天利

新课标

常考易错典型试题

高考错题本

2011高考必备

公共必考

状元学习经验

错因归类分析

活页专项训练

本书编写组 编

数学

（理科）

西藏人民出版社

新课标

常考易错典型试题

天利

高考错题本

本书编写组 编

数学

（理科）

西藏人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

高考错题本.5/高考命题研究组编.
—拉萨:西藏人民出版社,2009.6(2010.6 重版)
ISBN 978-7-223-02673-4

Ⅰ.高… Ⅱ.高… Ⅲ.课程—高中—解题—升学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 079435 号

高考错题本

——新课标高考错题本(数学·理科)

作　　者　本书编写组
责任编辑　李海平　高建红
装帧设计　陈玉丽
出　　版　西藏人民出版社
社　　址　拉萨市林廓北路 20 号　　**邮政编码**　850000
北京发行部:100013　北京市东土城路 8 号林达大厦 A 座 13 层
电　　话:010—64466399(邮购)、64466473(批销)
打 击 盗 版:13801174584
印　　刷　三河市宇通印刷装订厂
经　　销　全国新华书店
开　　本　16 开(787×1 092)　　**字　　数**　460 千
印　　张　15
版　　次　2010 年 6 月第 2 版第 2 次印刷
标准书号　ISBN 978-7-223-02673-4
定　　价　19.80 元

编写说明

高考不是简单地重复考查知识点，仅仅记住每个知识点是不够的，如何做到成绩稳中有升并在高考中发挥出自己的真实水平呢？本书编写组历时数年，通过对几十所知名学校数千名高三学生的考试进行跟踪研究发现：每个人在考试中，尤其是在高考时，解题错误呈现“个性化”。大都是一些不起眼的小错误最终导致高考失分。那么怎样避免这些错误呢？许多资深的高考备考研究专家和高考状元们建议高三学生建立有效的错题本，在错题中“淘金”。

本书由资深高考阅卷、命题研究专家在统计、分析高考错误类型的基础上，从高考真题及模拟试题中精选出一些带普遍性、规律性的基础、常考、易错的典型试题，按专题以讲练结合的形式编排内容，帮助高三学生减少无谓失分。

本书含语文、数学（文科）、数学（理科）、英语、政治、历史、地理、物理、化学、生物 10 科册。

本书主要有四部分内容：

主体内容

- 易错类型分析及应对策略
- 易错试题专题突破
- 参考答案及易错分析
- 易错试题分项集训卷

本书有三大亮点：

典型 本书总结的错误类型和选用的试题，均为专家、状元多年积累的内容，非常具有典型性。

实用 为满足读者使用需求，“易错类型分析及应对策略”设置了“举一反三”栏目，并把“易错试题分项集训卷”部分设计为活页形式，方便拆分使用。

详尽 本书所有试题不仅有标准答案，绝大多数还有易错分析，可以帮助读者总结解题规律，提高解题能力。

需要特别说明的一点是，为便于读者快速检索试题出处，书中高考真题的考试年份用字母代替，A 代表 2005 年，B 代表 2006 年，C 代表 2007 年，D 代表 2008 年，E 代表 2009 年，例如 2009 年北京高考题在书中标注为“（E，北京）”。

参与本书编写的有李成银（语文）、胡大波（数学）、高呈宝（英语）、吴宾（物理）、朱希明（化学）、李祥军（化学）、岳善华（化学）、孟凡义（生物）、吕志刚（政治）、姜舜（政治）、宋景田（历史）、陈贻标（地理）等教师。

“读天利书，圆名校梦”，衷心祝愿广大考生高考成功。书中缺漏或不妥之处，敬请批评指正。

本书编写组

2010 年 6 月

高考状元的成功学习方法

——建立并使用好“错题本”

★高考状元谈“错题本”

对于自己不太擅长并且知识点比较零散的科目，错题本是十分有效的。

（安徽理科高考状元，现就读于清华大学 张风逸）

准备一个记录错题的作业本是一种公认的学习数学甚至学习所有科目的好方法。通过错后总结，会让自己摆脱一些做题的不良习惯和误区，矫正思路。还会让自己在重做题目的时候加深理解，逐步提升解题能力。（宁夏文科高考状元，现就读于北京大学 陈洛晔）

每一科我都有一本“错题集”，记录自己练习和考试中做错的题目和典型例题，并从自己的出错点出发找出不扎实的知识点，在错题下面进行针对性总结。

（内蒙古理科高考状元，现就读于清华大学 石悦）

★试题错解的原因

造成错误的原因有很多，除了知识上的欠缺外，更多的则是由于以下原因造成的：①审题不清，没有抓住关键字句或看错题目。②切入点、思路出错。③自己会做，但计算、书写错误或答题不规范。

★怎样建立“错题本”？

所谓建立“错题本”就是把平时作业及考试中犯的典型性错误找出来，把错误的习题“剪切”下来，“粘贴”并编辑整理。那么，怎样才能建立一个能发挥最大效用的“错题本”呢？

首先，要在错题的旁边注上完整的分析过程，主要有四个部分：①为什么错了？分析原因。②应该怎样做？标明解题的正确方法及依据原理。③有无其他方法？哪种方法更好？对比归纳，开阔思路。④能否变通一下？一题多变，思维发散。

其次，将错题分类整理，分类方法主要有两种：①把错题按照错误类型归类整理。我们可以把同一科出现同样类型错误的题目整理在一起。②把错题按照所考查的知识点归类整理。我们可以把做错的、考查同一个知识点的题目整理在一起，从中总结出该知识点常考的方式、出题的角度，从而加深对该知识点的理解，提高运用能力。

★“错题本”的使用

“错题本”建立后，千万不要“束之高阁”，一定要常翻、常看、常思考、常总结。

（1）定期翻看。时间间隔自己决定。

（2）利用“错题本”进行交流。通过交流，可以从别人的错误中吸取教训，得到启发，以此警示自己不犯同样的错误，提高练习的准确性。

（3）拓展功能。除了标出“思路错误”“理解错误”“审题错误”等错误原因及“错误知识点”外，还要能定期总结答题的方法和技巧。

（4）坚持不懈。“错题本”的使用贵在坚持，只有持之以恒才能见效。

目 录

易错类型分析及应对策略

易错试题专题突破

易错类型分析及应对策略

"错题本是高考成功的必备武器",这是众多考生在总结高考得失后的宝贵经验．其实我们试想一下在高考中,有多少题目是你不会做的呢？但考完后成绩却为什么不够理想？笔者认为最终的竞争,还是在于你究竟能将会的做对多少．如何将错误降到最低？"错题是金子,请你要珍惜",谁做题时都会出错,有的同学对出现的错误能及时纠正,确保以后不犯同类的错误;而有的同学总在重复着同样的错误.对待错题的态度,是同学之间成绩出现差距的一个重要原因,因此结合错题本能做到:易错问题分类攻,效率提高又轻松,易错问题得纠正,高考必定胜.

很多考生高考结束后总结自身失分的原因,往往将原因即错题总体分为两种:一种是自己根本不会做,因为太难了,没有思路;另一种是自己会做,因为粗心而做错.笔者认为,最有价值的错题是第二类,但粗心也有许多种,也要分析它.第一,看错题目.是看错数字还是理解错题意？为什么会看错题？怎么样误解了题意？以后会不会犯同样的错？第二,切入点、思路出错．这样的思维解法根本不适合这类题目.第三,计算错误.为什么会算错？有没有方法杜绝？怎样才能真正做到细心？最有研究价值的是第二种失分原因,我们称之为"会而不对,对而不全",这是一个老大难问题."会而不对"是拿到一道题目不是束手无策,而是在正确的思路上,但是或考虑不周;或推理不严;或书写不准,最后答案是错的."对而不全"是思想大体正确,最终结论也出来了,但丢三落四,或缺欠重大步骤,中间某一步逻辑点过不去;或遗漏某一极端情况,讨论不够完备;或是潜在假设;或是以偏概全等,这个老大难问题应该认真重视,能否加以解决,对高考成败起着至关重要的作用.

解题错误是在数学解题过程中形成的,是数学认识过程中的正常现象.因此高考数学解题中的错误也是可以避免的.所谓"吃一堑,长一智",就是说我们要增强数学解题过程中的错误警戒意识,养成严谨的数学思维习惯,并构建数学解题过程中常见性错误的"错题库",因此将高考中常见的易错、易混、易忘典型题目系统地整理出来,以最新的各地统考试题为例题进行辨析、归类,再配以近几年的高考试题为相应巩固练习,熟悉高考,洞悉命题者精心设计的陷阱或常见的"雷区"是非常有必要的．通过这些,希望每一位高考考生成为一名真正的"排雷"高手,顺利通过高考的检验,取得佳绩.这就需要我们在复习过程中注意积累．在日常复习考试和高考中我们的口号是"会而对,对而全,全而美,美而快",做到了这些相信一定会真正做到"跳出题海".

通过认真精研近几年高考试题及分析,可将错误类型归结为如下十三种类型:一、知识性错误:包括数学概念理解错误,公式应用错误,定理、性质应用错误;二、审题错误;三、运算错误;四、数学思想应用错误;五、数学方法应用错误;六、思维方法应用错误;七、逻辑性错误;八、策略性错误;九、心理性错误;十、思维定式错误;十一、思维僵化错误;十二、草率收兵产生错误;十三、过程紊乱产生错误.下面逐类剖析这些错误,前车之覆后车之鉴,希望通过这些分析能帮助同学们找出自己学习中的薄弱环节,使得学习重点突出,复习更加有针对性,方法更有效.

易错类型一　知识性错误

就知识性丢分而言,有的考生对数学概念理解不透,内涵、外延把握不准,导致解概念性题丢分;有的考生或是记错了数学公式,或是记混了数学公式,或是忽视应用公式的条件,致使在解关于数学公式应用试题时丢分;有的考生对数学定理、性质理解不透,把握不准,特别是试题的环境或载体发生变化,就会误入陷阱而丢分.

1.概念理解错误

它主要表现在如下方面:①概念意象形成中的错误(主要有用日常生活概念代替数学概念、用概念

原理替代概念、用“形象描述”代替数学概念等原因);②概念定义中的错误(主要有分类与比较的错误、概括与抽象的错误、概念定义与概念相脱离等原因);③概念联系中的错误(如概念联系僵化错误、概念联系不恰当错误等等).

【易错原因】数学概念中的每一个定义、术语、符号乃至习惯用语,都有明确具体的含义,对于概念理解不透,内涵、外延把握不准都是导致概念型题目出错的主要原因,如在高中数学中集合、映射、函数、方程与曲线、函数的单调性与奇偶性、分段函数、命题的否定与否命题等概念都是非常抽象的,而解题方法很多就来自于概念本身,因此在解答涉及有关这些概念问题时,稍有不慎就会出现片面性理解的错误.

【应对技巧】要准确理解概念的外延和内涵,深入理解数学概念,正确揭示数学概念的本质、属性和相互间的内在联系,发挥数学概念在分析问题和解决问题中的作用.在学习完数学概念的定义后,应在定义的指导下去分析实际事例,揭示实例中包含的与概念有关的关键属性.同时,通过正例与反例的应用,以及自己对实例的比较、分析、概括、分化和类化等,可以使概念的关键属性变得清晰,使实例成为理解概念的一种思维载体.

典例①

(E,北京理)在复平面内,复数 $z=i(1+2i)$ 对应的点位于 ( )

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

【错解】∵ $z=i(1+2i)=2+i$.

∴复数 z 在复平面内对应的点为 $Z(2,1)$,该点位于第一象限,所以选 A.

【易错分析】对复数中的基本知识 $i^2=-1$ 掌握不牢造成错误.

【正解】本题主要考查在坐标系数内复数与点的对应关系,属于基础知识的考查. ∵ $z=i(1+2i)=i+2i^2=-2+i$,∴复数 z 所对应的点为 $(-2,1)$,故选 B.

举一反三

1. 若复数 $z=\lg(m^2-2m-2)+(m^2+3m+2)i$ 是纯虚数,则 m 的值为 (A)

A. 3　　B. 3 或 -1　　C. -1　　D. 2

2. (E,全国)函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,若 $f(x+1)$ 与 $f(x-1)$ 都是奇函数,则 (D)

A. $f(x)$ 是偶函数　　B. $f(x)$ 是奇函数

C. $f(x)=f(x+2)$　　D. $f(x+3)$ 是奇函数

3. (E,北京)“$\alpha=\frac{\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$”是“$\cos2\alpha=\frac{1}{2}$”的 (A)

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

典例②

(C,山东理)命题“对任意的 $x\in\mathbf{R},x^3-x^2+1\leqslant0$”的否定是 ( )

A. 不存在 $x\in\mathbf{R},x^3-x^2+1\leqslant0$

B. 存在 $x\in\mathbf{R},x^3-x^2+1\leqslant0$

C. 存在 $x\in\mathbf{R},x^3-x^2+1>0$

D. 对任意的 $x\in\mathbf{R},x^3-x^2+1>0$

【错解】D,即对命题否定结论.

【易错分析】本题考查含有一个量词的命题的否定.对于含有一个量词命题的否定方法是:先将原先的存在量词改成全称量词,然后再对结论进行否定.本题的错因是对含有一个量词的命题的否定概念不清造成的.

【正解】选 C.

举一反三

4. (D,福建)若复数 $(a^2-3a+2)+(a-1)i$ 是纯虚数,则实数 a 的值为 (B)

A. 1　　B. 2　　C. 1 或 2　　D. -1

5. 若动点 P 与定点 $F(1,1)$ 和直线 $l:3x+y-4=0$ 的距离相等,则动点 P 的轨迹是 ( )

A. 椭圆　　B. 双曲线　　C. 抛物线　　D. 直线

6. 某校高三年级有男生 500 人,女生 400 人,为了解该年级学生的健康情况,从男生中任意抽取25 人,从女生中任意抽取 20 人进行调查.这种抽样方法是 (A)

A. 简单随机抽样法　　B. 抽签法

C. 系统抽样法　　D. 分层抽样法

典例③

(D,安徽)已知 m,n 是两条不同的直线,α,β,γ 是三个不同的平面,下列命题中正确的是 ( )

A. 若 $m/\!/\alpha,n/\!/\alpha$,则 $m/\!/n$

B. 若 $\alpha\perp\gamma,\beta\perp\gamma$,则 $\alpha/\!/\beta$

C. 若 $m/\!/\alpha,m/\!/\beta$,则 $\alpha/\!/\beta$

D. 若 $m\perp\alpha,n\perp\alpha$,则 $m/\!/n$

【错解】由 $m/\!/\alpha,n/\!/\alpha$ 可知 $m/\!/n$ 或 $m\cap n$ 或 m,n 异面,所以 A 错误;

由 $\alpha\perp\gamma,\beta\perp\gamma$ 可知 $\alpha/\!/\beta$ 或 $\alpha\cap\beta$,所以 B 错误;

由 $m/\!/\alpha, m/\!/\beta$ 可知 $\alpha/\!/\beta$，所以 C 正确，故选 C.

【易错分析】上述解法对面面平行的概念理解不清，误认为平行于同一条直线的平面是平行的.

【正解】由 $m/\!/\alpha, n/\!/\alpha$ 可知 $m/\!/n$ 或 $m\cap n$ 或 m，n 异面，所以 A 错误；

由 $\alpha\perp\gamma, \beta\perp\gamma$ 可知 $\alpha/\!/\beta$ 或 $\alpha\cap\beta$，所以 B 错误；

由 $m/\!/\alpha, m/\!/\beta$ 可知 $\alpha/\!/\beta$ 或 $\alpha\cap\beta$，所以 C 错误；

由 $m\perp\alpha, n\perp\alpha$ 可知 $m/\!/n$，所以 D 正确，故选 D.

【评注】立体几何的学习强调文字语言、符号语言与图形语言的互化，正确使用符号语言是理解概念与性质的体现.

举一反三

7. (C，全国Ⅱ)已知曲线 $y=\frac{x^2}{4}-3\ln x$ 的一条切线的斜率为 $\frac{1}{2}$，则切点的横坐标为 ( )

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. $\frac{1}{2}$

8. (E，北京)已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，$\boldsymbol{c}=k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}(k\in\mathbf{R})$，$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 如果 $\boldsymbol{c}/\!/\boldsymbol{d}$，那么 ( )

A. $k=1$ 且 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 同向
B. $k=1$ 且 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 反向
C. $k=-1$ 且 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 同向
D. $k=-1$ 且 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 反向

9. (E，江西)若复数 $z=(x^2-1)+(x-1)\mathrm{i}$ 为纯虚数，则实数 x 的值为 ( )

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. -1 或 1

2. 公式、法则应用错误

【易错原因】数学公式是解决数学问题的工具，是数学知识点的重要组成部分，数学中的公式、法则都由条件和结论组成. 要应用结论，必须首先注意能使结论成立的条件. 在数学学习中，如果学生只局限于死记一些结论而不注意强调使结论成立的条件，往往会导致谬误. 因此对数学中的各个公式，考生必须在理解的基础上掌握扎实，通过高考阅卷可以看出并不是所有的考生都能做到这一点的，因公式记错、用错、理解错误而出现的失分是非常普遍的. 例如常见的一些易混、易错、易忘公式有：指数函数与对数函数的求导公式易记混或易遗忘；等比数列的前 n 项和公式易忽视公式 $q=1$ 的情况；等差数列与等比数列的性质易混淆；数列的前 n 项和 S_n 与通项 a_n 的关系易忽视其限制条件；双曲线的渐近线方程焦点在两个坐标轴上的不同形式易混淆；概率的各个公式由于忽略概率类型而错用公式；基本不等式忽视其应用的前提条件等等，这些都是高考中的重要数学公式，其应用的频率非常高，也是我们易掉入的"陷阱".

【应对技巧】要达到准确地应用公式，只是死记硬背是远远达不到要求的，这样做只能产生这样或那样的错误. 要准确地把握公式的内涵和公式的来龙去脉，使用范围，使用方法(正用、逆用、变用)熟练运用它们进行推理、证明和运算，掌握它们的推导过程，并且有些公式的推导过程渗透着重要的数学思想或方法，对提高自身的解题能力是很有帮助的，只有这样才能明确公式应用的前提条件及背景. 同时充分发挥错题本的作用，将易混淆的公式整理出来，时时警戒自己，这样错误重演的几率就会大大地降低了.

典例①

(E，北京理)为了得到函数 $y=\lg\frac{x+3}{10}$ 的图象，只需把函数 $y=\lg x$ 的图象上所有的点 ( )

A. 向左平移 3 个单位长度，再向上平移 1 个单位长度

B. 向右平移 3 个单位长度，再向上平移 1 个单位长度

C. 向左平移 3 个单位长度，再向下平移 1 个单位长度

D. 向右平移 3 个单位长度，再向下平移 1 个单位长度

【错解】B，把平移方向弄错认为 B 正确.

【易错分析】本题错因是图象平移方向出错产生错解，在研究图象变换时，必须弄清具体函数中的对应法则的意义及对象，平移实质是相对 x 变换.

【正解】本题主要考查函数图象的平移变换，属于基础知识、基本运算的考查. A 项 $y=\lg(x+3)+1=\lg 10(x+3)$，B 项 $y=\lg(x-3)+1=\lg 10(x-3)$，C 项 $y=\lg(x+3)-1=\lg\frac{x+3}{10}$，D 项 $y=\lg(x-3)-1=\lg\frac{x-3}{10}$. 故应选 C.

举一反三

10. (E，浙江)已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(x\in\mathbf{R}$，$\omega>0)$ 的最小正周期为 π. 为了得到函数 $g(x)=\cos\omega x$ 的图象，只要将 $y=f(x)$ 的图象 ( )

A. 向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度

B. 向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度

C. 向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度

D. 向右平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度

11. (E,辽宁)设等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,若$\frac{S_6}{S_3}=3$,则$\frac{S_9}{S_6}=$ ( )

A. 2 B. $\frac{7}{3}$ C. $\frac{8}{3}$ D. 3

12. (D,宁夏)$\frac{3-\sin70^\circ}{2-\cos^2 10^\circ}=$ ( )

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. 2 D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

典例②

(广东佛山高三统考)已知$x>0,y>0$,且$\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=1$,则$x+y$的最小值为 ( )

A. 12 B. 16 C. 6 D. 8

【错解1】$\because x>0,y>0$,且$\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=1$,故$\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=1\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{x}\cdot\frac{9}{y}}\Rightarrow\sqrt{xy}\geqslant 6$

$\therefore x+y\geqslant 2\sqrt{xy}\geqslant 12$. 故$x+y$的最小值为12.

【错解2】$\because x>0,y>0$,且$\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=1$,$\therefore x+y=(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{9}{y}\right)\geqslant 2\sqrt{xy}\times 2\sqrt{\frac{9}{xy}}=12$. 故$x+y$的最小值为12.

【易错分析】误解的原因是连续两次运用基本不等式,忽视了等号同时成立的条件,这时可通过变形转化为仅运用一次基本不等式.

【正解】$x+y=(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{9}{y}\right)=10+\left(\frac{y}{x}+\frac{9x}{y}\right)\geqslant 10+2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{9x}{y}}=16$,当且仅当$\frac{y}{x}=\frac{9x}{y}$,且$\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=1$,即$x=4,y=12$时,$x+y$有最小值16.

举一反三

13. (D,上海)已知总体的各个体的值由小到大依次为2,3,3,7,a,b,12,13.7,18.3,20,且总体的中位数为10.5.若要使该总体的方差最小,则a,b的取值分别是________.

14. 函数$y=\log_a(x+3)-1(a>0$,且$a\neq1)$的图象恒过定点A,若点A在直线$mx+ny+1=0$上,其中$mn>0$,则$\frac{1}{2m}+\frac{2}{n}$的最小值为________.

15. 设函数$f(x)=\begin{cases}2^{-x}, & x<1,\\ 2^x, & x>1,\end{cases}$求满足$f(x)=\frac{1}{4}$的$x$的值.

典例③

锐角三角形ABC中,$b=1,c=2$,则a的取值范围是 ( )

A. $1<a<3$ B. $1<a<\sqrt{5}$

C. $\sqrt{3}<a<\sqrt{5}$ D. 不确定

【错解】由三角形的性质,知$c-b<a$,得$a>1$.

又A为锐角,从而$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{5-a^2}{2bc}>0$,得$0<a<\sqrt{5}$.

所以$1<a<\sqrt{5}$.故选B.

【易错分析】上述解法忽视了三角形三个内角的关系,即$A+B+C=180^\circ$,$\cos A>0$只能推出A为锐角,而不能推出$\triangle ABC$一定为锐角三角形,因为$A+B+C=180^\circ$,所以当$\triangle ABC$为锐角三角形时,不仅$\cos A>0$,还必须满足$\cos B>0,\cos C>0$.

【正解】由三角形的性质,知$c-b<a$,得$a>1$.

又由$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{5-a^2}{2bc}>0$,得$0<a<\sqrt{5}$.

由$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+3}{2ac}>0$,得$a\in\mathbf{R}$.

由$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2-3}{2ab}>0$,得$a>\sqrt{3}$.

综上可得,$\sqrt{3}<a<\sqrt{5}$.故选C.

举一反三

16. (D,山东)设z的共轭复数是$\bar{z}$,若$z+\bar{z}=4$,$z\cdot\bar{z}=8$,则$\frac{\bar{z}}{z}$等于 ( )

A. i B. $-$i C. ±1 D. $\pm$i

17. (山东济宁统考)抛物线$y=-4x^2$上的一点M到焦点的距离为1,则点M的纵坐标是 ( )

A. $-\frac{17}{16}$ B. $-\frac{15}{16}$ C. $\frac{7}{16}$ D. $\frac{15}{16}$

3. 定理、性质应用错误

【易错原因】数学中的定理、性质是数学逻辑推理的依据,多数题目的设置就是以考查定理、性质的灵活应用为主要目的,这类问题出错的频率较高,常见的错误有如下几方面:①对定理、性质把握不准,理解不透,导致出错.如最小角定理$\cos\theta=\cos\theta_1\cos\theta_2$中的三角$\theta,\theta_1,\theta_2$各指哪一个角不清;在应用线面平行的判断定理证明线面平行时,必须强调“线在平面

外、且平行于线内一直线”，两条件缺一不可，否则就是假命题，而有些考生心里想当然或忽视“线在面外”这一限制条件而导致失分的不在少数. ②误将某些定理、性质作为所要解答问题的充要条件使用. 如：平面向量的数量积有如下性质：若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 夹角为锐角，则必有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$，但反之，若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$，两向量的夹角显然不一定是锐角，如两向量共线且同向时，两向量夹角为 $0°$；函数的奇偶性有如下性质：若 $f(x)$、$g(x)$ 均为偶函数，则 $f(x)\pm g(x)$ 也为偶函数，但反之，若函数 $f(x)\pm g(x)$ 为偶函数，则 $f(x)$，$g(x)$ 不一定有奇偶性，如取 $f(x)=x^2-x$，$g(x)=x^4+x$，这样的例子很多，同时出现这一类型错误的也是最多的. ③定理、性质应用的环境也是不容忽视的. 如“垂直于同一直线的两直线平行”，在平面几何中成立，但在立体几何中却不成立；又如若 $a^2+b^2=0$，则 $a=b=0$ 在实数范围内成立，但在复数范围内却不成立；实系数一元二次方程，当判别式小于 0 时，在实数范围内无解，而在复数范围内有一对共轭虚根；实数的运算律在推广到平面向量的运算后，有些不能成立，如平面向量数量积的运算就不符合乘法结合律. ④集合元素的三性中互异性对解题有影响，由于忽视产生错误.

【应对技巧】在解答考查定理、性质类题目时，要静下心来，仔细审题，达到咬文嚼字，理清解答该题需要依据的相关定理或性质，然后思考该定理或性质的适用范围及注意事项，在此基础上才能展开解题.

典例①

(E，辽宁理)已知偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调增加，则满足 $f(2x-1)<f\left(\frac{1}{3}\right)$ 的 x 的取值范围是 ( )

A. $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$　　B. $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

C. $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$　　D. $\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$

【错解】∵ $f(x)$ 是偶函数且在 $[0,+\infty)$ 上单调增加，∴ $\begin{cases}2x-1>0,\\ 2x-1<\frac{1}{3}.\end{cases}$ 解得 $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$.

所以选择 C.

【易错分析】由于忽视了偶函数在对称区间的单调性的性质，考虑不全面，未进行分类讨论产生错误.

【正解】当 $2x-1\geqslant0$，即 $x\geqslant\frac{1}{2}$ 时，因为 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加，故需满足 $2x-1<\frac{1}{3}$，即 $x<\frac{2}{3}$，所以 $\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{2}{3}$.

当 $2x-1<0$，即 $x<\frac{1}{2}$，由于 $f(x)$ 是偶函数，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调减小，$f\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(-\frac{1}{3}\right)$. 此时需满足 $2x-1>-\frac{1}{3}$，所以 $\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$.

综上知 $\frac{1}{3}<x<\frac{2}{3}$.

故正确答案为 A.

举一反三

18.(福州质检)已知 $f(x)(x\neq0,x\in\mathbf{R})$ 是奇函数，当 $x<0$ 时，$f'(x)>0$，且 $f(-2)=0$，则不等式 $f(x)>0$ 的解集是 ( )

A. $(-2,0)$

B. $(2,+\infty)$

C. $(-2,0)\cup(2,+\infty)$

D. $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

19.(广州模拟)已知平面内不共线的四点 O,A,B,C 满足 $\overrightarrow{OB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$，则 $|\overrightarrow{AB}|:|\overrightarrow{BC}|=$ ( )

A. $1:3$　　B. $3:1$

C. $1:2$　　D. $2:1$

20.(山东潍坊模拟)已知函数 $y=f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，对于 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x+6)=f(x)+f(3)$ 成立，当 $x_1,x_2\in[0,3]$，且 $x_1\neq x_2$ 时，都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$，给出下列命题：

① $f(3)=0$；

②直线 $x=-6$ 是函数 $y=f(x)$ 的图象的一条对称轴；

③函数 $y=f(x)$ 在 $[-9,-6]$ 上为增函数；

④函数 $y=f(x)$ 在 $[-9,9]$ 上有四个零点.

其中所有正确命题的序号为________(把正确命题的序号都填上).

典例②

在△ABC 中，角 A,B,C 的对边为 a,b,c，$c=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，$C=30°$，求 $a+b$ 的最大值.

【错解】因为 $C=30°$，所以 $A+B=150°$，$B=150°-A$.

由正弦定理得

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin(150^\circ-A)}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}$.

又因为 $\sin A\leqslant 1,\sin(150^\circ-A)\leqslant 1$,

所以 $a+b\leqslant 2(\sqrt{6}+\sqrt{2})+2(\sqrt{6}+\sqrt{2})=4(\sqrt{6}+\sqrt{2})$.

故 $a+b$ 的最大值为 $4(\sqrt{6}+\sqrt{2})$.

【易错分析】上述解法错误的原因是未弄清 A 与 $150^\circ-A$ 之间的关系,这里 A 与 $150^\circ-A$ 是相互制约的,不是相互独立的量,$\sin A$ 与 $\sin(150^\circ-A)$ 不能同时取最大值 1,因此所得的结果是错误的.

【正解】因为 $C=30^\circ$,所以 $A+B=150^\circ$,

由正弦定理得

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin(150^\circ-A)}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}$.

因此,$a+b=2(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cdot[\sin A+\sin(150^\circ-A)]=(8+4\sqrt{3})\cos(A-75^\circ)\leqslant 8+4\sqrt{3}$.

故 $a+b$ 的最大值为 $8+4\sqrt{3}$.

举一反三

21.(D,江苏)已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的导数为 $f'(x)$,$f'(0)>0$,对于任意实数 x,有 $f(x)\geqslant 0$,则 $\frac{f(1)}{f'(0)}$ 的最小值为 ( )

A. 3　　B. $\frac{5}{2}$　　C. 2　　D. $\frac{3}{2}$

22.(D,北京)若 $a=2^{0.5}$,$b=\log_{\pi}3$,$c=\log_2\sin\frac{2\pi}{5}$,则 ( )

A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$

C. $c>a>b$　　C. $b>c>a$

23.(广东深圳模拟)已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称,$f(-1)=1$,则 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2\ 009)$ 的值为 ( )

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

典例③

求函数 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x-3}$ 的单调区间.

【错解】设 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^u$,$u=x^2+2x-3$.

由 $u=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$ 知,u 在 $(-\infty,-1)$ 上为减函数,在 $[-1,+\infty)$ 上为增函数.

∴在 $(-\infty,-1)$ 上,原函数 $f(x)$ 为减函数;在 $[-1,+\infty)$ 上,原函数 $f(x)$ 为增函数.

【易错分析】没有注意到底数为“$\frac{1}{3}$”,由于 $0<\frac{1}{3}<1$,将改变指数部分的单调性.

【正解】设 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^u$,$u=x^2+2x-3$. 易知 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^u$ 在 $\mathbf{R}$ 上,y 关于 u 为减函数.

由 $u=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$ 知,u 在 $(-\infty,-1)$ 上为减函数,在 $[-1,+\infty)$ 上为增函数.

∴在 $(-\infty,-1)$ 上,原函数 $f(x)$ 为增函数;在 $[-1,+\infty)$ 上,原函数 $f(x)$ 为减函数.

【启示】此例问题为研究复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 的单调性,口诀是“同增异减”,即两个函数同增或同减,复合后结果为增函数;若两个函数一增一减,则复合后结果为减函数.解答时,先辨析清楚函数的复合方式,即 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$,再研究单调性.

举一反三

24.设 $M=\{1,1+a,1+2a\}$,$N=\{1,b,b^2\}$,若 $M=N$,求 b 的值.

25.平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件是 ( )

A. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 方向相同

B. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 两向量中至少有一个为零向量

C. $\exists\lambda\in\mathbf{R},\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$

D. 存在不全为零的实数 λ_1,λ_2,$\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$

26.(C,浙江)已知点 O 在二面角 $\alpha-AB-\beta$ 的棱上,点 P 在 α 内,且 $\angle POB=45^\circ$. 若对于 β 内异于 O 的任意一点 Q,都有 $\angle POQ\geqslant 45^\circ$,则二面角 $\alpha-AB-\beta$ 的大小是________.

易错类型二　审题错误

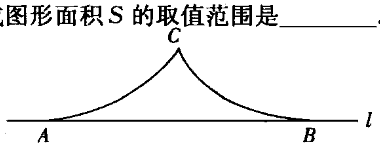
【易错原因】就解题能力而言,有的考生因审题不到位而丢分. 在知识已经定位的条件下可以说审题决定着成败,或者说成也审题,败也审题. 具体原因主要体现在:①读题不仔细:在数学解题上就是不能仔细阅读题目,特别对那些冗长的,以及需要他们转化为数学语言的文字题,阅读能力表现很弱,有些中学生做题急于求成,粗略读题,经常忽略题中的关键性文字. ②不理解题意:解题中不能抓

住题中所给信息并结合所学的数学概念，尤其遇到给出信息的题目时，理解题意就显得尤为重要，如何从题目中获取未曾学习过的知识、信息，并且与已有知识联系和转化是正确解题的关键. ③不会转换成数学语言：对于一个实际问题，通常需要学生首先将其转换为数学语言或数学图形，然后再对其求解. 数学语言的转换十分重要，有利于培养学生从实际问题中抽象出数学模型，再从数学模型回归到实际问题的能力. 由于这一步没到位而导致错误，也是中学生的一大典型错误.

【应对技巧】在平常复习过程中要培养自己的阅读理解能力，真正做到咬文嚼字，做到审题要慢，做题要快. ①咬文嚼字. 逐字逐句，仔细分析是审题的重要策略之一. 在数学习题中，经常会出现一些容易看错的，或易被忽视的，或容易误解的字词，如果麻痹大意，就会导致失误. 必要时还可通过画图利用其直观性和几何性来帮助分析、思考，因此，我们要善于“咬文嚼字”，认真思考，弄清含义，为正确解题创造条件. ②重视未知. 审题时，重视从目标去分析思考，以获取有关信息，指导解题. 因为抓住了目标，思维与推理也就具有了目的性和针对性. 所以，重视未知，从目标出发，也是审题的一个重要方法. ③深入挖掘. 即要做到充分挖掘“词眼”、挖掘背景、挖掘伪装、挖掘隐含条件. 许多题目都存在关键性的字词，抓住它们就会把握其本质属性，找到解题的突破口. 因此，审题时要抓住关键字、词展开思考. 有的数学题的条件并不明显，或寓于概念，或存于性质，或含于图中，审题时，就要注意深入挖掘这些隐含条件. 因为这些隐含条件是突破难点的关键所在. ④善于简化. 有许多数学题，给出的已知条件或结论的形式比较复杂、繁琐，审题时，只要善于对已知或未知进行简化，化繁为简找到解决问题的有效方法和途径. ⑤善于转换. 审题时，思路不要只停留在原题上，而应积极地将其转换成熟悉的或易解的问题. 其方法有：把具体问题转换成数学问题；把几何问题转换成代数问题；把代数问题转换成三角问题等不一而足. 因此，我们在审题时，要注意分析题意，善于转换.

典例①

（C，上海）如图，A，B 是直线 l 上的两点，且 $AB=2$，两个半径相等的动圆分别与 l 相切于 A，B 点，C 是这两个圆的公共点，则圆弧 AC，CB 与线段 AB 围成图形面积 S 的取值范围是________.



【错解】大多数同学取了两个特殊的位置，取两个半径为 1 的圆，作为该面积的最大值 $2-\frac{\pi}{2}$；取两个半径为 2 的圆，得最小值 $4-\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}$.

【易错分析】审题过程过于简单化，理解此类问题过于浅显，盲目地作出论断而出错.

【正解】取两个极限位置，当两圆半径减小时，两圆半径为 1 时为最小圆，此时两圆相切，圆弧 AC，CB 与线段 AB 围成的图形是长为 2，宽为 1 的矩形除去两个半径为 1 的四分之一圆，其面积 $S=1\times2-\frac{1}{2}\times\pi\times1=2-\frac{\pi}{2}$；当两圆的半径无限增大时，两圆间的间隙越来越小，且两圆半径趋近于 $+\infty$ 时，圆弧 AC，CB 与线段 AB 围成图形的面积 S 趋近于 0，所以 S 的取值范围是 $(0,2-\frac{\pi}{2}]$.

举一反三

1.（福建毕业质检）设向量 $\boldsymbol{a}=(4\sin\alpha,3)$，$\boldsymbol{b}=(2,3\cos\alpha)$，且 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则锐角 α 为（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{5}{12}\pi$

2.（天津十二区县）已知 A 为三角形的一个内角，$\sin(A+\frac{\pi}{4})=\frac{3}{5}$，则 $\cos A=$（　　）

A. $-\frac{\sqrt{2}}{10}$　　B. $-\frac{7\sqrt{2}}{10}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{10}$ 或 $-\frac{\sqrt{2}}{10}$　　D. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$ 或 $-\frac{7\sqrt{2}}{10}$

3.（东北联考）点 $M(5,3)$ 到抛物线 $y=ax^2$ 的准线的距离为 6，那么抛物线的方程是（　　）

A. $y=12x^2$

B. $y=-36x^2$

C. $y=12x^2$ 或 $y=-36x^2$

D. $y=\frac{1}{12}x^2$ 或 $y=-\frac{1}{36}x^2$

典例②

（E，重庆）已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_1>1$，且 $6S_n=(a_n+1)(a_n+2)$，$n\in\mathbf{N}^*$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【错解】由 $a_1=S_1=\frac{1}{6}(a_1+1)(a_1+2)$，

解得 $a_1=1$ 或 $a_1=2$. 由题设知 $a_1=S_1>1$，

因此 $a_1=2$.

又由 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=\frac{1}{6}(a_{n+1}+1)(a_{n+1}+2)-$

$\frac{1}{6}(a_n+1)(a_n+2)$得$(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n-3)=0$，即$a_{n+1}-a_n-3=0$或$a_{n+1}=-a_n$. 所以$\{a_n\}$是首项为1或2，公差为3的等差数列，或者是首项为1或2，公比为-1的等比数列.

【易错分析】上述解法忽视已知条件中$S_n>1$和各项均为正数的限制，导致出错.

【正解】由$a_1=S_1=\frac{1}{6}(a_1+1)(a_1+2)$解得$a_1=1$或$a_1=2$. 由题设知$a_1=S_1>1$，因此$a_1=2$. 又由$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=\frac{1}{6}(a_{n+1}+1)(a_{n+1}+2)-\frac{1}{6}(a_n+1)(a_n+2)$得$(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n-3)=0$，即$a_{n+1}-a_n=3$或$a_{n+1}=-a_n$. 因$a_n>0$，故$a_{n+1}=-a_n$不成立，舍去. 因此$a_{n+1}-a_n=3$，从而$\{a_n\}$是公差为3，首项为2的等差数列. 故数列$\{a_n\}$的通项为$a_n=3n-1$.

举一反三

4. α和β是两个不重合的平面，在下列条件中可判定平面α和β平行的是 ( )

A. α和β都垂直于同一平面

B. α内不共线的三点到β的距离相等

C. l,m是平面α内的直线且$l\parallel\beta,m\parallel\beta$

D. l,m是两条异面直线且$l\parallel\alpha,m\parallel\alpha,m\parallel\beta,l\parallel\beta$

5. 已知圆C的方程为$(x-1)^2+y^2=25$，过点$P(-2,1)$的直线l被圆C截得的弦长为8，试求直线l的方程.

6. (D，北京)若数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=n^2-10n$ $(n=1,2,3,\cdots)$，则数列$\{na_n\}$中数值最小的项是第________项.

典例③

(D，安徽)设函数$f(x)=2x+\frac{1}{x}-1(x<0)$，则$f(x)$ ( )

A. 有最大值 B. 有最小值

C. 是增函数 D. 是减函数

【错解】因为$2x+\frac{1}{x}\geqslant2\sqrt{2x\cdot\frac{1}{x}}=2\sqrt{2}$，

所以$f(x)=2x+\frac{1}{x}-1\geqslant2\sqrt{2}-1$.

即函数有最小值，选B.

【易错分析】上述解法在利用基本不等式时忽略了$x<0$这一条件，从而得到的答案是错误的.

【正解】因为$x<0$，所以$-2x>0,-\frac{1}{x}>0$，

则$f(x)=2x+\frac{1}{x}-1=-[(-2x)+(-\frac{1}{x})]-1$，

由基本不等式可知$f(x)=-[(-2x)+(-\frac{1}{x})]-1\leqslant-2\sqrt{(-2x)(-\frac{1}{x})}-1=-2\sqrt{2}-1$.

即函数有最大值，故选A.

【评注】"一正二定三相等"既是运用基本不等式解题的必要条件，也是我们正确解题的保证！

举一反三

7. (安徽、江南十校联考)命题"任意的$x\in\mathbf{R}$，$2x^3-x+1<0$"的否定是 ( )

A. 不存在$x\in\mathbf{R}$，$2x^3-x+1<0$

B. 存在$x\in\mathbf{R}$，$2x^3-x+1<0$

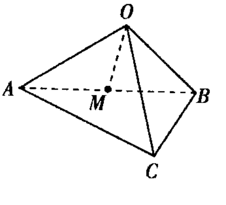
C. 存在$x\in\mathbf{R}$，$2x^3-x+1\geqslant0$

D. 对任意的$x\in\mathbf{R}$，$2x^3-x+1\geqslant0$

8. (山东临沂一模)设P为双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$的右支上一点，$M,N$分别是圆$(x+5)^2+y^2=4$和$(x-5)^2+y^2=1$上的点，则$|PM|-|PN|$的最大值为 ( )

A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

9. (B，四川)如图，在三棱锥$O-ABC$中，三条棱OA,OB,OC两两互相垂直，且$OA=OB=OC$，M是边AB的中点，则OM与平面ABC所成角的大小是________.



易错类型三 运算错误

【易错原因】高考中，数学试题的解答，往往少不了运算和计算，但很多考生达不到高考对运算能力的要求，即"快而准"，有的考生做题速度虽然很快，但准确率很低；有的考生解题准确率很高，但是在运算上耗费太多珍贵的高考时间，也是隐性失分，对数学成绩的影响很大. 在历年高考中，考生在运算和计算上暴露出的许多毛病和失误主要体现在：①未能正确使用运算法则和计算公式；②对已知数学关系式变形出错；③不重视运算技巧，对已知条件不会有效利用，运算刻板，过程繁冗，缺乏各种简化计算

的技能;④字符引用不当,列式混乱,欠缺条理;⑤数值计算失误,欠缺估算和验算的技能,不善于及时修正错误.

【应对技巧】在复习中,考生应把运算的合理性、准确性、简洁性和快速性作为基本功狠抓,对各种运算法则和计算公式,不但要熟悉,还要学会灵活运用.同时,还得具备检验和修正错误的技能,并养成认真、冷静、沉着处事的良好解题习惯,通过花大力气,提高计算技能和运算能力,是提高高考成绩的前提和必要一环.

典例①

(济南模拟)已知一个样本数据 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的方差为 4,则数据 $2a_1+1,2a_2+1,\cdots,2a_n+1$ 的方差为 ( )

A. 9　　B. 16　　C. 4　　D. 5

【错解】选 A 或 C 或 D.

【易错分析】错选 A 是认为数据 $2a_1+1,2a_2+1,\cdots,2a_n+1$ 的方差为样本数据 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的方差 4 的 2 倍加 1;错选 C 是认为数据 $2a_1+1,2a_2+1,\cdots,2a_n+1$ 的方差同数据 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 样本数据的方差一样,都为 4;错选 D 是认为数据 $2a_1+1,2a_2+1,\cdots,2a_n+1$ 的方差为样本数据 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的方差 4 加 1.不同数据的方差不能仅靠猜想,要理解实质,结合公式进行推导.

【正解】样本数据 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的方差为 4,设其平均数为 a,则

$$a=\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n),$$

$$s^2=\frac{1}{n}[(a_1-a)^2+(a_2-a)^2+\cdots+(a_n-a)^2],$$

又数据 $2a_1+1,2a_2+1,\cdots,2a_n+1$ 的平均数为:

$$\frac{1}{n}(2a_1+1+2a_2+1+\cdots+2a_n+1)=2a+1,$$

所以方差为 $s'^2=\frac{1}{n}[(2a_1+1-2a-1)^2+(2a_2+1-2a-1)^2+\cdots+(2a_n+1-2a-1)^2]$

$=4\cdot\frac{1}{n}[(a_1-a)^2+(a_2-a)^2+\cdots+(a_n-a)^2]$

$=4s^2=4\times4=16$.故选 B.

举一反三

1.(D,宁夏、海南)已知 $a_1>a_2>a_3>0$,则使得 $(1-a_ix)^2<1(i=1,2,3)$ 都成立的 x 的取值范围是 ( )

A. $\left(0,\frac{1}{a_1}\right)$　B. $\left(0,\frac{2}{a_1}\right)$　C. $\left(0,\frac{1}{a_3}\right)$　D. $\left(0,\frac{2}{a_3}\right)$

典例②

已知 $-1<a+b<3,2<a-b<4$,求 $2a+3b$ 的取值范围.

【错解】$\because -1<a+b<3$, ①

$2<a-b<4$, ②

$\therefore$ 由①②得 $1<2a<7$, ③

$-5<2b<1$. ④

由③$+\frac{3}{2}\times$④得 $-\frac{13}{2}<2a+3b<\frac{17}{2}$.

【易错分析】扩大了不等式的范围.

【正解】设 $2a+3b=x(a+b)+y(a-b)$,则 $x=\frac{5}{2},y=-\frac{1}{2}$. $\because -\frac{5}{2}<\frac{5}{2}(a+b)<\frac{15}{2},-2<-\frac{1}{2}(a-b)<-1,\therefore -\frac{9}{2}<2a+3b=\frac{5}{2}(a+b)-\frac{1}{2}(a-b)<\frac{13}{2}$.

【评注】在进行不等式或不等式组的运算时,可能会将范围扩大,此类问题一般用待定系数法来解,也可看成线性规划问题,用区域法来求范围.

举一反三

2.(D,江苏)设函数 $f(x)=ax^3-3x+1(x\in\mathbf{R})$ 对于 $\forall x\in[-1,1]$ 总有 $f(x)\geqslant0$ 成立,则 $a=$________.

3.已知曲线 $C:y=\frac{\sqrt{20-x^2}}{2}$ 与直线 $l:y=-x+m$ 仅有一个公共点,求 m 的范围.

典例③

不等式 $(x-2)\sqrt{x^2-2x-3}\geqslant0$ 的解集是________.

【错解 1】因为 $\sqrt{x^2-2x-3}\geqslant0$,所以原不等式等价于 $x-2\geqslant0$,即 $x\geqslant2$.

【错解 2】由 $x^2-2x-3\geqslant0$ 得 $x\leqslant-1$,或 $x\geqslant3$.又由不等式 $x-2\geqslant0$ 得 $x\geqslant2$.故原不等式的解集为 $\{x|x\geqslant3\}$.

【易错分析】错解 1 把一个非负式弃之,没有注意被开方式成立的条件,结果错误;错解 2 虽然注意到了根式的约束条件,但对"$\geqslant$"理解不深刻.

【正解】由 $x^2-2x-3\geqslant0$,得 $x\leqslant-1$,或 $x\geqslant3$.又不等式 $x-2\geqslant0$,得 $x\geqslant2$.又 $x=-1$ 满足题意,故原不等式的解集为 $\{x|x\geqslant3$,或 $x=-1\}$.

【评注】不等式两边可去掉一个值恒正的式子,如 x^2+x+1 等;但对于有约束条件的非负式,不能随意弃之,要在约束条件下求解不等式;对于"$\geqslant$"型

不等式,注意不要漏掉了方程的解.

举一反三

4. 已知双曲线方程为 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$,过点 $P(1,1)$ 的斜率为 k 的直线 l 与双曲线只有一个公共点,求 k 的值.

5. 已知 $A=\{x|x^2+4x+p<0\}$,$B=\{x|x^2-x-2>0\}$,满足 $A\subseteq B$,求实数 p 的取值范围.

6. (广东佛山一模)已知函数 $f(x)\begin{cases}2, x\in[-1,1],\\ x, x\notin[-1,1],\end{cases}$ 若 $f[f(x)]=2$,则 x 的取值范围是________.

典例④

已知可导函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 满足 $f'(x)>f(x)$,则当 $a>0$ 时,$f(a)$ 和 $e^af(0)$ 的大小关系为 ( )

A. $f(a)<e^af(0)$　　B. $f(a)>e^af(0)$

C. $f(a)=e^af(0)$　　D. $f(a)\leqslant e^af(0)$

【易错分析】导数运算公式掌握不熟练出现错误.

【正解】令 $g(x)=e^{-x}f(x)$,则 $g'(x)=e^{-x}[f'(x)-f(x)]>0$,故 $g(0)<g(a)$,亦即有 $e^{-a}f(a)>f(0)$,$\therefore f(a)>f(0)e^a$,故选 B.

【举一反三】

7. (浙江金华十校联考)若 $a>0,b>0,a^2+b^3=2$,则 $a+b$ 的最大值为________.

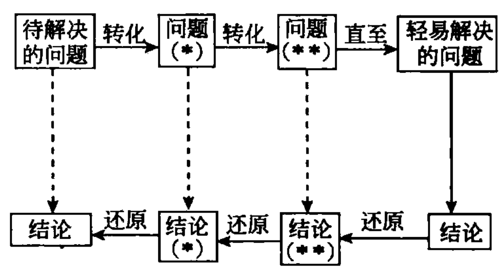
易错类型四　数学思想应用错误

【易错原因】数学失分并非全是知识上的错误,数学思想方法不能灵活正确地运用,致使解题过程走了弯路或根本找不到解题思路而使思路受阻造成的失分在错题中更具有普遍性.信息社会越来越多地要求人们自觉地运用数学思想来提出问题、分析问题、解决问题、评价问题.要具有数学头脑和眼光,作为突出数学学科特点的重要体现,高考试题十分重视对数学思想方法的考查,特别是突出考查能力的试题,其解答过程都蕴涵着重要的数学思想方法,数学知识是数学思想方法的载体,数学思想方法又是数学知识的精髓,是知识转化为能力的桥梁.数学思想应用错误主要有:转化(化归)的思想、分类讨论的思想、数形结合的思想、函数与方程的思想.

1. 转化(化归)的思想应用错误

所谓化归思想方法,就是在研究和解决有关数学问题时采用某种手段将问题通过变换使之转化,进而达到解决的一种方法.一般总是将复杂的问题通过变换转化为简单的问题,将难解的问题通过变换转化为容易求解的问题,将未解决的问题变换转化为已解决的问题.

【应对技巧】数学问题可看作是一系列的关系形成的一个"关系链".处理数学问题的实质,就是实现新问题向旧问题的转化、复杂问题向简单问题的转化,实现未知向已知的转化.为了实施有效的化归,既可以变更问题的条件,也可以变更问题的结论,既可以变换问题的内部结构,又可以变换问题的外部形式,既可以从代数的角度去认识问题,又可以从几何的角度去解决问题,虽然解决问题的具体过程不尽相同,但就其思考方式来讲,通常将待解决的问题通过一次又一次的转化,直至归结为一类已解决或很容易解决的问题,从而获得原问题的解答.这种解决问题的模式可图示如下:



同学们只要在日常学习过程中,多做多练,多积累,强化应用意识,形成自己的数学素养,转化思想的应用才能得心应手.

典例①

(E,天津文)若关于 x 的不等式 $(2x-1)^2<ax^2$ 的解集中的整数恰有 3 个,则实数 a 的取值范围是________.

【错解】不等式转化为二次不等式后,由于有3个整数解,所以 $\Delta>0$,求得 $0<a<4$.

【易错分析】上面解法只考虑不等式有解,而忽视有 3 个整数解,所以解法错误.

【正解】$(2x-1)^2>ax^2$,即

$(4-a)x^2-4x+1<0$.要 x 恰有 3 个整数,必须 $4-a>0$,即 $a<4$,$\Delta=16-4(4-a)>0$,所以 $0<a<4$.