k 为正的常数，取负号是因为尸体的温度是随时间的增加而下降的，即 $\frac{dH}{dt}<0$，取负保证 k 正．

初始条件为 $\begin{cases} H(0)=37 \\ H(2)=35 \end{cases}$，

由 $\frac{dH}{dt}=-k(H-20)$ 得 $\quad \frac{dH}{H-20}=-kt \Rightarrow H-20=Ce^{-kt}$，

代入 $H(0)=37$ 得出 $C=17$；所以 $H=20+17e^{-kt}$，

代入 $H(2)=35$ 得出 $k=0.063$，

所以尸体温度 H 随时间 t 的变化规律为：$H=20+17e^{0.063t}$；

再以 $H(t)=30$ 代入，得出 $t=8.4(h)$，

从下午 4 时倒退 8 小时 24 分，即谋杀发生在上午 7 时 36 分．

例 12.［质量衰变］放射性元素镭的质量衰变速度与它的现存质量 M 成正比，现已知镭经过 1600 年后仅剩下原始质量 M_0 的一半，试求镭的质量 M 与时间 t 的关系．

解：设镭在 t 时刻的质量为 $M(t)$，衰变速度的比例系数为 $-k$，取负是因为 $M(t)$ 是单调减少函数，$\frac{dM}{dt}<0$，据题意有 $\quad \frac{dM(t)}{dt}=-kM(t)$，

解得 $\quad M(t)=Ce^{-kt}$，

以 $M(0)=M_0$ 得出 $C=M_0$，以 $M(1600)=\frac{1}{2}M_0$ 代入得 $\quad k=\frac{\ln 2}{1600}$，

所以镭的质量 M 与时间 t 的关系为 $\quad M(t)=M_0e^{-\frac{\ln 2}{1600}\cdot t}$

6.2 课堂练习与作业

(1) 求微分方程 $xy'-y\ln y=0$ 的通解．

(2) 求微分方程 $y'\sin x=y\ln y$ 在 $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=e$ 条件下的特解．

(3) 求微分方程 $\cos x\sin y dy=\cos y\sin x dx$ 在 $y(0)=\frac{\pi}{4}$ 条件下的特解．

(4) 一曲线通过(2,3)点，它在两坐标轴间任意一条切线线段均被切点平分，求此曲线方程．

(5) 已知物体在空气中的冷却速度与物体及空气的温度差成正比．假定空气温度保持为