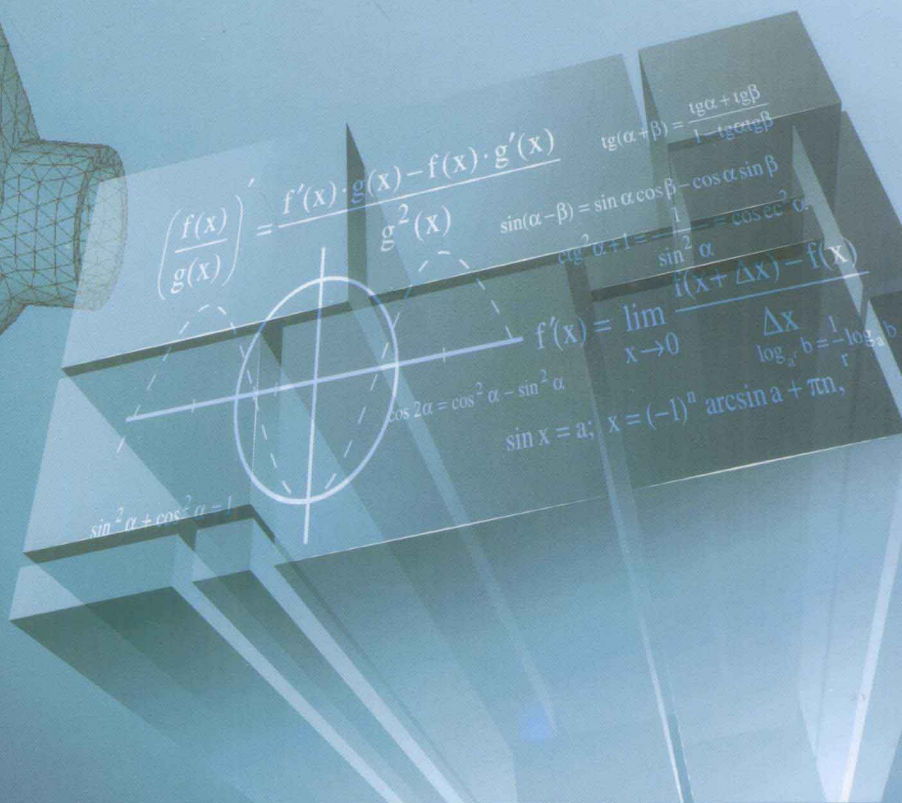
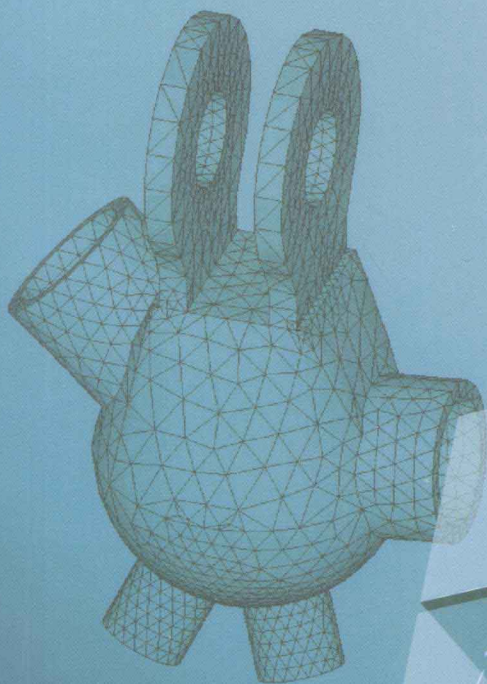




# 有限单元法及其应用

彭细荣 杨庆生 孙卓 编著



$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$$

$$\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha} = \operatorname{cosec}^2\alpha$$

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{x}$$

$$\log_a b = \frac{1}{r} \log_a b$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\sin x = a; x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$



清华大学出版社  
<http://www.tup.com.cn>



北京交通大学出版社  
<http://press.bjtu.edu.cn>

# 有限单元法及其应用

彭细荣 杨庆生 孙 卓 编著

清华大学出版社

北京交通大学出版社

· 北京 ·

## 内 容 简 介

本书主要讲述线弹性有限元法的基本理论、MATLAB 编程实现及相应商业有限元软件的应用,对线弹性动力有限元法及材料、几何和接触三类非线性有限元法的基本概念和程序应用也进行了介绍。

全书公式推导详尽, MATLAB 符号运算及算法简单易懂, 理论介绍与软件应用连接紧密, 适合作为非力学专业高年级本科生及研究生教材使用, 也可作为有限元应用领域内工程技术人员的参考书。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签, 无标签者不得销售。

版权所有, 侵权必究。侵权举报电话: 010-62782989 13501256678 13801310933

## 图书在版编目(CIP)数据

有限单元法及其应用/彭细荣, 杨庆生, 孙卓编著. —北京: 清华大学出版社; 北京交通大学出版社, 2012. 3

ISBN 978-7-5121-0789-2

I. ①有… II. ①彭… ②杨… ③孙… III. ①有限元法 IV. ①O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 228889 号

责任编辑: 高振宇

出版发行: 清华大学出版社 邮编: 100084

电话: 010-62776969

北京交通大学出版社 邮编: 100044

电话: 010-51686414

印刷者: 北京瑞达方舟印务有限公司

经 销: 全国新华书店

开 本: 185×260 印张: 27.75 字数: 675 千字 配光盘 1 张

版 次: 2012 年 3 月第 1 版 2012 年 3 月第 1 次印刷

书 号: ISBN 978-7-5121-0789-2/O·91

印 数: 1~3 000 册 定价: 49.00 元 (含光盘)

---

本书如有质量问题, 请向北京交通大学出版社质监局反映。对您的意见和批评, 我们表示欢迎和感谢。

投诉电话: 010-51686043, 51686008; 传真: 010-62225406; E-mail: press@bjtu.edu.cn。

# 前 言

基于有限元法的计算软件已经在各个工程领域内得到了广泛的应用，各种商业通用有限元软件，如 ANSYS、Nastran、Marc、Abaqus 等纷纷被国内企业和研究机构引进，其他各行业的专业有限元软件，如土木工程行业的 ETABS、Midas 等也得到了广泛的应用。基于有限元软件的计算机辅助工程（CAE）已经形成了一个巨大的产业，但 CAE 软件与计算机辅助设计（CAD）软件有很大的差别，CAE 软件要求软件应用人员对有限元的基本理论有良好的理解，才能正确地使用有限元软件，并正确地理解、评价有限元软件所给出的结果。然而，有限元理论涉及数学和力学方面的多个课程，这些课程大多数在大学本科期间并没有深入讲解，因而给高年级本科生或研究生及在此领域内从业的工程技术人员进一步学习有限元理论带来了很大障碍。而目前国内的大多数有限元教程又多是大篇幅的理论公式，有些理论推导过程也不详尽，同时缺少给读者可练习用的实例，在有限元理论与商业软件的应用间缺少相关的对照性介绍，所有这些都给读者，尤其是对非力学专业背景的读者，学习有限元理论带来了不少困难。本书主要目的是针对非力学专业背景的读者介绍有限元的基本理论及其编程，以及商业通用有限元软件的应用，通过对理论的推导、归纳，对算法的编程实现，以及对商业有限元软件的对照介绍，在有限元理论到商业软件的应用间建立更通畅的理解渠道。

基于此目标，本书在理论推导方面尽量详尽地给出了每一步骤的推导，并用 MATLAB 符号运算的功能，辅助完成一些繁杂的矩阵及向量运算，许多推导过程读者都可借助书中给出的 MATLAB 小程序完成。对应用到的一些力学理论，如各种梁、板理论进行了较为详尽的介绍。对一些理论适当地进行了归纳。考虑到 MATLAB 编程简单易学并有丰富的矩阵运算函数库的特点，本书中所有的数值运算的程序都用 MATLAB 编程实现，使读者可以更专注于有限元算法本身，而不是矩阵或向量运算实现的一些细节。书中给出的所有 MATLAB 有限元代码是参考了网上的有限元 MATLAB 工具箱修改而来，给出的代码已经形成了线弹性有限元的 MATLAB 工具箱，实现了书中所讲单元的大部分代码，读者不难参照已经给出的代码来扩展自己的单元类型函数。在商业软件的应用方面目前给出了以 ANSYS 软件为例的一些单元介绍及相应的软件使用操作，ANSYS 命令流文件在书中进行了详细的注释，相关 GUI 操作过程在书中所附光盘中给出。

本书重点介绍了线弹性有限元的基本理论及常用结构如梁及板的理论知识，同时大致介绍了线弹性动力有限元的基本理论及相应算法，概略介绍了材料、几何及接触等三大类非线性的基本理论及相应的商业软件应用。梁及板理论，以及非线性部分的大部分基本理论参考了 Bhatti M. Asghar 所编写的教材，本书的主要工作是为其中的算例增加了 MATLAB 程序，同时增补了 ANSYS 软件在非线性方面的应用算例。其他内容的参考文献在本书末尾已经给出，文中并没有给出具体的引用，在此对参考文献中的作者表示感谢，没有前人的这些优秀教程为参考，作者就没有了素材，也就不可能编辑成此书。

本书由广东华路交通科技有限公司彭细荣高级工程师执笔完成，本书初稿形成于编者任职于哈尔滨工业大学深圳研究生院期间，北京工业大学的杨庆生教授对全部内容进行了详细的审阅和修改。哈尔滨工业大学深圳研究生院的研究生陈辉做了书中的部分算例，马强对全书内容及公式进行过详尽检查，哈尔滨工业大学深圳研究生院 2008、2009 及 2010 级的所有土木工程及力学专业的学生在有限元课程的教学互动环节中提出了非常多的有益建议，在此一并表示衷心感谢。本书虽经多次修改完善，但肯定会存在不足之处，欢迎广大读者提出批评和建议。

编者邮箱：pxr568@163.com。QQ：19184329

编 者  
2012 年 2 月

# 目 录

第 1 章 预备知识 .....	1
1.1 MATLAB 编程及符号运算 .....	1
1.1.1 MATLAB 语言简介 .....	1
1.1.2 M 文件及 M 函数 .....	2
1.1.3 常量、变量、运算符及表达式 .....	3
1.1.4 向量及其运算 .....	4
1.1.5 矩阵及其运算 .....	6
1.1.6 多项式运算 .....	11
1.1.7 控制语句 .....	13
1.1.8 MATLAB 符号运算 .....	15
1.1.9 MATLAB 绘图 .....	19
1.2 分部积分 .....	21
1.3 泛函极值与变分法 .....	23
1.3.1 函数的极值 .....	23
1.3.2 泛函极值问题 .....	24
1.3.3 微分方程的等效泛函形式 .....	27
第 2 章 有限元数学力学基础 .....	29
2.1 直接刚度法 .....	29
2.1.1 1 维弹簧系统 .....	29
2.1.2 结点平衡法求解 .....	29
2.1.3 直接刚度法求解 .....	31
2.1.4 线性弹簧单元的其他形式 .....	35
2.2 加权残值法及 Galerkin 有限元法 .....	36
2.2.1 1 维直杆受轴向力作用 .....	36
2.2.2 材料力学法求精确解 .....	36
2.2.3 弹性力学法求精确解 .....	36
2.2.4 微分方程等效积分形式及加权残值法 .....	37
2.2.5 Galerkin 法应用于等效积分弱形式 .....	43
2.2.6 采用分段近似函数的 Galerkin 法 .....	48
2.2.7 Galerkin 有限元法 .....	52
2.3 Rayleigh-Ritz 法及 Ritz 有限元法 .....	57
2.3.1 微分方程等效泛函形式 .....	57
2.3.2 Rayleigh-Ritz 法 .....	59

2.3.3 Ritz 有限元法 .....	61
2.4 有限元求解方法 .....	62
2.5 有限元软件 .....	64
2.5.1 有限元法的一般求解过程 .....	64
2.5.2 有限元软件模块 .....	64
2.5.3 有限元软件功能 .....	65
2.6 算例 .....	67
<b>第3章 桁架结构</b> .....	<b>71</b>
3.1 杆单元力学基础 .....	71
3.1.1 基本假定及公式 .....	71
3.1.2 微分方程等效积分弱形式、虚功原理及最小势能原理 .....	72
3.2 结构离散 .....	73
3.3 单元分析及坐标变换 .....	74
3.3.1 2 结点线性杆单元结点向量 .....	74
3.3.2 直接刚度法推导单元方程 .....	75
3.3.3 坐标映射 .....	77
3.3.4 形函数 .....	77
3.3.5 单元应变及应力 .....	79
3.3.6 最小势能原理推导单元方程 .....	79
3.3.7 虚功原理推导单元方程 .....	80
3.3.8 Galerkin 方法推导单元方程 .....	81
3.3.9 温度载荷 .....	82
3.3.10 局部 - 总体坐标变换 .....	82
3.3.11 单元内力计算 .....	84
3.3.12 杆单元 MATLAB 函数 .....	84
3.4 单元组装 .....	86
3.4.1 单元组装成结构的力学及数学意义 .....	86
3.4.2 单元组装成结构的程序实现 .....	87
3.4.3 总体刚度矩阵性质 .....	92
3.5 边界条件处理 .....	92
3.5.1 位移边界条件类型 .....	92
3.5.2 直接缩减法 .....	94
3.5.3 对角元素置 1 法 .....	96
3.5.4 对角元素乘大数法 .....	98
3.5.5 惩罚法 .....	99
3.6 算例 .....	101
<b>第4章 弹性固体结构</b> .....	<b>109</b>
4.1 弹性力学基本方程及其变分原理 .....	109
4.1.1 弹性力学基本方程 .....	109

4.1.2	虚功原理	117
4.1.3	最小势能原理	118
4.1.4	应力状态	119
4.2	2 维平面问题	123
4.2.1	3 结点三角形单元	123
4.2.2	其他平面单元	136
4.2.3	算例	140
4.3	轴对称问题	146
4.4	3 维空间问题	151
4.4.1	4 结点四面体单元	151
4.4.2	8 结点八面体单元	154
4.5	算例	155
<b>第 5 章</b>	<b>梁及框架结构</b>	<b>160</b>
5.1	Euler-Bernoulli 梁理论	160
5.1.1	基本假定及公式	160
5.1.2	微分方程等效积分弱形式、虚功原理及最小势能原理	163
5.2	基于 Euler-Bernoulli 梁理论的 2 结点梁单元	165
5.2.1	结点变量	165
5.2.2	坐标映射	165
5.2.3	形函数	166
5.2.4	单元位移	168
5.2.5	单元曲率矩阵 (广义应变矩阵)	168
5.2.6	单元刚度矩阵	169
5.2.7	等效结点载荷向量	169
5.2.8	弯矩及剪力计算	170
5.3	基于 Euler-Bernoulli 梁理论的 2 维框架单元	175
5.4	基于 Euler-Bernoulli 梁理论的 3 维框架单元	184
5.5	Timoshenko 梁理论	186
5.5.1	基本假定及公式	186
5.5.2	微分方程等效积分弱形式、虚功原理及最小势能原理	189
5.6	剪切变形梁单元	190
5.6.1	Timoshenko 梁单元	190
5.6.2	剪切闭锁及其解决方法	193
5.6.3	考虑剪切变形梁单元	195
5.7	算例	203
<b>第 6 章</b>	<b>板壳结构</b>	<b>210</b>
6.1	Kirchhoff 板理论	211
6.1.1	基本假定及公式	211
6.1.2	微分方程等效积分弱形式、虚功原理及最小势能原理	217



6.2	Kirchhoff 板单元 .....	219
6.2.1	Kirchhoff 板单元方程的一般形式 .....	219
6.2.2	矩形 Kirchhoff 板单元 .....	220
6.3	Mindlin 板理论 .....	223
6.3.1	基本假定及公式 .....	223
6.3.2	微分方程等效积分弱形式、虚功原理及最小势能原理 .....	227
6.4	基于位移的 Mindlin 板单元 .....	228
6.4.1	Mindlin 板单元方程的一般形式 .....	228
6.4.2	矩形 Mindlin 板单元 .....	230
6.4.3	Mindlin 板单元的剪切闭锁问题 .....	232
6.5	离散 Kirchhoff 约束板单元 .....	234
6.6	壳结构 .....	237
6.6.1	由平面单元及弯曲单元组成的壳单元 .....	237
6.6.2	从 3 维单元退化壳单元 .....	243
6.7	算例 .....	251
<b>第 7 章</b>	<b>有限元法中的几个专题 .....</b>	<b>258</b>
7.1	等参单元 .....	258
7.2	数值积分 .....	260
7.2.1	积分计算公式 .....	260
7.2.2	积分阶数的选择 .....	265
7.3	应力计算 .....	265
7.3.1	单元应力计算最佳位置点 .....	266
7.3.2	单元应力插值与外插 .....	267
7.3.3	结点应力平均 .....	267
7.4	有限元收敛准则及解的性质 .....	270
7.4.1	收敛准则及其物理意义 .....	270
7.4.2	离散误差及收敛率 .....	272
7.4.3	位移有限元解的下限性质 .....	272
7.5	单元形函数构造 .....	273
7.5.1	选择单元位移函数的原则 .....	273
7.5.2	单元形函数构造过程 .....	274
7.5.3	形函数性质 .....	275
7.6	非协调元及分片测试 .....	275
7.6.1	4 结点平面四边形非协调元 .....	275
7.6.2	分片测试 .....	277
<b>第 8 章</b>	<b>结构振动与动力响应分析 .....</b>	<b>281</b>
8.1	动力学基本方程 .....	281
8.2	质量矩阵和阻尼矩阵 .....	283
8.2.1	协调质量矩阵和集中质量矩阵 .....	283

8.2.2 阻尼矩阵 .....	284
8.3 大型特征值问题的解法 .....	285
8.3.1 系统特征方程及特征解的性质 .....	285
8.3.2 反迭代法(反幂法) .....	286
8.3.3 子空间迭代法 .....	291
8.3.4 里兹向量直接叠加法 .....	295
8.3.5 Lanczos 方法 .....	297
8.4 直接积分法 .....	300
8.4.1 中心差分法 .....	300
8.4.2 Newmark 方法 .....	303
8.5 振型叠加法 .....	306
8.6 算例 .....	311
<b>第9章 非线性问题解法</b> .....	<b>320</b>
9.1 非线性问题 .....	320
9.2 Newton-Raphson 迭代法 .....	321
9.3 常刚度迭代——修正的 Newton-Raphson 方法 .....	326
9.4 载荷增量法 .....	329
9.5 弧长法 .....	331
9.6 线性化及方向导数 .....	335
<b>第10章 材料非线性问题</b> .....	<b>339</b>
10.1 受轴向力作用的杆 .....	339
10.1.1 微分方程及等效积分弱形式的线性化 .....	339
10.1.2 2 结点杆单元 .....	339
10.1.3 1 维弹塑性问题 .....	340
10.2 桁架结构的材料非线性分析 .....	348
10.3 一般固体结构的材料非线性 .....	352
10.3.1 有限元方程的一般形式 .....	352
10.3.2 增量应力-应变方程的一般公式 .....	352
10.4 材料非线性分析算例 .....	356
<b>第11章 几何非线性问题</b> .....	<b>363</b>
11.1 连续介质力学基本概念 .....	363
11.1.1 变形梯度 .....	363
11.1.2 Green-Lagrange 应变 .....	369
11.1.3 Cauchy 及 Piola-Kirchhoff 应力 .....	373
11.2 控制微分方程及弱形式 .....	374
11.3 弱形式线性化 .....	378
11.4 单元切线矩阵的一般形式 .....	382
11.5 本构方程 .....	384
11.5.1 Kirchhoff 材料 .....	385

11.5.2 可压缩 Neo-Hookean 材料 .....	385
11.6 平面应力分析 .....	387
11.7 几何非线性分析算例 .....	394
<b>第 12 章 接触非线性问题 .....</b>	<b>402</b>
12.1 简单的法向接触例子 .....	402
12.1.1 直接解法 .....	402
12.1.2 用法向接触约束求解 .....	403
12.2 有摩擦接触问题 .....	404
12.2.1 求解无摩擦阻力的梁问题 .....	405
12.2.2 摩擦约束函数 .....	406
12.2.3 求解有大摩擦阻力的梁问题 .....	406
12.2.4 求解有小摩擦阻力的梁问题 .....	407
12.3 一般接触问题 .....	407
12.3.1 接触点及间隙计算 .....	408
12.3.2 接触面上的力 .....	413
12.3.3 Lagrange 乘子弱形式 .....	413
12.3.4 惩罚公式 .....	415
12.4 接触算例 .....	416
<b>参考文献 .....</b>	<b>434</b>

# 第1章 预备知识

本章介绍阅读本书所需要的预备知识，学过“高等数学”、“线性代数”、“材料力学”、“结构力学”和“弹性力学”之后，再学习完本章介绍的预备知识就具备了学习本书所述内容的基础。已经熟知本章相关内容的读者可以直接进入第2章学习。由于有限元涉及大量繁杂的运算及复杂的算法，本书大量借助 MATLAB 编程及其符号运算的功能进行计算及公式演算，因而首先对 MATLAB 的相关内容进行了介绍；其次介绍“高等数学”中的1维、2维及3维分部积分公式；最后介绍泛函极值与变分法一些基本概念及公式。更为详尽的内容请参阅相关教材。

## 1.1 MATLAB 编程及符号运算

### 1.1.1 MATLAB 语言简介

在有限元方法中，需要进行大量的公式推导及数值计算。如果用 Fortran 和 C 语言等编写计算程序，编程者需要关心矩阵及数组运算及计算机内存优化等细节，繁杂且易出错，而且作为数值计算语言，它们也不能进行符号运算。美国 Mathwork 公司的“Matrix Laboratory”（缩写为 MATLAB）软件包，集数值计算、图形处理及符号运算于一体，功能强大，简单易学，应用于有限元理论的公式推导及数值计算，可以帮助进行繁杂的矩阵符号运算及简化各种计算算法。MATLAB 语言有如下特点。

#### 1. 编程效率高、使用灵活方便

MATLAB 语言规定了矩阵及数组间的常见运算，并给出矩阵函数和特殊矩阵专门的库函数，使得矩阵运算书写方便且更接近公式形式，不需要按传统的方法编程，编程效率高，易学易懂。MATLAB 语言是一种解释执行的语言，MATLAB 运行时，如直接在命令行输入 MATLAB 语句，包括调用 M 文件的语句，每输入一条语句，就立即对其进行处理，完成编译、连接和运行的全过程，使用灵活方便。

#### 2. 方便强大的绘图功能

MATLAB 的绘图是十分方便的，它有一系列绘图函数（命令），如在图上标出图题、XY 轴标注、格栅绘制等只需调用相应的命令，通过变换绘图函数输入参数，可以实现线型、颜色等设定，简单易行。

#### 3. 强大的符号运算功能

MATLAB 具有强大的符号运算功能，可实现多项式运算、方程求解、微分及积分等各种符号运算功能。

#### 4. 扩充能力强

MATLAB 有丰富的库函数供调用。而且 MATLAB 的库函数同用户文件在形式上一样，所以用户文件也可作为 MATLAB 的库函数来调用。用户可以根据自己的需要方便地建立和扩充新的库函数。

本节简单介绍 MATLAB 的使用，更为详细的内容可参考 MATLAB 手册或相关教程。

### 1.1.2 M 文件及 M 函数

#### 1. M 文件

MATLAB 除交互式地运行命令外，更为常用的编程方式是将 MATLAB 命令写入到一个文本文件中，再在 MATLAB 输入文本文件名称，MATLAB 自动读取文件中命令并逐行解释执行。文本文件须以 m 为扩展名并保存在特定的路径中，MATLAB 系统才能识别。此类 M 文件，称为 MATLAB 脚本文件。

MATLAB 对 M 文件的搜索路径为：

- (1) 安装目录下的 work 目录；
- (2) 通过 File | set path... 菜单增加用户工作目录。

**【例 1.1】** 打开任何一个文本编辑器，或在 MATLAB 中按新建按钮，打开 MATLAB 的 M 文件编辑器，输入如下：

```
% M 文件例子
a=3;b=4;%以;结束此行,变量 a,b 的值不显示
c=a+b %直接结束此行,变量 c 的值显示
```

将文件保存为 testadd.m，保存到 MATLAB 安装目录下的 work 目录中。在 MATLAB 环境中输入命令 testadd，MATLAB 自动执行文件中的命令，显示变量 c 的结果：

```
>> testadd
c =
    7
```

在 MATLAB 工作空间 (workspace) 中可以看到 3 个变量 a, b, c。

如果试图以函数调用的方式调用 M 文件则会出错，如：

```
>> d = testadd
??? Attempt to execute SCRIPT testadd as a function.
```

由于试图以函数调用的方式调用脚本文件，MATLAB 出错，在 MATLAB 工作空间中看不到变量 a, b, c。

在 M 文件中，通常一条命令写在一行中，如果此行结果不需要 MATLAB 显示结果，则以分号 (;) 结束此行，相反，如果希望显示此行计算结果，则直接结束此行。

在每行的最后部分，可以用百分号 (%) 引导一串字符串对此行进行注释。

以百分号 (%) 为开头字符的行，全行都为注释语句。

#### 2. M 函数

M 函数是一种特殊的 M 文件，用来实现 MATLAB 函数定义的 M 文件。作为 M 函数调

用, M 函数文件有特定的格式要求, 并且文件保存名称必须与函数名相同, 这样才能保证函数调用成功。

M 函数的格式为:

Function 返回变量列表 = 函数名(输入变量列表)

注释

函数体语句

End

【例 1.2】用文本编辑器, 编写如下程序:

```
function c = testaddfun(a,b) %M 函数例子
c = a + b;
end
```

以 testaddfun.m 文件名存盘在 work 目录中, 然后在 MATLAB 主命令窗口中执行如下命令:

```
>> d = testaddfun(3,4)
d =
    7
```

MATLAB 工作目录中只有变量 d, 不会出现变量 a, b, c。3 及 4 作为实参数传递给函数的形参数 a 及 b, 函数返回参数 c 赋给外部变量 d。局部变量 a, b, c 都不出现在 MATLAB 工作目录中, MATLAB 在调用完函数 testaddfun 后自动清除局部变量 a, b, c。

### 3. M 文件与 M 函数的主要区别

(1) 在 M 函数中定义的变量在函数调用完成后会清除, 为局部变量, 而 M 文件中定义的变量在 MATLAB 运行期内始终存在;

(2) M 函数要求文件名与函数名相同, 而 M 文件没有此要求;

(3) 一般以 M 文件作为主程序, 在主程序中将一些功能模块以 M 函数的形式进行调用。

## 1.1.3 常量、变量、运算符及表达式

### 1. 变量

区分大小写, 不需要指定类型, 不需要事先声明, 变量名长度不能超过 31 位, 第 31 个字符之后的字符将被忽略。

### 2. 常量

MATLAB 有一些预定的变量, 这些特殊的变量称为常量 (见表 1.1)。

表 1.1 MATLAB 语言中的常量

常量名	常量值	常量名	常量值
i, j	虚数单位, 定义为 $\sqrt{-1}$	Realmin	最小的浮点数, $2^{-1022}$
pi	圆周率	Realmax	最大的浮点数, $2^{1023}$
eps	浮点运算的相对精度 $10^{-52}$	Inf	无穷大
NaN	Not-a-Number, 表示不定值		

### 3. 字符串

字符串定义在 ‘ ’ 号之间。

#### 【例 1.3】

```
>> str = 'Hello world'
str =
Hello world
```

### 4. 数学运算符 (见表 1.2)

表 1.2 MATLAB 语言中的数学运算符

+	加	.	数组乘方
-	减	\	左除
*	相乘	/	右除
.*	数组相乘	.\	数组左除
^	矩阵乘方	./	数组右除

### 5. 关系运算符 (见表 1.3)

表 1.3 MATLAB 语言中的关系运算符

==	等于	>	大于
~=	不等于	<=	小于等于
<	小于	>=	大于等于

### 6. 逻辑运算符 (见表 1.4)

表 1.4 MATLAB 语言中的逻辑运算符

&&	与		位或
	或	~	非
&	位与		

### 7. 表达式

表达式由常量、变量及运算符组成。

#### 1.1.4 向量及其运算

(1) 直接输入元素生成向量。

元素间用空格或逗号分隔时生成行向量，元素间用分号或回车符分隔时生成列向量，元素包括在中括号之间。

#### 【例 1.4】

```
>> a = [1 2 3] % 或 a = [1,2,3] 生成行向量
a =
    1    2    3
>> b = [4
```

```

5
6] %或 b = [4;5;6]这种形式因为节省空间而更常用。
b =
4
5
6

```

(2) 利用冒号表达式生成向量。

格式:  $x = \text{start}:\text{step}:\text{end}$ 。

start 表示向量的首元素数值; end 表示向量尾元素的数值界限; step 表示从第二个元素开始, 元素数值大小与前一个元素值大小的差值。若  $\text{step} = 1$ , 可以省略, 直接写成  $x = \text{start}:\text{end}$ 。

### 【例 1.5】

```

>> a = 1:5:30
a =
1    6   11   16   21   26
>> a = 1:6
a =
1    2    3    4    5    6

```

(3) 利用 linspace 函数生成线性等分向量。

格式:  $y = \text{linspace}(x1, x2, n)$ , 生成  $n$  维的行向量, 使得  $y(1) = x1, y(n) = x2$ 。

### 【例 1.6】

```

>> a = linspace(1,50,6)
a =
1.0000  10.8000  20.6000  30.4000  40.2000  50.0000

```

(4) 利用 logspace 函数生成对数等分向量。

格式:  $y = \text{logspace}(x1, x2, n)$ , 生成  $n$  维对数等分向量, 使得  $y(1) = 10^{x1}, y(n) = 10^{x2}$ 。

### 【例 1.7】

```

>> a = logspace(1,4,5)
a =
1.0e+004 *
0.0010    0.0056    0.0316    0.1778    1.0000

```

(5) 向量点积 dot(a,b)。

返回向量的数量点积, a 和 b 必须同维。当 a 和 b 都为列向量时, 等价于  $a' * b$ 。

格式:  $\text{dot}(a,b,\text{dim})$ , 返回 a 和 b 在维数为 dim 的点积。

### 【例 1.8】

```

>> a = [1;2;3];%定义列向量 a
>> b = [4;5;6];%定义列向量 b
>> dot(a,b)%用函数求向量 a 及 b 的点积
ans =
32

```



```
>> a' * b %用公式求向量 a 及 b 的点积
ans =
32
```

(6) 向量叉积  $\text{cross}(a,b)$ 。

求经过两相交向量的交点，并垂直于两向量所在平面的向量，向量方向按右手法则确定。

格式： $c = \text{cross}(a,b)$ ，返回向量  $a$  和  $b$  的叉积向量，即  $c = a \times b$ 。 $a$  和  $b$  必须为 3 维向量。

### 【例 1.9】

```
>> a = [1,2,3]; %定义 3 维列向量 a
>> b = [4,5,6]; %定义 3 维列向量 b
>> c = cross(a,b) %用函数求向量 a 及 b 的叉积
c =
-3     6    -3
```

(7) 数乘。

### 【例 1.10】

```
>> a = [1,2,3];
>> b = 3 * a
b =
3     6     9
```

(8) 抽取部分元素。

### 【例 1.11】

```
>> a = [10 20 30 40] % a 向量有 4 个元素
a =
10    20    30    40
>> b = a([1 3]) %抽取 a 向量中第 1 及 3 个元素组成 b 向量
b =
10    30
```

(9) 缩减向量。

### 【例 1.12】

```
>> a([1 2]) = [] %将上例中的 a 向量中的 1,2 两个元素缩减得到新向量。
a =
30    40
```

## 1.1.5 矩阵及其运算

(1) 直接输入矩阵元素生成矩阵。

同行元素之间用空格或逗号分隔，行与行之间用分号或回车符分隔。输入元素应包括在中括号内。